6 exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\frac{1}{4}$$

Este é um limite semelhante ao do **Exemplo 5**.

Novamente observamos que o Teorema sobre as propriedades dos limites não pode ser utilizado pois, embora o numerador e o denominador tenham limite, o limite do denominador é zero, contrariando uma das hipóteses.

Entretanto, o numerador e o denominador tendem a zero e isso nos garante que 0 é raiz de ambos os termos da fração: x^2 e $\left(\sqrt{x^2+4}-2\right)$. Este fato nos indica o artifício a ser utilizado, pois, através dele obteremos o fator x^2 em ambos os termos da fração.

Multiplicando o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador - que é onde temos uma diferença de radicais - nos livramos desta diferença obtendo um fator que permite a simplificação da fração. Vejamos:

$$\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-4}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{x^2}{x^2\cdot\left(\sqrt{x^2+4}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}$$

É preciso notar que a simplificação por x^2 foi possível, pois x^2 não é igual a zero.

Logo, utilizando o Teorema, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2}=\frac{1}{4}$$

5 exemplo

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Para calcular este limite, observamos, em primeiro lugar que o Teorema sobre as propriedades dos limites **não** pode ser utilizado pois, embora o numerador e o denominador tenham limite, o limite do denominador é zero, contrariando uma das hipóteses do Teorema.

Entretanto, o numerador e o denominador tendem a zero e isso nos garante que 2 é raiz de ambos os termos da fração: $(x-2)$ e $\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{6}\right)$. Esse fato nos indica o artifício a ser utilizado, pois, através dele obteremos o fator $(x-2)$ em ambos os termos da fração.

Com efeito, multiplicando o numerador e o denominador pela expressão conjugada do numerador - que é onde temos uma diferença de radicais - nos livramos dessa diferença obtendo um fator que permite a simplificação da fração. Vejamos:

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{6}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}{(x-2).(\sqrt{x+4}+\sqrt{6})}=$$

$$\frac{x-2}{(x-2).(\sqrt{x+4}+\sqrt{6})}=\frac{1}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{6})}$$

É preciso notar que a simplificação por $(x-2)$ foi possível, pois $(x-2)$ não é igual a zero.

Assim

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{6}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt{x+4}+\sqrt{6})}=\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

sendo que, na última igualdade utilizamos o Teorema sobre as propriedades dos limites, pois agora os limites de ambos os termos da fração existem e o do denominador não é zero.

Outros exemplos de limites com resoluções:

http://ecalculo.if.usp.br/ferramentas/limites/