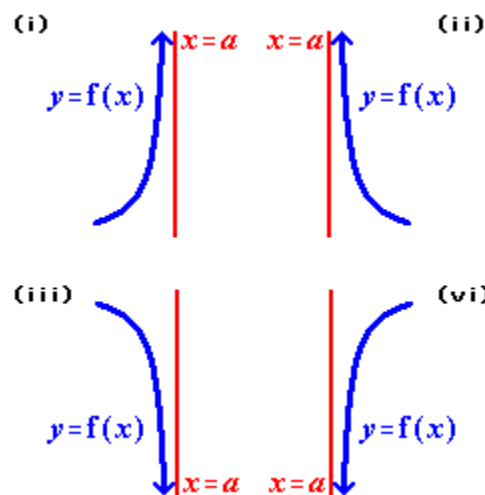


Assíntotas- são retas imaginárias, no sentido horizontal ou vertical, que delimitam a aproximação dos gráficos das funções das mesmas, a medida que x cresce ou decresce

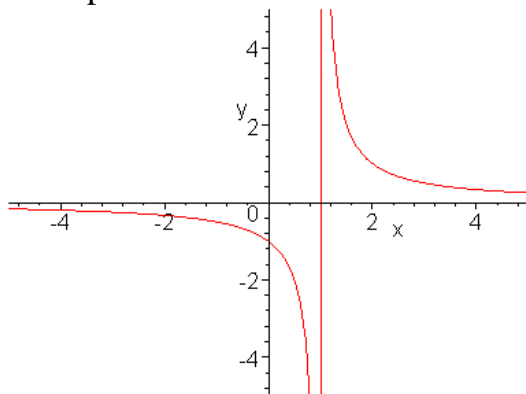
Definição (Assíntota Vertical) : (↑)

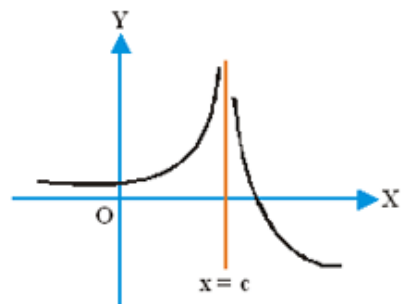
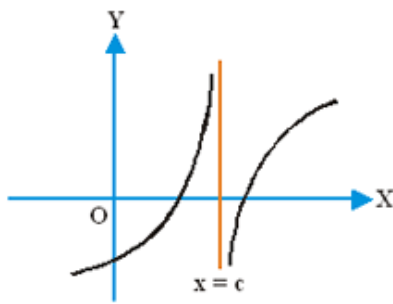
A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se pelo menos uma das afirmações abaixo for verdadeira :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty & \text{(ii)} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \\ \text{(iii)} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty & \text{(iv)} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \end{array}$$



Exemplos:





Observe nas duas figuras, a aproximação cada vez maior do gráfico com a sua assíntota à medida que x se aproxima de c , e considerando também o decréscimo ou crescimento da imagem da função.

- Definição II: A reta $x = a$ será uma assíntota vertical do gráfico da função f , se pelo menos uma das afirmativas abaixo for verdadeira:

(i) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

$x \rightarrow a^+$

(ii) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

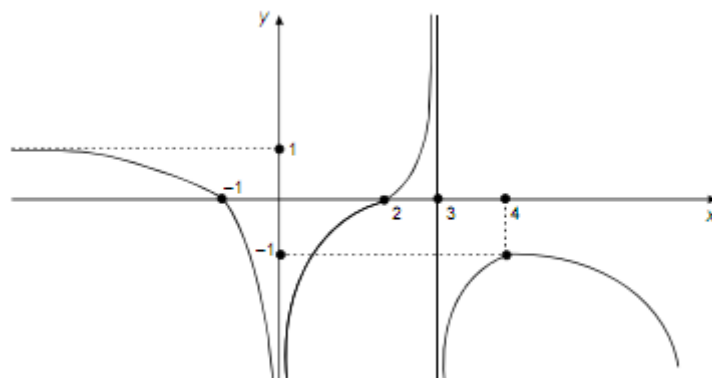
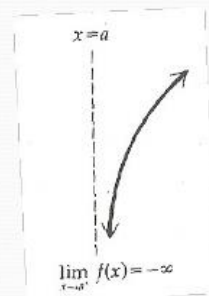
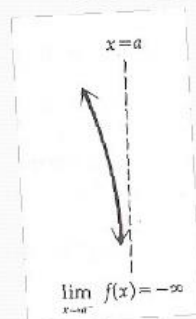
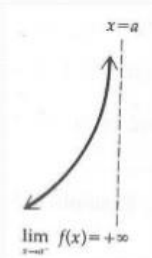
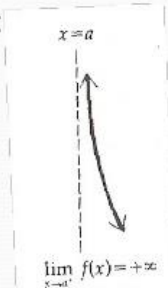
$x \rightarrow a^-$

(iii) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

$x \rightarrow a^+$

(iv) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

$x \rightarrow a^-$



Exemplo: Determine, se houver as assíntotas verticais

a) $\varphi(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

Fizemos :

$$(x-2) = 0$$

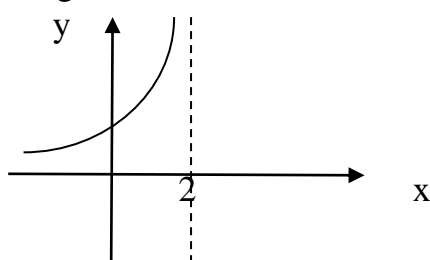
$$x = 2$$

Então determinamos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} + \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} - \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Logo $x=2$ é assíntota vertical



b) $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = -\infty \Rightarrow \text{a reta } x=0 \text{ é assíntota vertical}$$

Diagram showing sign analysis for $x \rightarrow 0^-$:
 Numerator: $(x+2) \rightarrow 2$, $(x-1) \rightarrow -1$
 Denominator: $x \rightarrow 0^-$, $(x+1) \rightarrow 1$, $(x-2) \rightarrow -2$
 Overall sign: $0^- \cdot 1 \cdot -2 = 0^+$ (Note: The diagram shows a final result of 0^+ in pink, which contradicts the $-\infty$ result stated above it.)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow \text{a reta } x=0 \text{ é assíntota vertical}$$

Diagram showing sign analysis for $x \rightarrow 0^+$:
 Numerator: $(x+2) \rightarrow 2$, $(x-1) \rightarrow -1$
 Denominator: $x \rightarrow 0^+$, $(x+1) \rightarrow 1$, $(x-2) \rightarrow -2$
 Overall sign: $0^+ \cdot 1 \cdot -2 = 0^-$ (Note: The diagram shows a final result of 0^- in pink, which contradicts the $+\infty$ result stated above it.)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow \text{a reta } x=-1 \text{ é assíntota vertical}$$

Diagram showing sign analysis for $x \rightarrow -1^-$:
 Numerator: $(x+2) \rightarrow 1$, $(x-1) \rightarrow -2$
 Denominator: $x \rightarrow -1^-$, $(x+1) \rightarrow 0^-$, $(x-2) \rightarrow -3$
 Overall sign: $-1 \cdot 0^- \cdot -3 = 0^-$ (Note: The diagram shows a final result of 0^- in pink, which contradicts the $+\infty$ result stated above it.)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = -\infty \Rightarrow \text{a reta } x = -1 \text{ é assíntota vertical}$$

Diagrama de sinais para $x \rightarrow -1^+$:
 Numerador: $(x+2)(x-1) \rightarrow (-2)(-2) = +4$
 Denominador: $x(x+1)(x-2) \rightarrow (-1)(0^+)(-3) = 0^+$
 Resultado: $\frac{+}{+} = +$ (mas o texto indica $-\infty$, possivelmente devido a uma interpretação diferente dos sinais ou um erro no diagrama).

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = -\infty \Rightarrow \text{a reta } x = 2 \text{ é assíntota vertical}$$

Diagrama de sinais para $x \rightarrow 2^-$:
 Numerador: $(x+2)(x-1) \rightarrow (4)(1) = +4$
 Denominador: $x(x+1)(x-2) \rightarrow (2)(3)(0^-) = 0^-$
 Resultado: $\frac{+}{-} = -$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} = +\infty \Rightarrow \text{a reta } x = 2 \text{ é assíntota vertical}$$

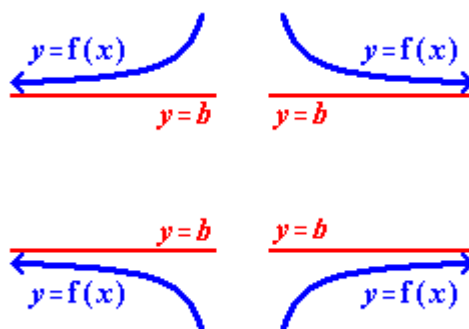
Diagrama de sinais para $x \rightarrow 2^+$:
 Numerador: $(x+2)(x-1) \rightarrow (4)(1) = +4$
 Denominador: $x(x+1)(x-2) \rightarrow (2)(3)(0^+) = 0^+$
 Resultado: $\frac{+}{+} = +$

Assíntotas Verticais : $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$

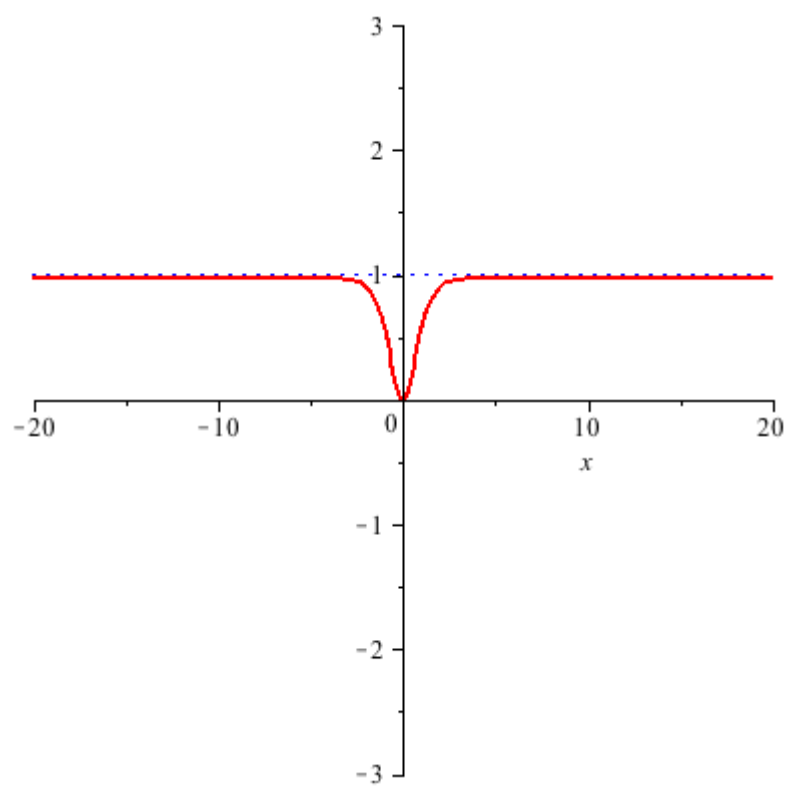
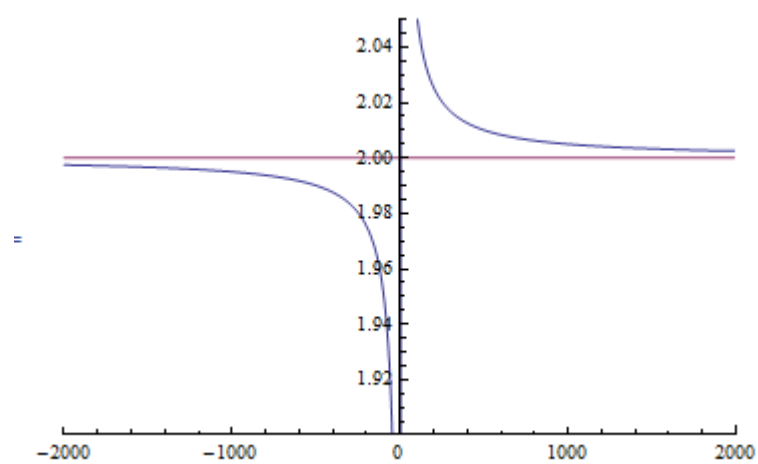
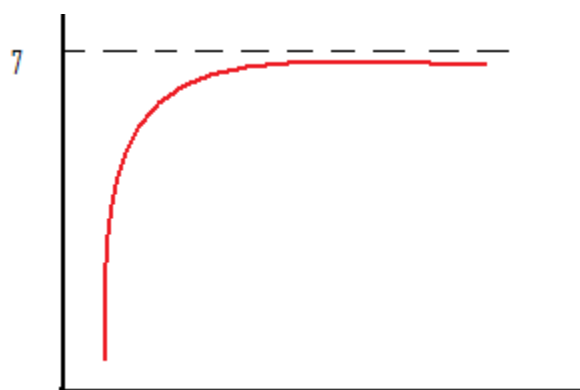
Definição (Assíntota Horizontal) : (↑)

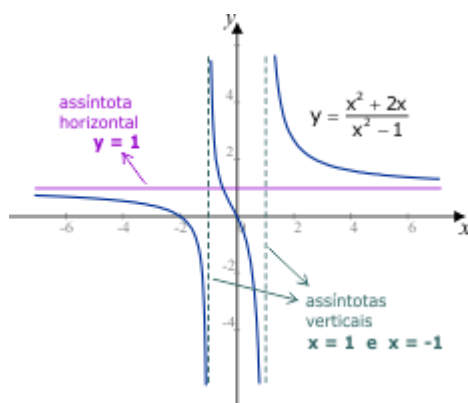
A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f se

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$



Exemplo :





Exemplo: Determine se houver as assíntotas horizontais (A. H.)

$$(a) \varphi(x) = \frac{3x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1-0} = 3$$

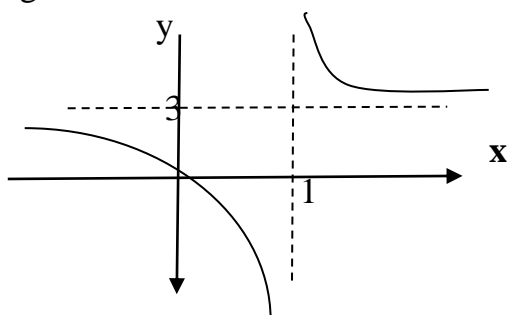
Logo $y=3$ é assíntota horizontal

Nesse caso, para assíntota vertical (A.V.) temos a possibilidade de $x=1$ ser, precisamos conferir no limite com x tendendo a 1 pela direita e esquerda.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{1 - \frac{1}{x}}$$

Pela direita temos $+\infty$ e pela esquerda $-\infty$ logo $x=1$ è A.V.

Temos o gráfico:



$$(b) \quad f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}$$

☞ Assíntotas Horizontais ☞

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{(x+2)(x-1)}{x^3}}{\frac{x(x+1)(x-2)}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2}}{\frac{x}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2}}{\frac{x}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

0
1

\Rightarrow a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(x+2)(x-1)}{x^3}}{\frac{x(x+1)(x-2)}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2}}{\frac{x}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+2}{x} \cdot \frac{x-1}{x^2}}{\frac{x}{x} \cdot \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

0
1

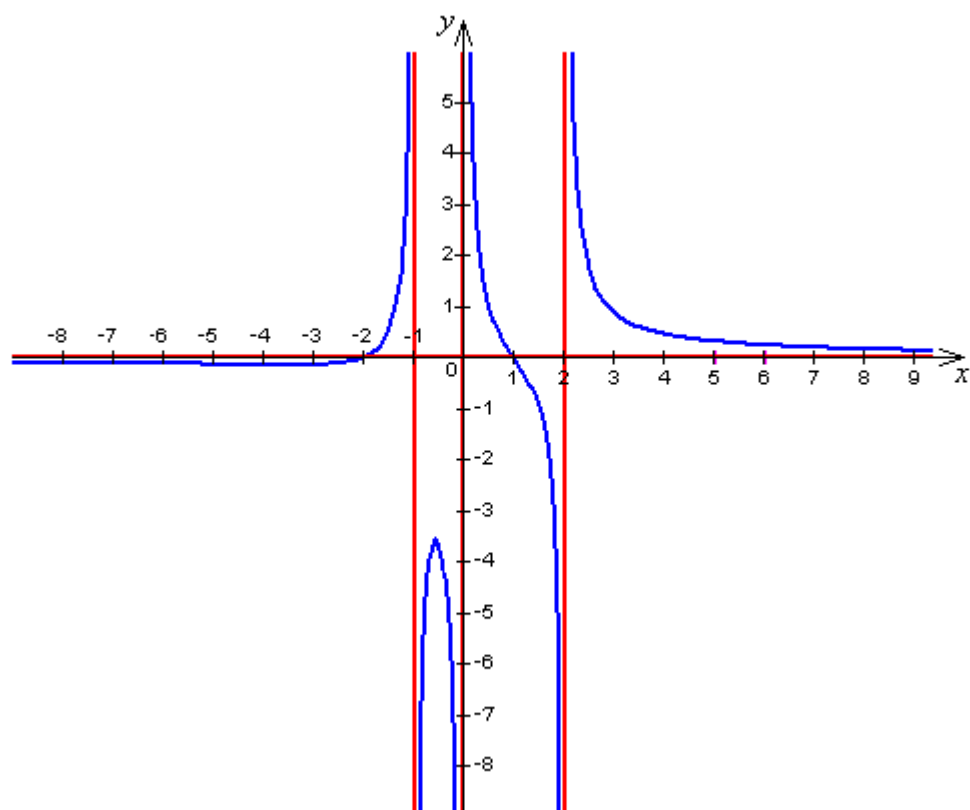
\Rightarrow a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal

Assíntotas Horizontais : $y = 0$

Como as **Assíntotas Verticais** já feitas no exemplo (b) eram : $x = 0$

, $x = -1$ e $x = 2$

Temos o seguinte gráfico



Façamos agora para os exemplos :

c) $y = \frac{1}{x-2}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

e) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$