Assíntotas- são retas imaginárias, no sentido horizontal ou vertical, que delimitam a aproximação dos gráficos das funções das mesmas, a medida que x cresce ou decresce

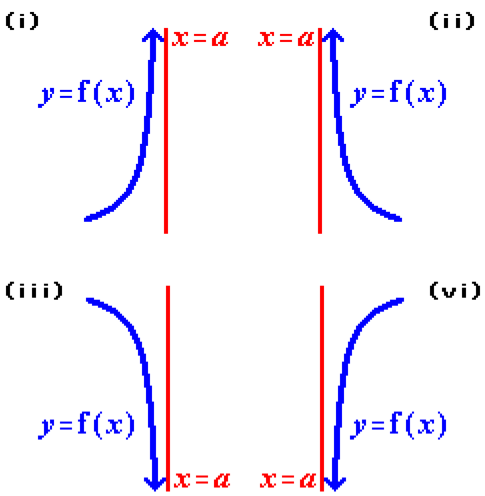
---

Definição (Assíntota Vertical) : (⇑)

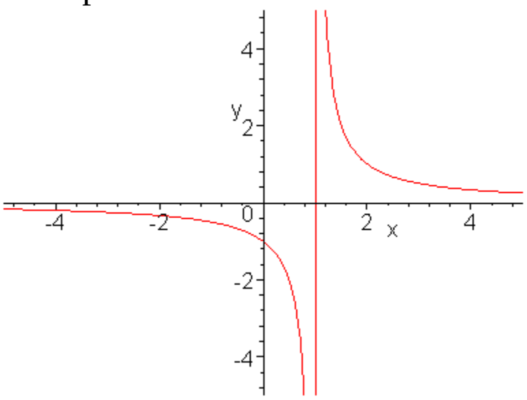
A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se pelo menos uma das afirmações abaixo for verdadeira :

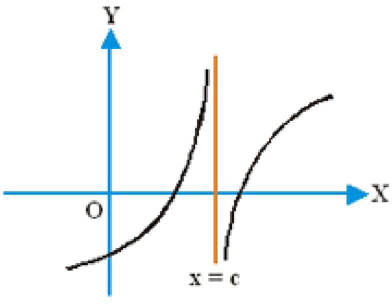
(i) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ **(ii)** $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

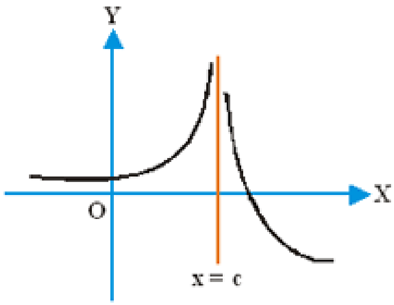
(iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ **(iv)** $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



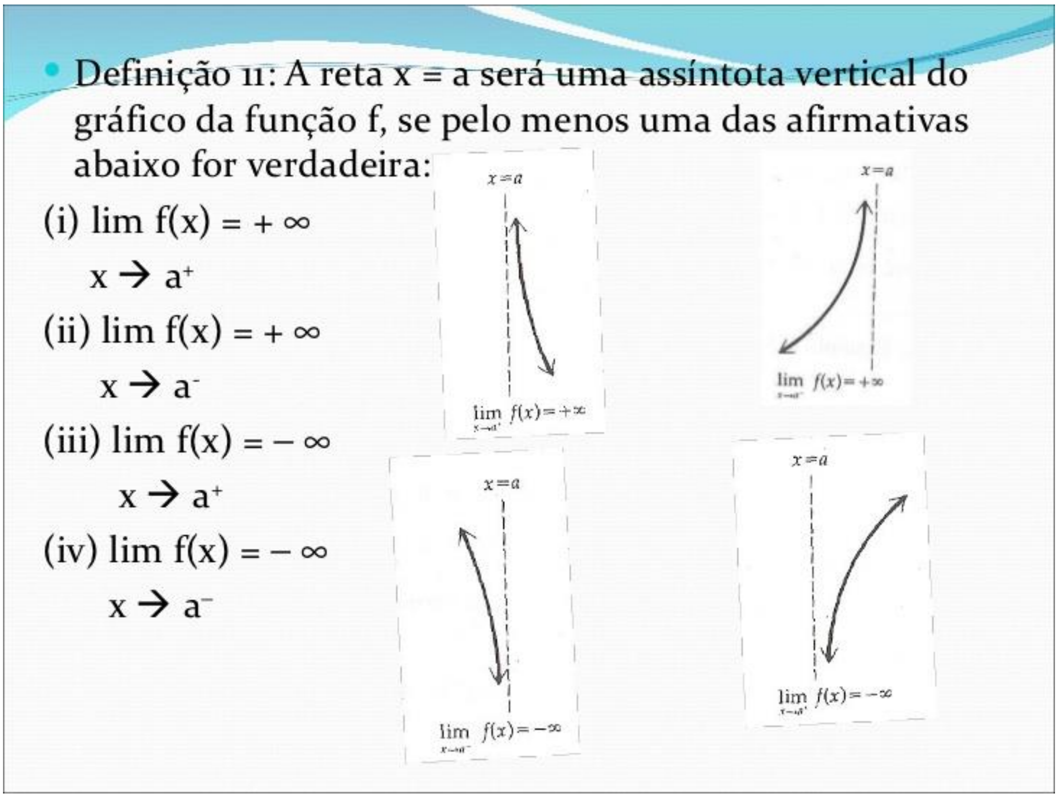
Exemplos:

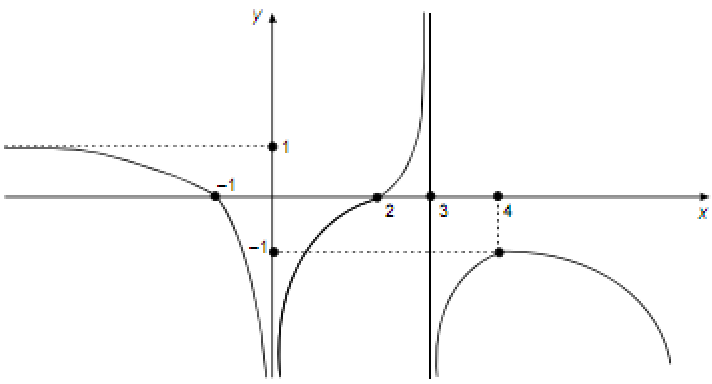






Observe nas duas figuras, a aproximação cada vez maior do gráfico com a sua assíntota à medida que x se aproxima de c, e considerando também o decrescimento ou crescimento da imagem da função.





Exemplo:Determine , se houver as assíntotas verticais

a) $\varphi(x) = \frac{1}{(x-2)}2$

Fizemos :

$(x-2) = 0$

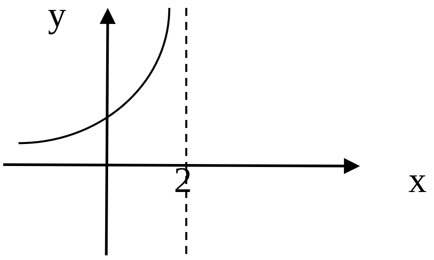
$x = 2$

Então determinamos:

$$\lim_{x\to 2} + \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2} - \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

Logo x=2 é assíntota vertical



b) $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{0^-}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{1}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{-2}}_{\to 0^+}} = -\infty \Rightarrow \text{a reta } x = 0 \text{ é assíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{0^+}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{1}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{-2}}_{\to 0^-}} = +\infty \Rightarrow \text{a reta } x = 0 \text{ é assíntota vertical}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{-1}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{0^-}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{-3}}_{\to 0^-}} = +\infty \Rightarrow \text{a reta } x = -1 \text{ é assíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to -2}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{\to -1}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{\to 0^+}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\to -3}}_{\to 0^+}} = -\infty \Rightarrow \text{ a reta } x = -1 \text{ é assíntota vertical}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to 4}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{\to 2}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{\to 3}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\to 0^-}}_{\to 0^-}} = -\infty \Rightarrow \text{ a reta } x = 2 \text{ é assíntota vertical}$$

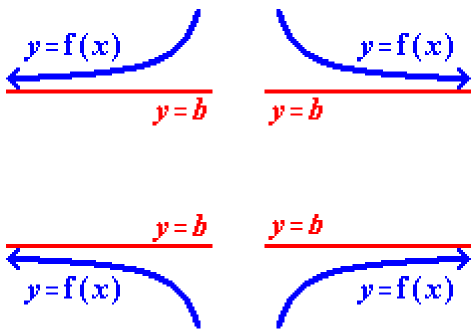
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\overbrace{\boxed{(x+2)(x-1)}}^{\to 4}}{\underbrace{\underbrace{\boxed{x}}_{\to 2}\underbrace{\boxed{(x+1)}}_{\to 3}\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\to 0^+}}_{\to 0^+}} = +\infty \Rightarrow \text{ a reta } x = 2 \text{ é assíntota vertical}$$

Assíntotas Verticais : $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$

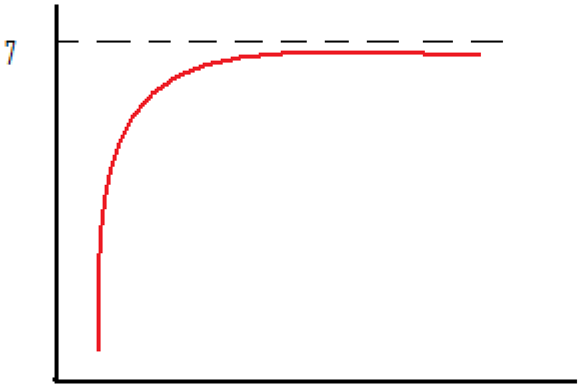
Definição (Assíntota Horizontal) : (⇑)

A reta $y = b$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f se

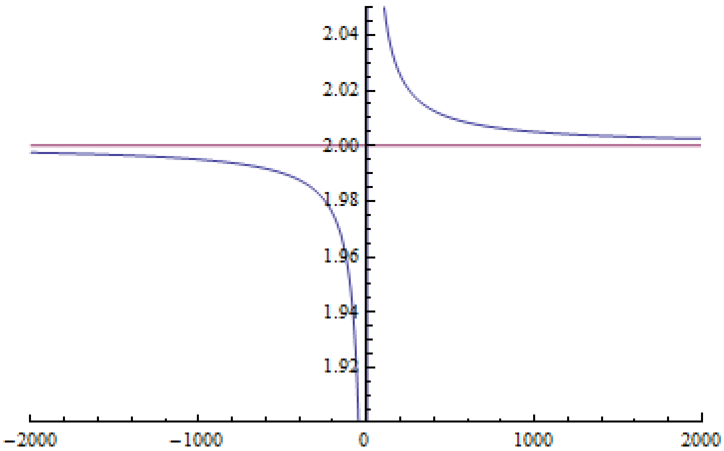
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

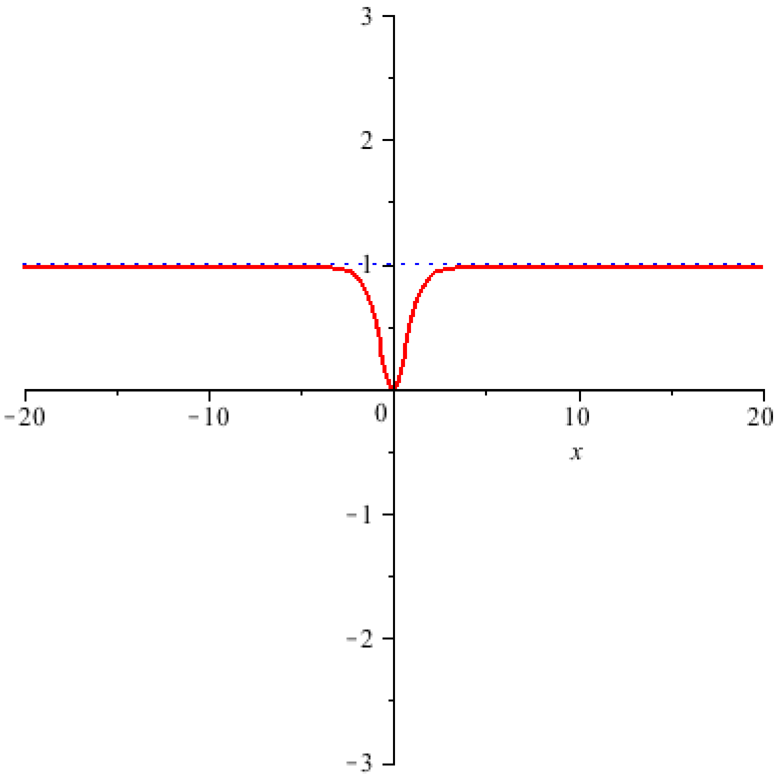


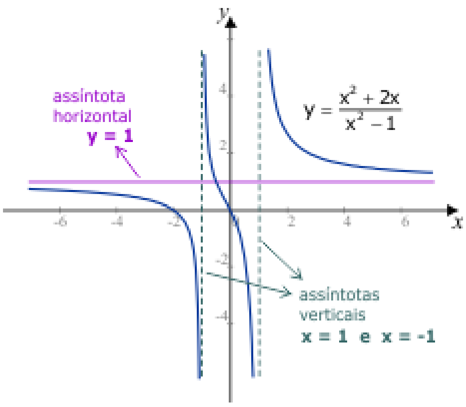
Exemplo :


7

=


2.04
2.02
2.00
1.98
1.96
1.94
1.92
−2000
−1000
0
1000
2000


3
2
1
-20
-10
0
10
20
x
-1
-2
-3



Exemplo:Determine se houver as assíntotas horizontais (A. H.)

(a) $\varphi(x) = \frac{3x}{x-1}$

$\lim_{x\to\infty} \rho(x) = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{x-1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-0} = 3$$

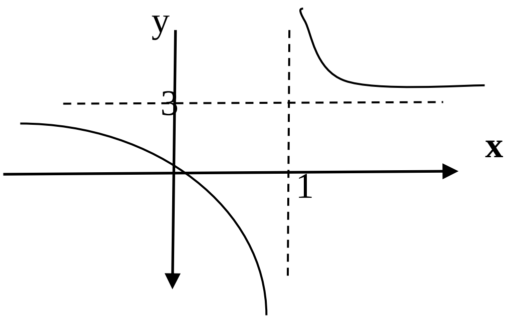
Logo y=3 é assíntota horizontal

Nesse caso, para assíntota vertical (A.V.) temos a possibilidade de x=1 ser, precisamos conferir no limite com x tendendo a 1 pela direita e esquerda.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3}{1-\frac{1}{x}}$$

Pela direita temos +∞ e pela esquerda -∞ logo x=1 è A.V.

Temos o gráfico:



(b) $$f(x)=\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}$$

➲ Assíntotas Horizontais ➲

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^3}}{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x^2}}{\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-2}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x^2}}{\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\boxed{\left(1+\boxed{\dfrac{2}{x}}\right)\cdot\left(\boxed{\dfrac{1}{x}}-\boxed{\dfrac{1}{x^2}}\right)}}{\boxed{1\cdot\left(1+\boxed{\dfrac{1}{x}}\right)\cdot\left(1-\boxed{\dfrac{2}{x}}\right)}}=\frac{0}{1}=0$$

$\Rightarrow$ a reta $y=0$ é uma assíntota horizontal

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-1)}{x(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(x+2)(x-1)}{x^3}}{\dfrac{x(x+1)(x-2)}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x^2}}{\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-2}{x}}=$$

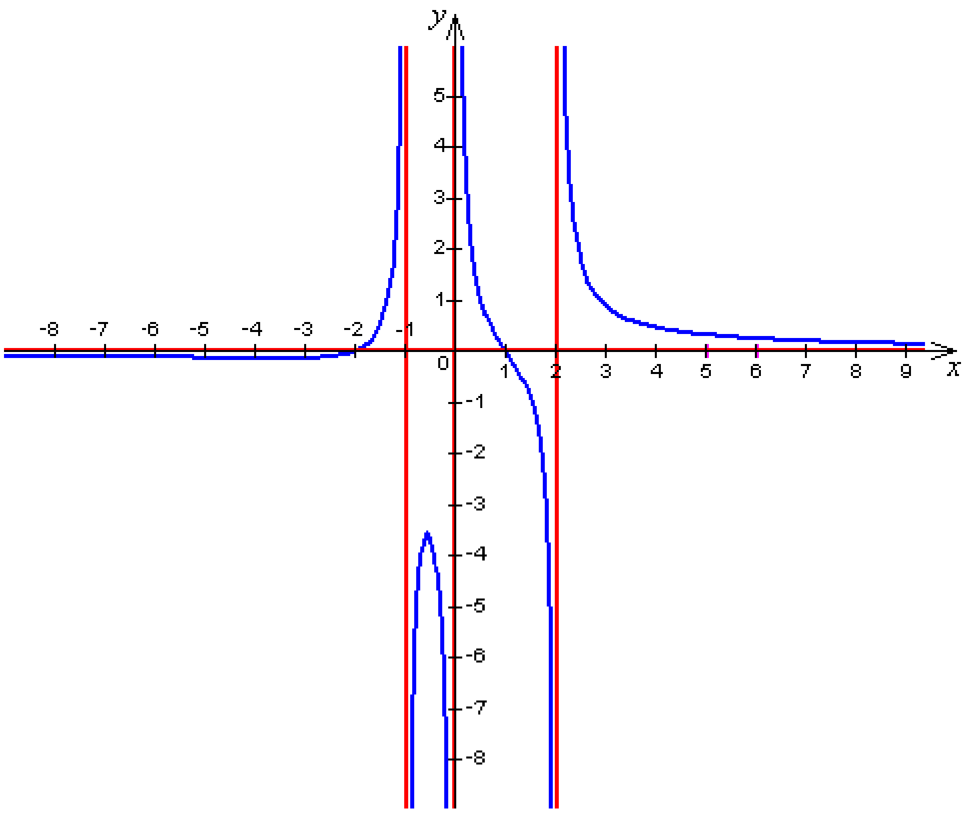
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{x+2}{x}\cdot\dfrac{x-1}{x^2}}{\dfrac{x}{x}\cdot\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\boxed{\left(1+\boxed{\dfrac{2}{x}}\right)\cdot\left(\boxed{\dfrac{1}{x}}-\boxed{\dfrac{1}{x^2}}\right)}}{\boxed{1\cdot\left(1+\boxed{\dfrac{1}{x}}\right)\cdot\left(1-\boxed{\dfrac{2}{x}}\right)}}=\frac{0}{1}=0$$

$\Rightarrow$ a reta $y=0$ é uma assíntota horizontal

Assíntotas Horizontais : $y = 0$

Como as **Assíntotas Verticais já feitas no exemplo (b) eram : $x = 0$, $x = -1$ e $x = 2$**

Temos o seguinte gráfico



Façamos agora para os exemplos :

c) $y = \frac{1}{x-2}$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

e) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$