A radiciação de complexos na forma trigonométrica

A radiciação de complexos na forma trigonométrica também ficam facilitadas com a utilização das fórmulas de Moivre.

Vejamos como se procede a radiciação desses números:

Considere um número complexo qualquer z = a + bi. A forma trigonométrica de z é:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

As raízes de índice n de z são dadas pela segunda fórmula de Moivre:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]; k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

Exemplo 1. Determine as raízes quadradas de 2i.

Solução: Primeiro devemos escrever o número complexo na forma trigonométrica.
Todo do número complexo é da forma z = a + bi. Assim, temos que:

$$z = 2i$$
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$|z| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Sabemos também que:

$$sen\,\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{0}{2} = 0$$

Com os valores de seno e cosseno podemos concluir que:

$$\theta = 90^o = \frac{\pi}{2}$$

Assim, a forma trigonométrica de z = 2i é:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$$

Agora, vamos calcular as raízes quadradas de z utilizando a fórmula de Moivre.

$$z_k = \sqrt[2]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2k\pi}{2}\right)\right]; k \in \{0, 1\}$$

Como queremos as raízes quadradas de z, obteremos duas raízes distintas z_0 e z_1.

Para k = 0, teremos

$$z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$$

Para k = 1, teremos:

$$z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{2}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi/2}{2} + \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{2}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right]\right)$$

Ou

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\cdot sen\frac{5\pi}{4}\right)$$

Exemplo 2. Obtenha as raízes cúbicas de z = 1•(cosπ + i•senπ)

Solução: Como o número complexo já está na forma trigonométrica, basta utilizar a fórmula de Moivre. Pelo enunciado temos que ø = π e |z| = 1. Assim,

$$z_k = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]; k \in \{0,1,2\}$$

Teremos três raízes distintas, z_0, z_1 e z_2.
Para k = 0

$$z_0 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 0\cdot \pi}{3}\right)\right] = 1\cdot\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot sen\ \frac{\pi}{3}\right]$$

Para k = 1

$$z_1 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 1\cdot \pi}{3}\right)\right] = 1\left[\cos\frac{3\pi}{3} + i\cdot sen\ \frac{3\pi}{3}\right] = 1\cdot(\cos\pi + i sen\pi)$$

Ou z_1= – 1, pois cos π = – 1 e sen π = 0.

Para k = 2

$$z_2 = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right) + i\cdot sen\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\cdot 2\cdot \pi}{3}\right)\right] = 1\cdot\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\cdot sen\ \frac{5\pi}{3}\right]$$