EQUAÇÕES ALGÉBRICAS - RESUMO

Denominamos equações polinomiais ou algébricas, às equações da forma: **P(x) = 0**, onde **P(x)** é um polinômio de grau **n > 0**.

Teorema Fundamental da Álgebra:

Toda a equação algébrica P(x) = 0 de grau n > 0, admite pelo menos uma raiz real ou complexa.

OBS: Equações de 5º grau ou maiores não possuem fórmulas para a sua solução direta.

Teorema da Decomposição:

Todo o polinômio de grau **n** tem exatamente **n** raízes reais e complexas.

Demonstração: Pelo teorema fundamental, P(x) tem pelo menos uma raiz. Seja ela $\mathbf{r_1}$.

Logo: $\mathbf{P(x) = a_n.(x-r_1).(x-r_2). \ldots (x-r_n)}$

VEJA:

Forma fatorada de uma equação polinomial

$$(x-r_1)\cdot(x-r_2)\cdot(x-r_3)=0$$

onde r_1, r_2 e r_3 são as raízes da equação

como as raízes são -1, 1 e 2, tem-se:

$$(x-(-1))\cdot(x-1)\cdot(x-2)=0$$

$$(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=0$$

multiplicando os fatores, tem-se:

$$(x^2-x+x-1)\cdot(x-2)=0$$

$$(x^2-1)\cdot(x-2)=0 \quad \rightarrow \quad (x^3-2x^2-x+2)=0$$

Exemplo: Compor o polinômio, sabendo que suas raízes são **1**, **2** e **4**.

Solução: Como existem **3** raízes, **n = 3**, então o polinômio é da forma: $\mathbf{P(x) = a_n.(x - r_1).(x - r_2).(x - r_3)}$.

Fazendo $\mathbf{a_n = 1}$, temos que: **P(x) = 1.(x – 1).(x – 2).(x – 4)**. Logo, $\mathbf{P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8}$.

Teorema da Decomposição

Observe os polinômios a seguir e as suas raízes:

- $\mathbf{P_1(x) = 4x - 12}$ **de raiz 3**
- $\mathbf{P_2(x) = x^2 - 5x + 6}$ **de raízes 2 e 3**
- $\mathbf{P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4}$ **de raízes –2, –1 e 2**
- $\mathbf{P_4(x) = x^4 - 5x^2 - 36}$ **de raízes –3, 3, 2i e –2i**

Cada um dos polinômios acima pode ser escrito nas seguintes formas fatoradas:

$P_1(x) = 4x - 12 \Rightarrow \mathbf{P_1(x) = 4(x-3)}$

$P_2(x) = x^2 - 5x + 6 \Rightarrow \mathbf{P_2(x) = (x-2)(x-3)}$

$P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Rightarrow \mathbf{P_3(x) = (x+1)(x-2)(x+2)}$

$P_4(x) = x^4 - 5x - 36 \Rightarrow \mathbf{P_4(x) = (x-3)(x+3)(x-2i)(x+2i)}$

Multiplicidade de uma raiz:

Quando decompomos P(x) uma mesma raiz ocorrer mais de uma vez sendo denominada de raiz múltipla de P(x).

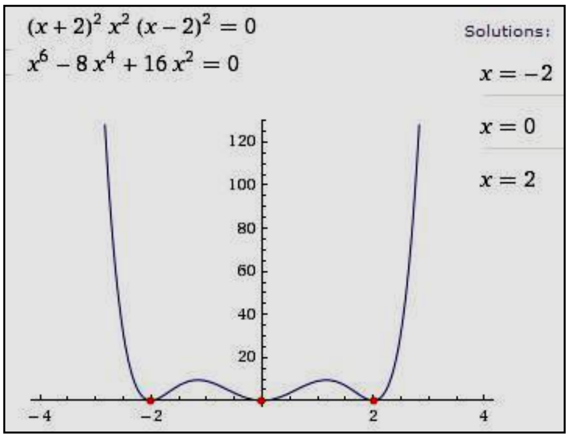
Exemplo: Se $\mathbf{P(x) = (x - 1)^2.(x - 3)}$ dizemos, nesse caso, que das 3 raízes de P(x), **1 tem multiplicidade 2** enquanto que **3 é uma raiz simples**.

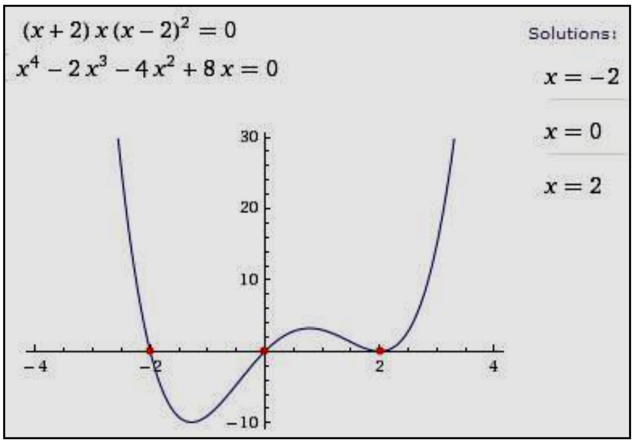
<u>Resultado importante:</u> Seja P(x) um polinômio no qual x = k é uma raiz múltipla de multiplicidade <u>n</u>.

- Se n é par, então x = k é um ponto de máximo ou mínimo local. (Observe x = – 2, x = 0 e x = 2, as raízes no gráfico da esquerda e x = 2, no gráfico da direita;

- Se n é ímpar x = k será um ponto onde o gráfico muda de concavidade.

Os gráficos gerados POR APLICATIVO mostram equações com mesmas raízes e multiplicidades diferentes.





<u>Teorema das raízes complexas</u>: Se uma equação **P(x) = 0**, de coeficientes **<u>reais</u>**, apresentar uma raiz complexa (**a + bi**), podemos afirmar que o seu conjugado (**a – bi**) também será raiz de P(x), e com a mesma multiplicidade.

<u>Exemplo:</u> Calcular as raízes da equação: $\mathbf{x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x + 10 = 0}$, sabendo que **(2 + i)** é uma das raízes.

<u>Solução.</u> Se **(2+ i)** é uma das raízes, o seu conjugado **(2- i)** também é raiz da equação.

Usando o fato que $\mathbf{P(x) = (x - r_1).(x - r_2).Q(x) = 0}$, temos que:

$\mathbf{P(x) = [x - (2 + i)].[x - (2 - i)].Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = [(x - 2) + i]. [(x - 2) - i].Q(x) = 0 \Rightarrow}$

$\mathbf{\Rightarrow P(x) = [(x-2)^2 - i^2].Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = [(x^2 - 4x + 4) - (-1)].Q(x) = 0 \Rightarrow P(x) = (x^2 - 4x + 5).Q(x) = 0}$

Como o polinômio dado é de grau **n = 4** e P(x) é divisível por $\mathbf{x^2 - 4x + 5}$ restam duas raízes a se descobrir. Resolvendo $\mathbf{x^2 - 4x + 5 = 0}$ duas raízes: **x = – 2** e **x = – 1**. As raízes são **S = {– 2, – 1, 2 + i, 2 – i}.**

<u>Soma dos coeficientes de um polinômio</u>:

Para calcular a soma **S** dos coeficientes de um polinômio **P(x),** basta calcular o valor numérico do polinômio para **x = 1**, ou seja, calcular **P(1)**.

<u>Exemplos.</u>

a) $P(x) = 2x^4 + 3x^2 - 7x + 10$. Calculando, S = P(1) = 2 + 3 - 7 + 10 = 8.

b) Qual a soma dos coeficientes do polinômio $T(x) = (5x + 1)^4$? $S = T(1) = (5.1 + 1)^4 = 6^4 = 6.6.6.6 = 1296$.

<u>Consequência:</u> Se a soma dos coeficientes de uma equação algébrica P(x) = 0 for nula, então a unidade é raiz da equação (1 é raiz).

<u>Exemplo</u>: O valor **x = 1** é raiz de $\mathbf{40x^5 - 10x^3 + 10x - 40 = 0}$, pois a soma dos coeficientes é igual a zero.

RESOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA

I) Quando a soma dos coeficientes de uma equação é zero, então 1 é raiz dessa equação.

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$$

Obs: Para cada raiz da equação podemos utlizar briot- ruffini para reduzir o grau da equação em um grau.

II) Quando o termo independente de uma equação é zero, então essa equação tem raiz nula com multiplicidade igual ao seu menor expoente.

$$x^4 - 7x^3 + 12x^2 = 0$$

<u>Raízes Racionais</u>:

Um método que permite pesquisar possíveis raízes racionais consiste em investigar se $\frac{p}{q}$ com p e q **inteiros e primos entre si**, é raiz de P(x) **com coeficientes inteiros** sendo $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ com $a_n ; a_0 \neq 0$.

<u>OBS:</u> O resultado **não** garante a existência de raízes racionais de uma equação de coeficientes inteiros. Apenas, **<u>em caso de existência</u>**, são mostradas as possibilidades para as raízes. É somente um método. Nem sempre o mais prático.
VEJA:

TEOREMA DAS POSSÍVEIS RAÍZES RACIONAIS

*Se um número $\frac{p}{q}$, com **p** e **q** primos entre si e $q \neq 0$, é raiz de uma equação algébrica $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ de coeficientes inteiros, então **p** é divisor de a_0 e **q** é divisor de a_n.*

Exemplo: *Determine as raízes da equação $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$.*

divisores do coeficiente dominante

divisores do termo independente de x

Pelo Teorema das possíveis raízes racionais:
- *Divisores de 12: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.*
- *Divisores de 1 : $\{\pm 1\}$.*

quociente ente os divisores ...

As possíveis raízes "x" serão obtidas do quociente $\dfrac{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12}{\pm 1}$, ou seja,

Possíveis raizes racionais — $x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$.

Utilizamos o dispositivo prático de Briot-Ruffini para verificar as possíveis raízes ...

$x_1 \longrightarrow$	-1	1	-2	-7	8	12
$x_2 \longrightarrow$	2	1	-3	-4	12	0
		1	-1	6	0	

é raiz da equação dada

é raiz da equação dada

$$\underbrace{1 \quad -1 \quad 6}_{x^2 - x - 6 = 0}$$

$x_3 = -2 \quad x_4 = 3$

Exemplo: Encontre as raízes de $P(x) = 3x^3 - 20x^2 + 23x + 10$.

Solução. Se **p** é divisor de $a_0 = 10$, então $p = \pm 10$; ± 5; ± 2 e ± 1. Se **q** é divisor de $a_3 = 3$, então $q = \pm 3$; ± 1.

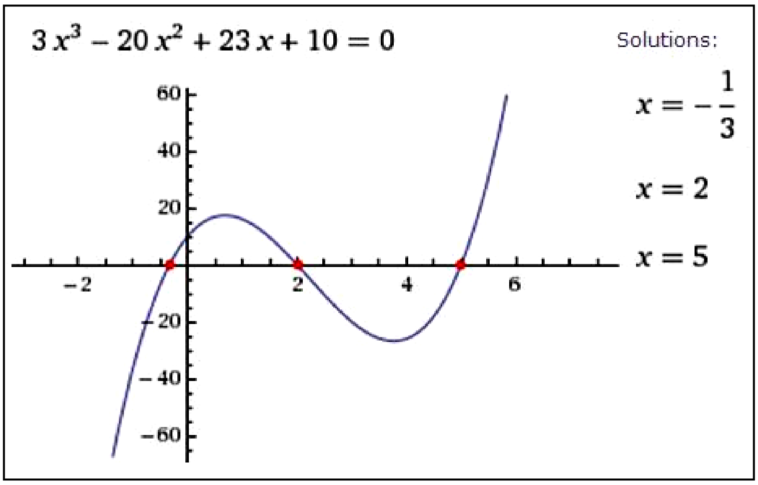
Logo, $\frac{p}{q} = \pm\frac{10}{3}$; $\pm\frac{5}{3}$; $\pm\frac{2}{3}$; $\pm\frac{1}{3}$; ± 10; ± 5; ± 2 e ± 1. É natural começar a testar pelas menores. Para a raiz x = 2, temos:

	3	– 20	23	10
2	3	– 14	– 5	0

Logo, x = 2 é uma das raízes.
Encontrando as raízes de **Q(x)**, temos:

3x² – 14x – 5 = 0 => x = 5 e $x = -\frac{1}{3}$.

Observe o gráfico com as soluções.



EXERCICIOS:

1) Verifique quais são os números do conjunto A = {-2; -1; 0; 1; 2; 3} que são raízes da equação:

$$x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0.$$

2) Resolver a equação $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$, sabendo que duas raízes são opostas.

$S = \{-2, 2, 3\}$

3) Resolver a equação $x^3 - 15x^2 + 66x - 80 = 0$, sabendo que suas raízes estão em progressão aritmética.

$S = \{2, 5, 8\}$

4) Resolver a equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a 3.

$S = \{1, 2, 4\}$

5) Resolva a equação $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$, sabendo que o produto de duas de suas raízes é **-3**.

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$

6) Resolva a equação $2x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 3 = 0$, sabendo que $\frac{1}{2}$ e **3** são raízes. **.**

$S = \left\{-i, i, \frac{1}{2}, 3\right\}$