

13

FLAMBAGEM

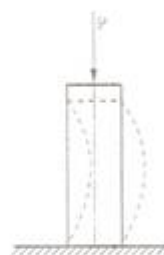


13.1 Introdução

Ao sofrer a ação de uma carga axial de compressão, a peça pode perder a sua estabilidade, sem que o material tenha atingido o seu limite de escoamento. Este colapso ocorrerá sempre na direção do eixo de menor momento de inércia de sua secção transversal.

13.2 Carga Crítica

Denomina-se carga crítica, a carga axial que faz com que a peça venha a perder a sua estabilidade, demonstrada pelo seu encurvamento na direção do eixo longitudinal.



13.2.1 Carga Crítica de Euler

Através do estudo do suíço Leonard Euler (1707-1783), determinou-se a fórmula da carga crítica nas peças carregadas axialmente.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_f^2}$$

Onde: P_{cr} - carga crítica [N; kN; ...]

E - módulo de elasticidade do material [MPa; GPa; ...]

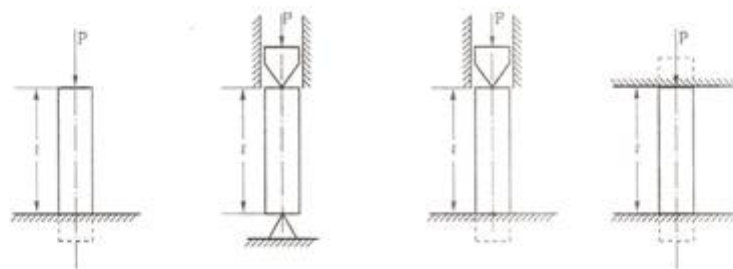
J - momento de inércia da secção transversal [m⁴; cm⁴; ...]

ℓ_f - comprimento livre de flambagem [m; mm; ...]

π - constante trigonométrica 3,1415...

13.3 Comprimento Livre de Flambagem

Em função do tipo de fixação das suas extremidades, a peça apresenta diferentes comprimentos livres de flambagem.



engastada e livre $\ell_f = 2\ell$
 biarticulada $\ell_f = \ell$
 articulada e engastada $\ell_f = 0,7\ell$
 biengastada $\ell_f = 0,5\ell$

13.4 Índice de Esbeltez (λ)

É definido através da relação entre o comprimento de flambagem (ℓ_f) e o raio de giração mínimo da secção transversal da peça.

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}}$$

Onde: λ - índice de esbeltez [adimensional]
 ℓ_f - comprimento de flambagem [m; mm; ...]
 $i_{\min}$ - raio de giração mínimo [m; ...]

13.5 Tensão Crítica (σ_{cr})

A tensão crítica deverá ser menor ou igual à tensão de proporcionalidade do material. Desta forma, observa-se que o material deverá estar sempre na região de formação elástica, pois o limite de proporcionalidade constituiu-se no limite máximo para validade da lei de Hooke.

Define-se a tensão crítica através da relação entre a carga crítica e a área da secção transversal da peça.

Tem-se, então, que:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_f^2 \cdot A}$$

como $\ell_f^2 = \lambda^2 \cdot i_{\min}^2$ escreve-se que

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{A \cdot \lambda^2 \cdot i_{\min}^2} \text{ mas, } i_{\min}^2 = \frac{J}{A}$$

portanto :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E I_x}{\lambda_x^2 \lambda^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

onde: σ_{cr} - tensão crítica [MPa; ...]

E - módulo de elasticidade do material [MPa; GPa; ...]

λ - índice de esbeltez [adimensional]

π - constante trigonométrica 3,1415.....

13.6 Flambagem nas Barras no Campo das Deformações Elasto-Plásticas

Quando a tensão de flambagem ultrapassa a tensão de proporcionalidade do material, a fórmula de Euler perde a sua validade.

Para estes casos, utiliza-se o estudo Tetmajer que indica:

Material	Índice de Esbeltez (λ)	$\sigma_{f,l}$ (Tetmajer) [MPa]
Fofo Cinzento	$\lambda < 80$	$\sigma_{f,l} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2$
Aço duro	$\lambda < 89$	$\sigma_{f,l} = 335 - 0,62\lambda$
Aço Níquel até 5%	$\lambda < 86$	$\sigma_{f,l} = 470 - 2,3\lambda$
Madeira pinho	$\lambda < 100$	$\sigma_{f,l} = 29,3 - 0,194\lambda$

13.7 Normas

ABNT NB14 (aço)

$$\sigma_{fl} = 240 - 0,0046\lambda^2 \quad \text{para} \quad \lambda \leq 105$$

$$\sigma_{fl} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad \text{para} \quad \lambda > 105$$

Adotando-se um coeficiente de segurança $k = 2$, tem-se $\bar{\sigma}_{fl}$ (tensão admissível de flambagem).

$$\bar{\sigma}_{fl} = 120 - 0,0023\lambda^2 \quad \text{para} \quad \lambda \leq 105$$

$$\bar{\sigma}_{fl} = \frac{1,036,300}{\lambda^2} \quad \text{para} \quad \lambda > 105$$

ABNT - NB11 (madeira)

Tensão admissível na madeira.

Compressão axial de peças curtas.

$$\lambda \leq 40$$

$$\sigma_{f_c} = 0,20\sigma_c$$

Compressão axial de peças esbeltas

$$\lambda > 40$$

$$40 < \lambda \leq \lambda_0$$

$$\bar{\sigma}_{f_c} = \bar{\sigma}_c \left[1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\lambda - 40}{\lambda_0 - 40} \right]$$

$$\lambda \geq \lambda_0$$

$$\bar{\sigma}_{f_c} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E_m}{\lambda^2} = \frac{2}{3} \bar{\sigma}_c \left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E_m}{\left(\frac{8}{3}\right) \bar{\sigma}_c}}$$

onde: λ_0 - índice de esbeltez acima do qual é aplicável a fórmula de Euler [adimensional]

E_m - módulo de elasticidade da madeira verde [Pa; ...]

Concreto NB1

Taxa mecânica da armadura

$$W = \frac{100}{(150 - \lambda)} \quad \lambda \leq 100$$

$$W = \frac{2\lambda^3}{10^6} \quad \lambda > 100$$

Tensão de flambagem

$$\sigma_f = \frac{W \cdot P}{A}$$

onde:

λ - índice de esbeltez

P - carga aplicada [N; ...]

A - área da secção transversal [m²; ...]

W - taxa mecânica de armadura [adimensional]

13.8 Exercícios

Ex. 1 - Determinar λ para o aço de baixo carbono, visando ao domínio da fórmula de Euler.

$$\sigma_p = 190 \text{ MPa} \quad E_{\text{aço}} = 210 \text{ GPa}$$

Solução:

Para determinar o domínio, a tensão de proporcionalidade torna-se a tensão crítica.

Tem-se, então, que:

$$\sigma_p = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{190 \times 10^6}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 21 \times 10^4}{190}}$$

$$\lambda = 10^2 \sqrt{\frac{\pi^2 \times 21}{190}} \quad \lambda \cong 105$$

Concluiu-se que: para aço de baixo carbono, a fórmula de Euler é válida para $\lambda > 105$.

Ex. 2 - Determinar o índice de esbeltez (λ), visando ao domínio da equação de Euler para os seguintes materiais:

a) Fofo

$$\sigma_p = 150 \text{ MPa}$$

$$E_{\text{fofo}} = 100 \text{ GPa}$$

b) Duralumínio

$$\sigma_p = 200 \text{ MPa}$$

$$E = 70 \text{ GPa}$$

c) Pinho

$$\sigma_p = 10 \text{ MPa}$$

$$E = 10 \text{ GPa}$$

Solução:

a) Ferro fundido (Fofo)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 10^9}{150 \times 10^6}} \quad \lambda \cong 80$$

Utiliza-se a fórmula de Euler para Fofo, quando o índice de esbeltez $\lambda > 80$.

b) Duralumínio

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 70 \times 10^9}{200 \times 10^6}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 7 \times 10^9}{200 \times 10^6}} = 10^2 \sqrt{\frac{\pi^2 \times 7}{200}}$$

$$\lambda \approx 59$$

Utiliza-se a fórmula de Euler para o duralumínio, quando o índice de esbeltez $\lambda > 59$.

c) Pinho

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_p}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \times 10^{10}}{10^7}}$$

$$\lambda = 10\pi \sqrt{10} \quad \lambda \approx 100$$

Utiliza-se a fórmula de Euler para o pinho, quando o índice de esbeltez $\lambda > 100$.

Ex. 3 - A figura dada representa uma barra de aço ABNT 1020 que possui $d = 50\text{mm}$.

Determinar o comprimento mínimo, para que possa ser aplicada a equação de Euler.

Solução:

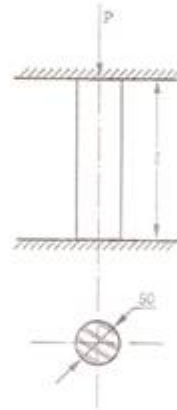
Para que possa ser aplicada a equação de Euler, $\lambda > 105$ (aço doce). Tem-se, então, que:

$$\lambda = \frac{\ell_r}{i_{\min}} = \frac{0,5\ell \times 4}{d}$$

Como a peça está duplamente engastada $\ell_r = 0,5 \ell$ e $i_{\min} = \frac{d}{4}$, conclui-se, então, que:

$$\ell = \frac{\lambda \times d}{2} = \frac{105 \times 50}{2}$$

$$\ell = 2625\text{mm}$$



Ex. 4 - Duas barras de mesmo comprimento e material serão submetidas à ação de uma carga axial P de compressão. Uma das barras possui seção transversal circular com diâmetro a , e a outra possui seção transversal quadrada de lado a . Verificar qual das barras é a mais resistente, sob o regime de Euler.

As barras possuem o mesmo tipo de fixação nas extremidades.

Solução:

Como as cargas são de mesma intensidade (P), escreve-se que:

$$P_{I1} = P_{I2} = P$$

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_0}{\ell_1^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\square}}{\ell_1^2}$$

Através da relação entre os momentos de inércia, tem-se que:

$$\frac{J_0}{J_{\square}} = \frac{\pi a^4}{\frac{\pi a^4 \times 12}{64}} \quad J_0 = 0,58 J_{\square} \quad \rightarrow \quad J_{\square} = \frac{1}{0,58} J_0$$

$$\text{portanto: } J_{\square} = 1,7 J_0$$

Conclusão: A barra de secção transversal quadrada é a mais resistente.

Ex. 5 - Uma barra biarticulada de material ABNT 1020, possui comprimento $\ell = 1,2\text{m}$ e diâmetro $d = 34\text{mm}$.

Determinar a carga axial de compressão máxima que poderá ser aplicada na barra, admitindo-se um coeficiente de segurança $k = 2$. $E_{\text{aço}} = 210\text{GPa}$

Solução:

A barra sendo biarticulada, o seu comprimento de flambagem é o comprimento da própria barra.

$$\ell_1 = \ell = 1,2\text{m}$$

a) Índice de Esbeltez

O raio de giração da secção transversal circular é $\frac{d}{4}$, portanto, tem-se:

$$\lambda = \frac{4\ell_1}{d} = \frac{4 \times 1200}{34} \quad \lambda = 141$$

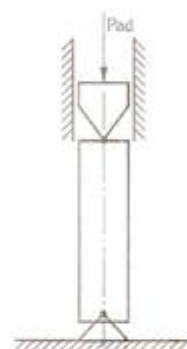
Como $\lambda = 141$, portanto maior que 105, conclui-se que a barra encontra-se no domínio da equação de Euler.

b) Carga Crítica

O momento de inércia de secção circular é

$$J_s = \frac{\pi d^4}{64}$$

portanto:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot \pi d^4}{1,2^2 \times 64}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times \pi (34 \times 10^{-3})^4}{1,2^2 \times 64}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^3 \times 210 \times 10^9 \times 34^4 \times 10^{-12}}{1,2^2 \times 64}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^3 \times 210 \times 34^4 \times 10^{-3}}{1,2^2 \times 64} \quad \boxed{P_{cr} = 94400N}$$

Como o coeficiente de segurança é $k = 2$, a carga máxima que se admite que seja aplicada na barra é:

$$P_{ad} = \frac{P_{cr}}{K} = \frac{94400N}{2} = 47200N \quad \boxed{P_{ad} = 47200N}$$

Ex. 6 - Qual a tensão de flambagem atuante na barra do exercício anterior?

Solução:

A tensão de flambagem atuante na barra do exercício anterior obtém-se através da relação entre a tensão crítica e o coeficiente de segurança (σ_{cr}/k), portanto, como

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

conclui-se que:

$$\sigma_{flutuante} = \frac{\pi^2 \cdot E}{2\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9}{2 \times 141^2} \quad \boxed{\sigma_{flutuante} \cong 52MPa}$$

Ex. 7 - Uma biela, de material ABNT 1025, possui secção circular, encontra-se articulada nas extremidades, e submetida à carga axial de compressão de 20kN, sendo o seu comprimento $l = 0,8m$. Determinar o diâmetro da biela, admitindo-se coeficiente de segurança $k = 4$.

$E_{aço} = 210GPa$

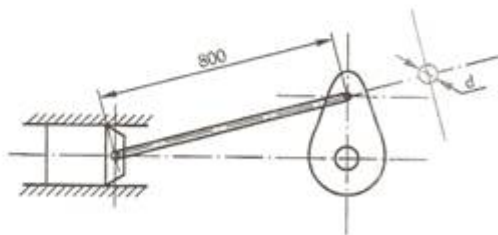
Solução:

Como o coeficiente de segurança indicado para o caso é $k = 4$, a carga crítica para o dimensionamento será:

$$P_{cr} = 4 \times 20 = 80kN$$

O momento de inércia na secção circular é

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}$$



Supondo-se que a biela esteja sob o domínio da equação de Euler, tem-se que:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_f^2} = \frac{\pi^2 E \pi d^4}{64 \ell_f^2}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 P_{cr} \cdot \ell_f^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 80000 \times 0,8^2}{\pi^3 \times 210 \times 10^9}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 0,8^3}{\pi^3 \times 210 \times 10^3}}$$

$$d = 10^{-1} \sqrt[4]{\frac{64 \times 0,8^3}{\pi^3 \times 210}} = 0,027 \text{ m} = 27 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \boxed{d = 27 \text{ mm}}$$

Índice de Esbeltez

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}} = \frac{4 \ell_f}{d} = \frac{4 \times 800}{27} \quad \boxed{\lambda = 118}$$

Como $\lambda > 105$, conclui-se que realmente a barra encontra-se sob o domínio da equação de Euler, e o coeficiente de segurança da biela é $k = 4$, portanto $d = 27 \text{ mm}$.

Ex. 8 - Uma barra de aço ABNT 1020 possui seção transversal circular e encontra-se articulada nas extremidades, devendo ser submetida a uma carga axial de compressão de 200kN; o seu comprimento é de 1,2m. Determinar o seu diâmetro. Considere fator de segurança $k = 8$. $E_{\text{aço}} = 210 \text{ GPa}$.

Solução:

A carga crítica na barra será:

$$P_{cr} = 8 P_{ad} = 8 \times 200000 = 1600000 \text{ N}$$

$$P_{cr} = 1,6 \text{ MN}$$

Como a barra atuará articulada nas extremidades

$$\ell_f = \ell = 1,2 \text{ m}$$

Aplicando-se a fórmula da carga crítica de Euler, tem-se que:

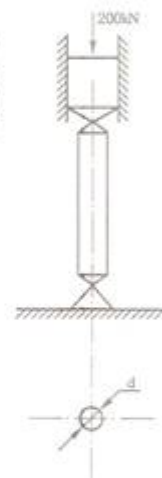
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{\ell_f^2}$$

O momento de inércia da seção transversal circular é $J = \frac{\pi d^4}{64}$

$$\text{portanto } P_{cr} = \frac{\pi^2 E \pi d^4}{\ell_f^2 \cdot 64}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 P_{cr} \cdot \ell_f^2}{\pi^3 E}} = \sqrt[4]{\frac{64 \times 1,6 \times 10^6 \times 1,2^2}{\pi^3 \times 210 \times 10^9}}$$

$$d = 10^{-1} \sqrt[4]{\frac{64 \times 1,6 \times 1,2^2}{\pi^3 \times 21}} \quad \boxed{d \cong 69 \text{ mm}}$$



Índice de Esbeltez

$$\lambda = \frac{\ell_f}{i_{\min}}$$

Para a secção transversal circular $i = \frac{d}{4}$, portanto:

$$\lambda = \frac{4\ell_f}{d} = \frac{4 \times 1200}{69} \quad \lambda \approx 70$$

como $\lambda < 105$, conclui-se que a barra está fora do domínio da fórmula de Euler, devendo ser dimensionada segundo Tetmajer.

Por Tetmajer, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sigma_{tf} &= 240 - 0,0046 \lambda^2 & \lambda^2 &= 240 - 0,0046 \times 70^2 \\ \sigma_{tf} &= 240 - 22,5 & \sigma_{tf} &= 217 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Como o coeficiente de segurança indicado é $k = 8$, a tensão admissível será:

$$\bar{\sigma}_{tf} = \frac{\sigma_{tf}}{k} = \frac{217}{8} \quad \boxed{\bar{\sigma}_{tf} \approx 27 \text{ MPa}}$$

O diâmetro da barra será obtido através da relação

$$\sigma_{tf} = \frac{P_{ad}}{A} = \frac{4P_{ad}}{\pi d^2}$$

$$d = \sqrt{\frac{4P_{ad}}{\pi \sigma_{tf}}} = \sqrt{\frac{4 \times 200000}{\pi \times 27 \times 10^6}}$$

$$d = 10^{-3} \sqrt{\frac{4 \times 200000}{\pi \times 27}} = 97 \times 10^{-3} \text{ m} \quad \boxed{d = 97 \text{ mm}}$$

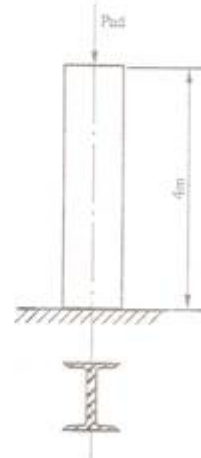
Ex. 9 - A viga I de tamanho nominal 76,2 x 60,3 [mm] possui comprimento igual a 4m e as suas características geométricas básicas são: $J_x = 105 \text{ cm}^4$, $J_y = 19 \text{ cm}^4$, $i_x = 3,12 \text{ cm}$, $i_y = 1,33 \text{ cm}$, $A = 10,8 \text{ cm}^2$, $W_x = 27,6 \text{ cm}^3$, $W_y = 6,4 \text{ cm}^3$.

A viga encontra-se engastada e livre.

Determinar a carga de compressão máxima, que poder-se-á aplicar na viga. Admitir coeficiente de segurança $k = 4$. O material da viga é aço, fabricada segundo classe BR 18 ABNT - EB - 583. $E_{aço} = 210 \text{ GPa}$.

Solução:

Como a viga encontra-se engastada e livre, o seu comprimento de flambagem é $\ell_f = 2\ell = 2 \times 4 = 8 \text{ m}$.



a) Índice de Esbeltez

A viga sempre flambará na direção do eixo de menor momento de inércia, que para o caso é o eixo y, portanto o raio de giração a ser utilizado é o $i_y = 1,33\text{cm}$.

$$\lambda = \frac{\ell_t}{i_{\min}} = \frac{800}{1,33} \approx 602$$

$\lambda \approx 602$, portanto $\lambda > 105$; a viga encontra-se sob o domínio da equação de Euler.

b) Carga Crítica

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{\ell_t^2}$$

O momento de inércia mínimo da seção transversal é $J_y = 19\text{cm}^4$ ou $J_y = 19 \times 10^{-8}\text{m}^4$.

Tem-se, então:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 19 \times 10^{-8}}{8^2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \times 210 \times 10^9 \times 190 \times 10^{-9}}{8^2}$$

$$P_{cr} = 6150\text{N}$$

c) Carga Admissível

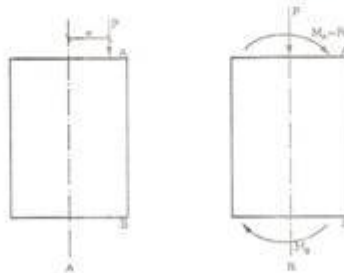
O coeficiente de segurança da construção é $k = 4$, portanto a carga admissível na viga será:

$$P_{ad} = \frac{P_{cr}}{k} = \frac{6150}{4}$$

$$P_{ad} = 1537,5\text{N}$$

13.9 Carga Excêntrica

Suponha-se o caso de uma carga P aplicada fora do eixo geométrico da peça. A distância entre o ponto de aplicação da carga e o eixo geométrico é denominada e .



A figura B detalha o que acontece na figura A.

O afastamento da carga em relação ao eixo geométrico dá origem a um momento de intensidade $M = P \times e$.

Para estes casos, a tensão normal máxima é determinada através da soma das tensões normais, originadas pela carga axial P e pelo momento fletor M_A .

Tem-se, portanto:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} \cdot c}{J}$$

Onde: $\sigma_{\max}$ - tensão máxima atuante [Pa]

P - carga axial aplicada [N]

A - Área de secção transversal [m²]

$M_{\max}$ - Momento fletor M_A (máximo) [Nm]

c - distância máxima entre LN e a fibra mais afastada da secção [m]

J - momento de inércia da secção transversal [m⁴]

13.10 Exemplo

A carga axial de compressão de intensidade 30kN é aplicada na barra quadrada de aço, que possui comprimento igual a 3m e secção transversal de lado igual a 100mm.

A carga está aplicada a 10mm do eixo geométrico conforme mostra a figura a seguir.

Determinar a tensão normal máxima atuante na barra.

Solução:

Como a carga é excêntrica, a tensão normal total é obtida através da tensão normal originada pela carga, somada à tensão normal originada pelo momento.

Tem-se, então, que:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} \cdot c}{J_Q}$$

O momento de inércia da secção quadrada é $J_Q = \frac{a^4}{12}$, portanto,

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{12M_{\max} \cdot c}{a^4} = \frac{30000}{10^{-2}} + \frac{12 \times 300 \times 50 \times 10^{-3}}{(100 \times 10^{-3})^4}$$

$$\sigma_{\max} = 3 \times 10^6 + \frac{12 \times 300 \times 50 \times 10^{-3}}{10^8 \times 10^{-12}}$$

$$\sigma_{\max} = 3 \times 10^6 + 12 \times 300 \times 500 = 3 \times 10^6 + 1,8 \times 10^6$$

$$\sigma_{\max} = 4,8 \text{ MPa}$$

