

MÁRIO DE NORONHA NETO

**TÉCNICAS PARA O PROJETO DE CÓDIGOS
ESPÁCIO-TEMPORAIS EM TRELIÇA SOBRE
CORPOS E ANÉIS FINITOS**

FLORIANÓPOLIS

2006

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA**

**TÉCNICAS PARA O PROJETO DE CÓDIGOS
ESPÁCIO-TEMPORAIS EM TRELIÇA SOBRE
CORPOS E ANÉIS FINITOS**

Tese submetida à
Universidade Federal de Santa Catarina
como parte dos requisitos para a obtenção do
grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

MÁRIO DE NORONHA NETO

Florianópolis, Agosto de 2006

TÉCNICAS PARA O PROJETO DE CÓDIGOS ESPÁCIO-TEMPORAIS EM TRELIÇA SOBRE CORPOS E ANÉIS FINITOS

Mário de Noronha Neto

“Esta Tese foi julgada adequada para obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Comunicação e Processamento de Sinais, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina”

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.
Orientador

Prof. Nelson Sadowski, Ph.D.
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:

Prof. Bartolomeu Ferreira Uchôa Filho, Ph.D.
Presidente

Prof. Carlos Aurélio Faria da Rocha, D.Sc.

Prof. Cecílio José Lins Pimentel, Ph.D.

Prof. Renato Baldini Filho, Ph.D.

Prof. Celso Melchiades Doria, Ph.D.

Agradecimentos

À Deus, por estar sempre ao meu lado;

Ao meu grande amor Najara, por todos os momentos que passamos juntos e por compartilhar sonhos que futuramente pretendemos realizar;

Aos meus pais Lasaro e Maria Helena, pelo amor, incentivo e participação em todos os momentos importantes de minha vida;

Às minhas irmãs Carla e Kelen, pelo constante apoio;

Ao amigo Bartolomeu, pela orientação, seriedade e compreensão durante todo o período que trabalhamos juntos;

Ao amigo Richard, pelo incentivo e amizade;

Aos professores da banca, pelas contribuições;

E a todos que de alguma maneira contribuiram para este trabalho.

Resumo da Tese apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

TÉCNICAS PARA O PROJETO DE CÓDIGOS ESPÁCIO-TEMPORAIS EM TRELIÇA SOBRE CORPOS E ANÉIS FINITOS

Mário de Noronha Neto

Agosto/2006

Orientador: Bartolomeu F. Uchôa Filho, Ph.D.

Área de Concentração: Comunicações e Processamento de Sinais

Palavras-chaves: Códigos em treliça sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} , múltiplas antenas transmissoras, diversidade, canais com desvanecimento, códigos espácia-temporais.

Número de páginas: 101

Esta tese tem como objetivo projetar bons códigos espácia-temporais em treliça (STTCs) sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} , onde $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} representam corpos e anéis finitos, respectivamente, sendo p um número primo e k um inteiro positivo, para sistemas de comunicação sem fio com um número arbitrário de antenas transmissoras e que utilizam modulações do tipo p^k -PSK. Os códigos são projetados para o canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, segundo os critérios do Posto, do Determinante e do Traço. Para tornar a busca por tais códigos sistemática e computacionalmente viável, uma estrutura de codificador convolucional espácia-temporal sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} é inicialmente proposta. Em seguida, três conjecturas e três teoremas, válidos para qualquer número de antenas transmissoras e modulações do tipo p^k -PSK, são apresentados para simplificar a busca computacional. Em consequência, uma grande variedade de STTCs para as modulações 3-PSK, 4-PSK, 5-PSK, 7-PSK, 8-PSK, 9-PSK, 11-PSK, 13-PSK, 16-PSK e 17-PSK, e para duas, três e quatro antenas transmissoras, atingindo eficiências espectrais de 1,58; 2; 2,23; 2,81; 3; 3,17; 3,46; 3,7; 4 e 4,08 b/s/Hz, respectivamente, é apresentada. Alguns novos STTCs são comparados com STTCs existentes na literatura.

Abstract of Thesis presented to UFSC in partial fulfillment of the requirements for
the degree of Doctor in Electrical Engineering

DESIGN TECHNIQUES OF SPACE-TIME TRELLIS CODES OVER FINITE FIELDS AND RINGS

Mário de Noronha Neto

August/2006

Advisor: Bartolomeu F. Uchôa Filho, Ph.D.

Area of Concentration: Communications and Signal Processing

Keywords: Trellis codes over $\text{GF}(p)$ and \mathbb{Z}_{p^k} , multiple transmit antennas, diversity, fading channels, space-time codes.

Number of pages: 101

The goal of this thesis is to design good space-time trellis codes (STTCs) over $\text{GF}(p)$ and \mathbb{Z}_{p^k} , where $\text{GF}(p)$ and \mathbb{Z}_{p^k} means finite fields and rings, respectively, p is a prime number and k is a positive integer, for wireless communications systems with an arbitrary number of transmit antennas and p^k -PSK modulations. The codes are designed for the quasi-static flat Rayleigh fading channels, according to the rank, determinant, and trace criteria. In order to make the search for such codes systematic and computationally feasible, a structure of space-time convolutional encoder over $\text{GF}(p)$ and \mathbb{Z}_{p^k} is first proposed. Then, three conjectures and three theorems, valid for any number of transmit antennas and p^k -PSK modulations, are presented towards the simplification of the computer search. As a consequence, a wide variety of STTCs for the 3-PSK, 4-PSK, 5-PSK, 7-PSK, 8-PSK, 9-PSK, 11-PSK, 13-PSK, 16-PSK and 17-PSK modulations, and for two, three, and four transmit antennas, achieving spectral efficiencies of 1.58; 2; 2.23; 2.81; 3; 3.17; 3.46; 3.7; 4, and 4.08 b/s/Hz, respectively, is presented. Some new STTCs are compared to STTCs existing in the literature.

Sumário

Sumário	vii
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Objetivos	4
1.2 Contribuições	4
1.3 Organização	5
2 Códigos Espaço-Temporais em Treliça	6
2.1 Modelo do Sistema	7
2.2 Análise de Desempenho dos STTCs em Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático	8
2.2.1 Probabilidade de Erro com Relação ao Par para Pequenos Valores de rm	12
2.2.2 Probabilidade de Erro com Relação ao Par para Valores Grandes de rm	13
2.3 Projeto dos STTCs para Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático	14

3 Técnicas para o Projeto de STTCs sobre Corpos e Anéis Finitos	18
3.1 O Critério do Posto p -ário: Conjectura 1	19
3.2 O Codificador Convolucional sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k}	20
3.3 Técnicas para o Projeto de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} com Diversidade Completa	23
3.3.1 Técnica para o Projeto de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ com Diversidade Completa: Conjectura 2	23
3.3.2 Técnica para o Projeto de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} com Diversidade Completa: Conjectura 3	25
3.4 Outras Técnicas para se Projetar STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k}	27
3.4.1 Teorema 1	27
3.4.2 Teorema 2	29
3.4.3 Teorema 3	30
4 Resultados: Aplicações das Técnicas Propostas	32
4.1 Simplificação da Busca de STTCs	32
4.1.1 Estrutura Padrão	33
4.1.2 Estrutura Utilizada	35
4.1.3 Técnicas Propostas	35
4.2 Resultados das Buscas de Códigos	38
4.2.1 STTCs para Modulações p^k -PSK Projetados pelo Critério do Posto e do Determinante	38
4.2.2 STTCs para Modulações p^k -PSK Projetados pelo Critério do Traço	42
4.3 Resultados de Simulações	50
5 Conclusão e Trabalhos Futuros	68
A Álgebra Aplicada à Teoria da Codificação	71

A.1 Operadores Binários	71
A.2 Grupos	72
A.3 Corpos e Anéis	74
B Prova da Conjectura 1 para o caso de 2 Antenas Transmissoras	76
C Propriedade Rumo à Prova da Conjectura 1: Caso Geral	82
Referências Bibliográficas	86

Listas de Figuras

2.1	Modelo do sistema espaço-temporal.	8
2.2	Constelações 4-PSK (a) e 8-PSK (b).	14
2.3	Código espaço-temporal em treliça, 4-PSK, 2 bits/s/Hz.	15
2.4	Código espaço-temporal em treliça, 8-PSK, 3 bits/s/Hz.	16
2.5	Par de seqüências.	17
3.1	Codificador convolucional genérico de taxa $R = 1/n$	21
3.2	Codificador convolucional de taxa $R = 1/3$ e memória $K = 2$	22
3.3	Codificador convolucional de taxa $R = 1/3$ e memória $K = 3$	22
3.4	Codificador convolucional sobre $\text{GF}(7)$, $R = 1/2$	25
3.5	Codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_8 , $R = 1/2$	26
4.1	Exemplo da estrutura de codificação padrão de taxa $R = 1/2$ e 4 estados	34
4.2	Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	50
4.3	Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	51
4.4	Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	51

4.5 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	52
4.6 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	52
4.7 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.	53
4.8 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	54
4.9 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	55
4.10 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	55
4.11 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	56
4.12 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	56
4.13 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	57

4.14 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	57
4.15 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	58
4.16 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	58
4.17 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	59
4.18 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	59
4.19 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	60
4.20 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	60
4.21 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	61
4.22 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.	61

4.23 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.	63
4.24 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.	64
4.25 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.	64
4.26 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 2, 3$ antenas transmissoras e $m = 1$ antena receptora.	65
4.27 Comparação do desempenho de STTCs com modulações 3, 5, 7 e 11-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.	65
4.28 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 9, 11, 13, 16 e 17-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ antena receptora.	66
4.29 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 9, 11, 13, 16 e 17-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ antenas receptoras.	66
4.30 Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK projetados por diferentes critérios.	67
B.1 Módulos de b	77
B.2 Conjunto de símbolos de diferenças complexas das constelações (a) 5-PSK e (b) 7-PSK . Os pontos das diferenças complexas $\exp(j(2\pi/p)v) - \exp(j(2\pi/p)w)$ estão rotulados (internamente) por $(v - w)$, e (externamente) por d , onde $d \equiv v - w \pmod{p}$	78

Lista de Tabelas

3.1	Exemplos de STTCs Equivalentes - Teorema 1	28
3.2	Exemplos de STTCs Equivalentes - Teorema 2	30
3.3	Exemplos de STTCs com Traços Iguais - Teorema 3	31
4.1	Comparação das Estruturas para Buscas Exaustivas	35
4.2	Busca exaustiva para STTCs com modulações p -PSK	36
4.3	Busca exaustiva para STTCs com modulações p^k -PSK	37
4.4	STTCs para a modulação 3-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	39
4.5	STTCs para a modulação 4-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	39
4.6	STTCs para a modulação 5-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	40
4.7	STTCs para a modulação 7-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	40
4.8	STTCs para a modulação 8-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	40
4.9	STTCs para a modulação 9-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	41
4.10	STTCs para a modulação 11-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante	41

4.11 STTCs para a modulação 13, 16 e 17-PSK com $n = 2$ antenas transmis-	
soras baseados nos critérios do posto e do determinante	41
4.12 STTCs para a modulação 3-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	43
4.13 STTCs para a modulação 4-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	43
4.14 STTCs para a modulação 5-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	44
4.15 STTCs para a modulação 7-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	44
4.16 STTCs para a modulação 8-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	45
4.17 STTCs para a modulação 9-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	45
4.18 STTCs para a modulação 11-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	45
4.19 STTCs para a modulação 13-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	46
4.20 STTCs para a modulação 16-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	46
4.21 STTCs para a modulação 17-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras	
baseados no critério do traço	46
4.22 Comparação entre STTCs - Critérios do posto e do determinante . . .	47
4.23 Comparação entre STTCs - Critério do traço	49
A.1 Adição módulo-3	73
A.2 Multiplicação módulo-5	74

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas de comunicação de dados atuais operam com taxas de transmissão cada vez mais elevadas. Um grande desafio tem sido projetar esquemas codificados que suportem estas taxas respeitando algumas limitações práticas como faixa de freqüências, potência de transmissão e confiabilidade no enlace. Este desafio se torna ainda maior quando a transmissão dos sinais é feita por ondas de rádio, pois as adversidades encontradas neste tipo de canal, tais como o desvanecimento por multipercursos e o efeito Doppler, dificultam sobremaneira a comunicação neste meio. Técnicas de diversidade, que permitem ao receptor enxergar o sinal transmitido sob condições de canais diferentes, tornam mais confiável a transmissão de dados a altas taxas em sistemas sem fio. Em particular, a diversidade espacial (múltiplas antenas) vem sendo muito utilizada pois fornece ganhos sem induzir perdas na eficiência do espectro. Adicionalmente, a capacidade de canal de sistemas com múltiplas antenas tem um aumento significativo [1], [2] e [3].

Motivados por este resultado, Tarokh *et al.* [4] propuseram os chamados Códigos Espaço-Temporais (STCs, do inglês: *Space-Time Codes*). Os STCs atingem uma alta taxa de transmissão e um excelente desempenho, codificando os sinais a serem transmitidos tanto no domínio do tempo quanto no do espaço. Alguns tipos de STCs são: os códigos espaço-temporais em treliça [4] (STTCs, do inglês: *Space-Time Trellis Codes*), os códigos espaço-temporais em bloco [5],[6] (STBCs, do inglês: *Space-Time Block Codes*) e os '*Layered Space-Time (LST) codes*' [7]. Na literatura atual podem-se en-

contrar várias referências sobre STCs, nas versões turbo, diferencial e/ou combinadas com a modulação OFDM (OFDM, do inglês: *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) [8], [9], [10], [11]. Uma outra variação de STCs é a combinação do STBC com uma treliça, resultando nos códigos Espaço-Temporais em Treliça super-ortogonais (SOSTTCs, do inglês: *Super Orthogonal STTC*) [12]. Neste trabalho serão abordados apenas os STTCs. Os STTCs são uma classe de códigos em treliça para sistemas de comunicações sem fio que utilizam múltiplas antenas transmissoras e, opcionalmente, múltiplas antenas receptoras. Em [4], critérios de projeto foram propostos para se construir STTCs para canais com desvanecimento.

Segundo [4], para o canal com desvanecimento Rayleigh plano e quase-estático, e com o conhecimento perfeito do canal no receptor, a probabilidade de erro mínima com relação ao par (do inglês: *pairwise error probability*) é obtida quando os STTCs são projetados de acordo com dois critérios, a saber, o critério do *Posto* e o do *Determinante*, os quais serão detalhados mais adiante. O primeiro critério está relacionado com o ganho de diversidade, que representa a inclinação da curva da probabilidade de erro versus relação sinal-ruído, enquanto o segundo está relacionado com o ganho de codificação, e determina o deslocamento horizontal da mesma curva. Para um canal com desvanecimento plano, com n antenas transmissoras e m antenas receptoras, o ganho de diversidade máximo (máxima inclinação da curva de probabilidade de erro) é dado por mn . Trabalhos subsequentes [13], [14], [15], [16] mostraram que o projeto de STTCs para canais com desvanecimento Rayleigh plano e quase-estático não devem estar restritos apenas aos critérios anteriormente citados, mas incluir também um novo critério, chamado de critério do *Traço*, o qual é baseado na distância Euclidiana quadrática (DE^2). Estes trabalhos mostraram também que a escolha do critério de projeto é dependente da ordem de diversidade do sistema, sendo os critérios do posto e do determinante a melhor opção para sistemas com ordem de diversidade menor que quatro, e o critério baseado na DE^2 o mais adequado para sistemas com ordem de diversidade maior ou igual a quatro. Outros critérios para o projeto de STTCs, levando-se em consideração a relação sinal-ruído, foram propostos em [17].

A principal dificuldade para a obtenção de STTCs com bom desempenho é que, como veremos, além dos critérios mencionados acima se aplicarem ao corpo complexo de

sinais de modulações em banda básica, o número de possibilidades de códigos encontrados em uma treliça é muito elevado. Os primeiros trabalhos relacionados à simplificação da busca por STTCs levaram em conta apenas os critérios do posto e do determinante, e visavam obter códigos com diversidade completa. A primeira técnica para simplificar a busca de STTCs foi proposta por Tarokh *et al.* em [4], onde foram apresentadas duas regras simples para garantir diversidade completa de STTCs com duas antenas transmissoras. Grimm *et al.* [18], através do conceito de “simetria de zeros,” generalizaram as regras de Tarokh possibilitando o projeto de STTCs com diversidade completa para mais de duas antenas transmissoras. Em [19], Baro *et al.* sistematizaram a busca por STTCs para obterem códigos com ganho de codificação máximo em sistemas com duas antenas transmissoras e modulação 4-PSK. Em [20], [21], Hammons e El Gamal desenvolveram critérios de posto binário, em substituição ao critério do posto baseado nos complexos, que são mais simples e garantem que os STTCs associados atinjam diversidade completa para as modulações BPSK e 4-PSK. Eles também mostraram que o STTC que decorre de um código convolucional C de taxa $R = 1/n$ satisfaz o critério do posto binário se, e somente se, a matriz função de transferência de C , como uma matriz de coeficientes sobre o corpo binário, possuir posto completo n . Em [22], foi desenvolvida uma teoria para garantir diversidade completa para STTCs utilizando constelações $2^{2,k}$ -QAM, onde k é um inteiro positivo. Esta teoria inclui, como um caso particular, o critério do posto binário proposto em [20] para modulações BPSK. Em [23], [24] Blum considerou códigos convolucionais binários que servem como STTCs. Condições suficientes e necessárias foram apresentadas para que STTCs tivessem ganho de diversidade completo. Além disso, Blum desenvolveu métodos para calcular um limitante para o ganho de codificação. Em [25], Noronha-Neto *et al.* introduziram um procedimento alternativo para se obter STTCs com diversidade completa sobre o corpo de Galois, GF(p), (do inglês: *Galois Field*) onde p é um número primo, utilizando duas antenas na transmissão. Em [25], os símbolos de informação, os coeficientes do codificador convolucional e os símbolos de saída do codificador são todos elementos de GF(p), levando a uma eficiência espectral de $\log_2(p)$ b/s/Hz. Em [26], a estrutura do codificador apresentada em [25] foi utilizada para realizar uma busca exaustiva por STTCs sobre GF(p) com ganho de codificação máximo. Em [27] foi realizada uma comparação do desempenho de STTCs com modulações BPSK, 3-PSK e 4-PSK, onde

o código com modulação 3-PSK apresentou algumas vantagens em relação à modulação 4-PSK. Já em [28], os mesmos autores de [26] realizaram uma busca exaustiva em uma estrutura de um codificador convolucional de taxa $R = 1/2$, linear sobre o anel \mathbb{Z}_{16} e com 16 estados, para obter STTCs com ganho de codificação máximo utilizando a modulação 16-PSK. Outro trabalho interessante é a referência [29], onde os autores apresentam dois métodos ótimos para a busca de STTCs com modulações 4-PSK, 4-QAM, 8-PSK e 16-QAM, utilizando uma estrutura com entradas binárias e símbolos de saídas M -ários, onde $M = 4, 8$ e 16 .

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo simplificar a busca por STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} , onde p é primo e k um inteiro positivo, em sistemas com um número arbitrário de antenas transmissoras e que utilizam modulações do tipo p^k -PSK. Com isso, outro objetivo, que é a apresentação de uma gama variada de novos STTCs para a utilização em sistemas de comunicação sem fio, pode ser alcançado. Cabe ressaltar que a simplicidade e a sistematicidade dos codificadores propostos são também de grande interesse prático.

1.2 Contribuições

Nesta tese apresentaremos seis resultados, sendo três conjecturas e três teoremas, que servirão para simplificar a busca de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} gerados por uma estrutura contendo um codificador espaço-temporal sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} . Todas os resultados aqui apresentados são válidos para qualquer número de antenas transmissoras e modulações do tipo p^k -PSK. As duas primeiras conjecturas são aplicadas aos STTCs com modulações p -PSK, sendo que a primeira estabelece a diversidade completa para STTCs testando apenas o posto em matrizes-diferença entre palavras-código sobre $\text{GF}(p)$, ao invés de matrizes-diferença no domínio dos complexos, e a segunda verifica se um STTC tem diversidade completa apenas com um simples teste de posto em uma matriz geradora escalar G de um codificador linear sobre $\text{GF}(p)$ [30] e [31]. Com a terceira conjectura, é possível se obter STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} com diversidade completa para

qualquer número de antenas transmissoras garantindo-se apenas o posto completo de uma única matriz, \mathbf{G}' , formada pelos coeficientes do codificador convolucional linear reduzidos a módulo- p [32]. Para o caso de $k = 1$, a terceira e a segunda conjecturas são equivalentes. Estas três conjecturas são mais focadas aos STTCs projetados pelos critérios do posto e do determinante, pois com elas pode-se descartar códigos que não têm diversidade completa. O primeiro e o segundo teoremas são adaptações de [29, Teoremas 1 e 2] para os codificadores utilizados neste trabalho, e servem para simplificar a busca de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} projetados tanto através do critério do determinante quanto através do critério do traço. O terceiro teorema é válido apenas para a simplificação da busca de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} projetados pelo critério do traço, e pode reduzir de forma significativa o número de códigos a serem testados. Nos três teoremas, a simplificação ocorre pelo fato de se descartar códigos equivalentes, ou seja, códigos que possuem os mesmos valores de ganhos. A partir destes resultados, foi possível obter uma gama variada de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} utilizando modulações p^k -PSK, com um esforço computacional relativamente pequeno.

1.3 Organização

No Capítulo 2, será apresentado o modelo de um sistema espaço-temporal, e em seguida será feita uma análise para se chegar aos critérios de projeto para STTCs em canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Será mostrado também neste capítulo o procedimento de construção de um STTC. No Capítulo 3 serão propostas três conjecturas e três teoremas para a simplificação da busca por STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} . O Capítulo 4 apresentará alguns códigos novos obtidos através das técnicas propostas e algumas simulações. Finalmente, no Capítulo 5, faremos algumas conclusões sobre os resultados obtidos nesta tese.

Capítulo 2

Códigos Espaço-Temporais em Treliça

De acordo com [1], [2] e [3] a capacidade de canal para sistemas de comunicações móveis que empregam múltiplas antenas transmissoras e receptoras é significativamente maior do que a de sistemas que utilizam apenas uma antena transmissora e uma receptora. Em sistemas com múltiplas antenas (MIMO, do inglês: *Multiple Input Multiple Output*), nas condições em que o canal é conhecido nos receptores e possui desvanecimento plano e independente, a capacidade de canal cresce linearmente com o número mínimo de antenas transmissoras ou receptoras. Uma maneira de se obter tal ganho na capacidade em sistemas práticos é a utilização dos códigos espaço-temporais (STCs). Os STCs exploram as múltiplas antenas para proporcionar um excelente desempenho com boa eficiência espectral, codificando os sinais transmitidos no domínio do tempo e do espaço. Como mencionado na seção de introdução, esta tese focará apenas nos STCs em treliça.

Os STTCs, propostos por Tarokh *et al.* [4] em 1998, quando transmitidos através de canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático, devem ser construídos com base em critérios que variam de acordo com o grau de diversidade do sistema. Veremos adiante quais serão esses critérios e que impacto cada um deles tem na curva de desempenho dos STTCs. Esses critérios estão relacionados a parâmetros associados a matrizes formadas pelas diferenças de possíveis pares de seqüências transmitidas. Uma das principais dificuldades em se obter esses códigos vem do fato de que seus critérios de

projeto são baseados na estrutura algébrica do domínio complexo de sinais em banda base, e não numa estrutura algébrica finita, o que torna difícil a sistematização da busca computacional de bons códigos.

A Seção 2.1 apresentará o modelo do sistema espaço-temporal com múltiplas antenas. Em seguida, a Seção 2.2 mostrará a análise de desempenho dos STTCs em canais com desvanecimento lento. Na Seção 2.3, apresentaremos os critério de projeto dos STTCs e, finalmente, na Seção 2.4, mostraremos os procedimentos necessários para calcular os ganhos dos STTCs.

2.1 Modelo do Sistema

Considere um sistema de comunicação móvel com desvanecimento do tipo Rayleigh plano quase-estático empregando n antenas transmissoras e m antenas receptoras como mostrado na Figura 2.1. No transmissor a seqüência de informação é codificada pelo codificador de canal. Em seguida os dados codificados entram em um conversor serial/paralelo e são divididos em n subseqüências. Essas subseqüências são então mapeadas em n seqüências de símbolos de uma constelação. Em cada instante de tempo t , um símbolo de cada seqüência é enviado por uma antena, resultando em n transmissões simultâneas. No receptor, cada antena recebe em cada instante de tempo t uma superposição dos n sinais transmitidos no instante de tempo t . Desta maneira o sinal d_t^j recebido pela j -ésima antena receptora no instante t é dado por:

$$d_t^j = \sum_{i=1}^n h_{i,j} c_t^i \sqrt{E_s} + \eta_t^j \quad (2.1)$$

onde c_t^i é o sinal transmitido pela i -ésima antena no instante t , E_s é a energia média do sinal transmitido, η_t^j é um ruído Gaussiano branco complexo de média zero e variância $N_0/2$ por dimensão e $h_{i,j}$ denota o desvanecimento presente no caminho da i -ésima antena transmissora para a j -ésima antena receptora. Neste trabalho consideraremos que os desvanecimentos são amostras independentes de um processo aleatório Gaussiano complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão. Na prática, para que os desvanecimentos sejam independentes, as antenas têm que estar separadas de pelo menos algumas unidades de comprimento de onda. Além disso, vamos supor que o

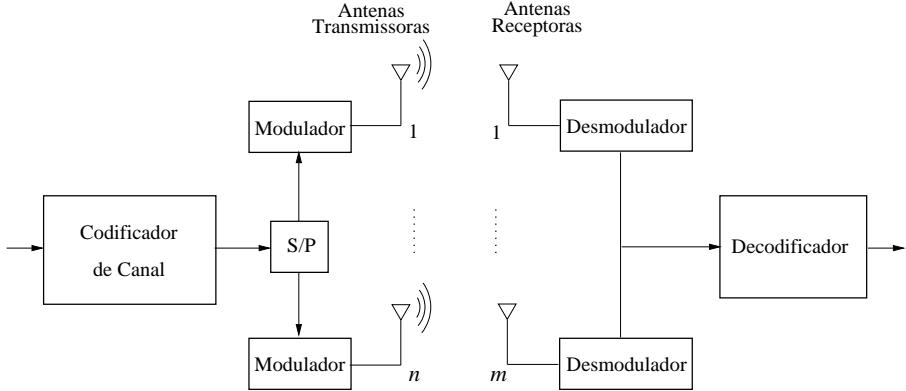


Figura 2.1: Modelo do sistema espaciotemporal.

receptor conheça perfeitamente o canal e que o algoritmo de Viterbi com métrica Euclidiana seja usado no decodificador. Por outro lado, o transmissor não tem qualquer informação sobre o estado do canal.

2.2 Análise de Desempenho dos STTCs em Canais com Desvanecimento Rayleigh Plano Quase-Estático

Nesta seção mostraremos a análise feita em [4] e [34] para se chegar aos critérios de projeto dos STTCs para canais com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Os critérios de projeto para STTCs utilizados em sistemas de comunicações que são modelados pelo desvanecimento rápido, assim como os que são modelados por uma mistura dos desvanecimento lento e rápido, são diferentes dos que serão apresentados neste trabalho e podem ser encontrados em [4] e [34]. Antes de começarmos a análise de desempenho, definiremos algumas notações e algumas propriedades de álgebra linear, as quais serão utilizadas no decorrer desta seção. Considere os vetores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ sobre os complexos \mathcal{C}^k . O produto interno entre \mathbf{x} e \mathbf{y} é dado por:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k x_i \overline{y_i} \quad (2.2)$$

onde $\overline{y_i}$ denota o complexo conjugado de y_i . Se $A = A^*$, onde A^* denota o conjugado transposto de A , então A é uma matriz Hermitiana. Para qualquer vetor complexo $\mathbf{x}_{1 \times n}$, a matriz A será definida não negativa se $\mathbf{x} A \mathbf{x}^* \geq 0$. Uma matriz $V_{n \times n}$ é unitária

se $VV^* = I$, onde I é a matriz identidade. Uma matriz $B_{n \times l}$ é raiz quadrada de A se $BB^* = A$. A seguir mostraremos as propriedades de álgebra utilizadas nesta seção [35].

- Um autovetor \mathbf{v} de uma matriz $A_{n \times n}$ correspondente a um autovalor λ é um vetor $1 \times n$ de comprimento unitário tal que $\mathbf{v}A = \lambda\mathbf{v}$. O espaço vetorial criado pelos autovetores de A correspondentes ao autovalor zero tem dimensão $n - r$, onde r é o posto da matriz A .
- Qualquer matriz A com raiz quadrada B é definida não negativa.
- Para qualquer matriz Hermitiana A definida não negativa, existe uma matriz triangular inferior quadrada B tal que $BB^* = A$.
- Dada uma matriz Hermitiana A , os autovetores de A geram um espaço complexo n -dimensional. Além disso, existe uma matriz unitária V e uma matriz diagonal D tal que $VAV^* = D$. As linhas de V formam uma base ortonormal de \mathcal{C}^n , dada pelos autovetores de A . Os elementos da diagonal de D são os autovalores λ_i de A incluindo os autovalores múltiplos.
- Os autovalores de uma matriz Hermitiana definida não negativa são reais e não negativos.

No canal com desvanecimento quase-estático, o ganho entre a i -ésima antena transmissora e a j -ésima antena receptora permanece constante durante um *frame*, isto é, durante l transmissões, e muda independentemente de um frame para o outro.

Para o sistema descrito na Seção 3.1, a probabilidade de erro com relação ao par, denotada por $P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e})$, é definida como a probabilidade de um decodificador de máxima verossimilhança decidir-se erroneamente pela palavra

$$\mathbf{e} = e_1^1 e_1^2 \cdots e_1^n e_2^1 e_2^2 \cdots e_2^n \cdots e_l^1 e_l^2 \cdots e_l^n$$

quando a palavra código transmitida foi

$$\mathbf{c} = c_1^1 c_1^2 \cdots c_1^n c_2^1 c_2^2 \cdots c_2^n \cdots c_l^1 c_l^2 \cdots c_l^n,$$

dado que os parâmetros do desvanecimento do canal, $h_{i,j}$, são conhecidos. Esta probabilidade é limitada superiormente por:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e} | h_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \leq \frac{1}{2} \exp(-d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e})E_s/4N_0) \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde $N_0/2$ é a variância do ruído por dimensão e

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^l \left| \sum_{i=1}^n h_{i,j} (c_t^i - e_t^i) \right|^2. \quad (2.4)$$

Após algumas manipulações a Equação (2.4) pode ser reescrita como:

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n h_{i,j} \overline{h_{i',j}} \sum_{t=1}^l (c_t^i - e_t^i) \overline{(c_t^{i'} - e_t^{i'})} \quad (2.5)$$

Definindo-se $\Omega_j = (h_{1,j}, h_{2,j}, \dots, h_{n,j})$ e $A_{p,q}(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{t=1}^l (c_t^p - e_t^p) \overline{(c_t^q - e_t^q)}$, para $1 \leq p, q \leq n$, a Equação (2.5) se torna:

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \Omega_j^*. \quad (2.6)$$

Substituindo (2.6) em (2.3) obtemos a seguinte expressão para a probabilidade de erro com relação ao par:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e} | h_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \leq \frac{1}{2} \exp(-\sum_{j=1}^m \Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \Omega_j^* E_s / 4N_0). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Como $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ é Hermitiana, e

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \triangleq \begin{pmatrix} e_1^1 - c_1^1 & e_2^1 - c_2^1 & \cdots & e_l^1 - c_l^1 \\ e_1^2 - c_1^2 & e_2^2 - c_2^2 & \cdots & e_l^2 - c_l^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1^n - c_1^n & e_2^n - c_2^n & \cdots & e_l^n - c_l^n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

é a raiz quadrada de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, então os autovalores de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ são números reais e não negativos.

O próximo passo é expressar $d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ em termos dos autovalores da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Como já mencionado, para cada matriz Hermitiana $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ existe uma matriz unitária V e uma matriz diagonal real D tal que $VAV^* = D$. Se a matriz V for unitária, então $VV^* = I$ e portanto

$$\begin{aligned} VA(\mathbf{c}, \mathbf{e})V^* &= D \Rightarrow \\ A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) &= V^*DV \Rightarrow \\ \Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e})\Omega_j^* &= (\Omega_j V^*)D(V\Omega_j^*). \end{aligned}$$

Definindo $(\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \dots, \beta_{n,j}) = \Omega_j V^*$, podemos chegar à seguinte expressão:

$$\Omega_j A(\mathbf{c}, \mathbf{e})\Omega_j^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_{i,j}|^2. \quad (2.9)$$

Com isso:

$$d^2(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_{i,j}|^2. \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) no limite superior de (2.3) teremos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e} | h_{i,j}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m) \\ \leq \frac{1}{2} \exp(-\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \lambda_i |\beta_{i,j}|^2 E_s / 4N_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Como $h_{i,j}$ são modelados como amostras independentes de um processo aleatório Gaussiano complexo de média zero e variância 0.5 por dimensão, e V é unitária, então $\beta_{i,j}$ também serão variáveis aleatórias Gaussianas complexas com média zero e variância 0.5 por dimensão. A seguir, será calculado o valor esperado da Equação (2.11) com relação a $\beta_{i,j}$ para duas situações de rm .

2.2.1 Probabilidade de Erro com Relação ao Par para Pequenos Valores de rm

Em [34] ficou estabelecido um limiar para os valores de rm sendo $rm < 4$, considerado um pequeno valor para a ordem de diversidade e $rm \geq 4$ um valor elevado. Para $rm < 4$, e para o caso de desvanecimento Rayleigh, a probabilidade média de erro com relação ao par pode ser expressa por [4]:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{(1 + \lambda_i(E_s/4N_0))} \right)^m. \quad (2.12)$$

Considerando valores altos para a relação sinal-ruído ($SNR > 10$), podemos aproximar a expressão (2.12) para:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \left(\prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-m} \left(\frac{E_s}{4N_0} \right)^{-rm}, \quad (2.13)$$

Com base na Equação (2.13), podemos observar os ganhos de diversidade e de codificação do sistema. O ganho de diversidade rm é o expoente da relação sinal-ruído E_s/N_0 e determina a inclinação na curva da probabilidade de erro versus E_s/N_0 . O ganho de codificação representa um deslocamento horizontal na curva da probabilidade de erro versus E_s/N_0 e pode ser definido como sendo:

$$G_c = \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{1/r}}{DE_u^2}, \quad (2.14)$$

onde DE_u^2 é a distância Euclideana quadrática do sistema não codificado.

De acordo com a expressão (2.13), para minimizarmos a probabilidade de erro é necessário maximizar tanto rm quanto $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{1/r}$. Com isso, pode-se chegar aos seguintes critérios de projeto [4]:

- *O Critério do Posto:* Neste critério o parâmetro a ser maximizado é o posto mínimo r da matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ com relação a todos os pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} . O ganho de diversidade é $rm \leq nm$, com igualdade se o posto for completo, ou seja, $r = n$.

- *O Critério do Determinante:* Para um dado ganho de diversidade rm , a meta deste critério é maximizar a média geométrica mínima dos autovalores não nulos da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, $(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r)^{1/r}$, com relação a todos os pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} .

2.2.2 Probabilidade de Erro com Relação ao Par para Valores Grandes de rm

Quando o desvanecimento é Rayleigh e $rm \geq 4$, o limitante da probabilidade média de erro com relação ao par pode ser escrita como [34]:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \frac{1}{2} \exp \left(\frac{1}{2} \left(\frac{E_s}{4N_0} \right)^2 m \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 - \frac{E_s}{4N_0} m \sum_{i=1}^r \lambda_i \right) \cdot Q \left(\frac{\frac{E_s}{4N_0} (m \sum_{i=1}^r \lambda_i^2)^{1/2} - \frac{(m)^{1/2} \sum_{i=1}^r \lambda_i}{(\sum_{i=1}^r \lambda_i^2)^{1/2}}}{\frac{E_s}{4N_0}} \right) \quad (2.15)$$

Novamente, considerando valores altos para a relação sinal-ruído, podemos aproximar a expressão (2.15) para:

$$P(\mathbf{c} \rightarrow \mathbf{e}) \leq \frac{1}{4} \exp \left(-m \frac{E_s}{4N_0} \sum_{i=1}^r \lambda_i \right). \quad (2.16)$$

Pela expressão (2.16), devemos maximizar o somatório dos autovalores da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ para minimizarmos a probabilidade de erro. Note que para uma matriz quadrada o somatório de todos os autovalores é igual ao somatório dos elementos de sua diagonal principal, conhecido como o traço da matriz, ou seja,

$$\text{tr}(A(\mathbf{c}, \mathbf{e})) = \sum_{i=1}^r \lambda_i = \sum_{i=1}^n A^{i,i}, \quad (2.17)$$

onde $A^{i,i}$ são os elementos da diagonal principal de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Como

$$A^{i,i} = \sum_{t=1}^l (c_t^i - e_t^i)(c_t^i - e_t^i)^*, \quad (2.18)$$

podemos dizer que:

$$\text{tr}(A(\mathbf{c}, \mathbf{e})) = \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^l |c_t^i - e_t^i|^2. \quad (2.19)$$

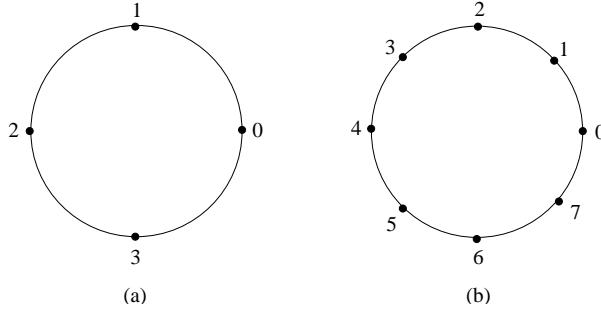


Figura 2.2: Constelações 4-PSK (a) e 8-PSK (b).

A equação (2.19) mostra que o traço de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ é equivalente à distância Euclideana quadrática entre as palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} .

Com base nas expressões anteriores, pode-se chegar ao seguinte critério de projeto [34]:

- *O Critério do Traço:* Garantir posto r para todos os pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} , tal que $rm \geq 4$, e maximizar o traço mínimo de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ com relação a todos os pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} .

2.3 Projeto dos STTCs para Canais com Desvane-cimento Rayleigh Plano Quase-Estático

Nesta seção apresentaremos dois exemplos de STTCs, retirados de [4], para mostrar como se determinar os ganhos relacionados aos critérios do posto e determinante, e do traço.

Considere a constelação 4-PSK mostrada na Figura 2.2 (a). A treliça da Figura 2.3 descreve um STTC de 4 estados para a modulação 4-PSK e com duas antenas transmissoras. O ganho de diversidade é $rm = 2m$, e os ganhos proporcionados pelos critérios do determinante e do traço são, respectivamente, 2 e 4. A eficiência espectral para este código é de $\log_2(4) = 2$ b/s/Hz. A treliça mostrada na Figura 2.4 refere-se a um STTC que usa duas antenas transmissoras para transmitir símbolos de uma constelação 8-PSK, vista na Figura 2.2 (b), para um receptor equipado com m antenas.

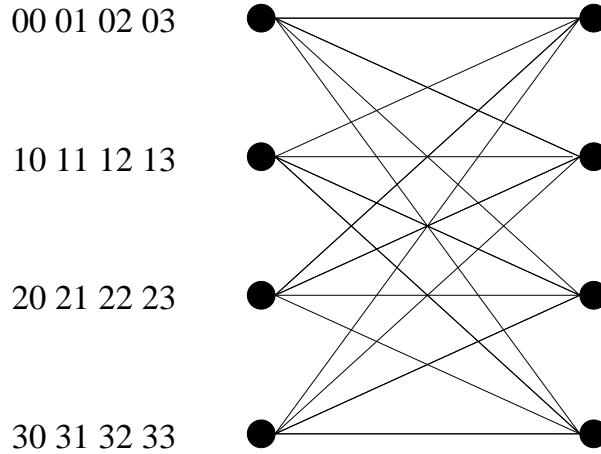


Figura 2.3: Código espaço-temporal em treliça, 4-PSK, 2 bits/s/Hz.

Este código proporciona um ganho de diversidade de $2m$, mínimo determinante igual a 1, 4 e mínimo traço igual a 4, com uma eficiência espectral de 3 b/s/Hz. Nestas treliças cada par de símbolos no canto esquerdo representa, respectivamente, o sinal transmitido pela primeira e segunda antenas. Ao lado esquerdo de cada estado, no canto esquerdo da treliça, o número de pares de símbolos é igual ao número de ramos saindo deste estado. O par de símbolos mais à esquerda rotula o ramo mais acima, e corresponde ao símbolo de informação 0, o par de símbolos seguinte rotula o ramo imediatamente abaixo, e corresponde ao símbolo de informação 1, e assim por diante.

Para se chegar aos ganhos de diversidade dos códigos citados anteriormente, foi necessário verificar se todas as matrizes $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, referentes aos possíveis pares distintos de seqüências que iniciam em estados iguais e terminam em estados iguais, tivessem posto completo. Após essa verificação, foi preciso calcular a média geométrica dos autovalores e o traço referente a cada matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, para finalmente escolher os menores valores e fixar os ganhos referentes aos critério do determinante e do traço. Como exemplo, mostraremos o cálculo do posto, da média geométrica dos autovalores e do traço de uma matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ referente ao par de seqüências mostrados na treliça da Figura 2.5, onde as seqüências têm comprimento $l = 2$. A Figura 2.5 mostra os caminhos correspondentes à seqüência correta, abd , e a seqüência errada, acd . Essa treliça ilustra um STTC com 4 estados.

Através da Equação (2.8) e dos símbolos complexos da constelação 4-PSK, ob-

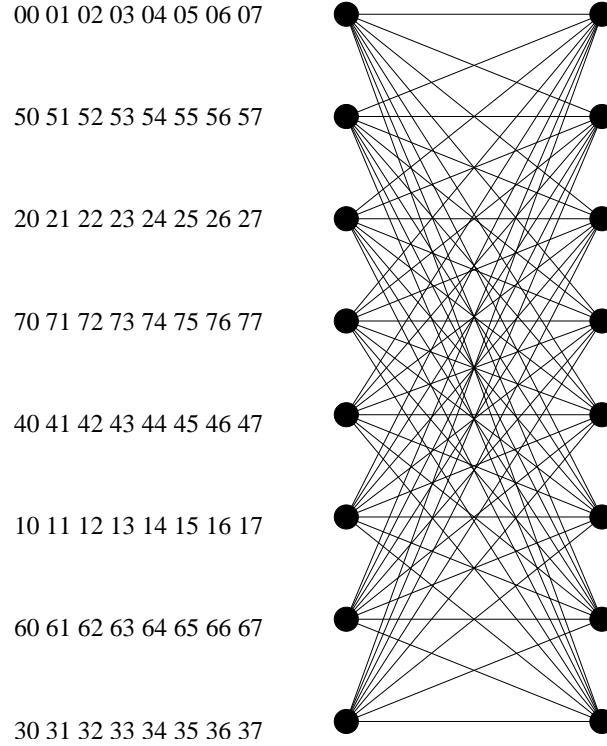


Figura 2.4: Código espaço-temporal em treliça, 8-PSK, 3 bits/s/Hz.

temos a seguinte matriz:

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 0 & j-1 \\ j-1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

A partir de B podemos facilmente determinar a matriz A como sendo

$$A(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

A matriz A tem posto $r = 2$, autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, com uma média geométrica igual a 2 e traço igual a 4. Note que a estrutura de codificação apresentada nesta tese não garante uniformidade geométrica para os códigos [4], e por isso a busca é realizada sobre todos os possíveis pares distintos de palavras-código na treliça.

Comentário 1 É importante observar também que para se obter grau máximo de diversidade, $r = n$, para um STTC, é necessário que $l \geq n$. Isto pode ser verificado pelo fato de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ ter o mesmo posto de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, que tem dimensão $n \times l$.

Devemos chamar a atenção para o fato de que os códigos apresentados nesta seção não são ótimos. Para se obter o código ótimo seria necessária uma busca exaustiva

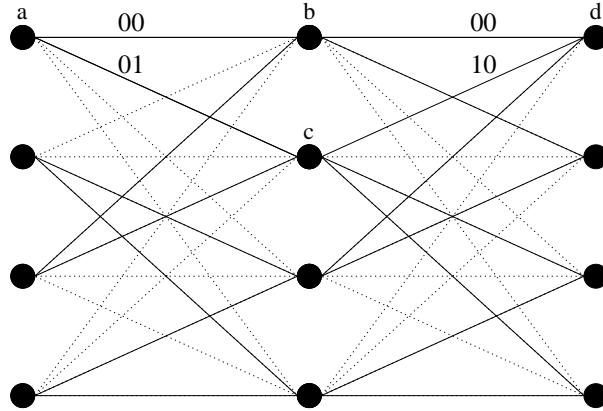


Figura 2.5: Par de seqüências.

num universo de $M^{(S \cdot 2M)}$ códigos, onde M é o número de símbolos da constelação e S é o número de estados da treliça. Por exemplo, para achar o código ótimo de uma treliça com 4 estados que utiliza símbolos de uma constelação 4-PSK, através de uma busca não sistemática, teríamos que procurá-lo em um universo de $4^{32} \approx 1,844 \times 10^{19}$ códigos. Esta procura se torna impraticável mesmo quando o número de estados da treliça e/ou o número de símbolos da constelação são modestos. Daí a relevância do estudo de métodos para sistematizar a busca por STTCs.

Capítulo 3

Técnicas para o Projeto de STTCs sobre Corpos e Anéis Finitos

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados através dos quais pode-se simplificar o projeto de bons STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} , onde $\text{GF}(p)$ denota o corpo de Galois e \mathbb{Z}_{p^k} um anel de inteiros finitos, para qualquer número de antenas transmissoras e modulações p^k -PSK. Na Seção 3.1 será apresentada uma conjectura que simplifica o teste de posto completo para STTCs sobre $\text{GF}(p)$, transferindo-o do domínio dos complexos para $\text{GF}(p)$. A Seção 3.2 apresentará a estrutura do codificador convolucional sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} utilizado nesta tese. A Seção 3.3 mostrará como a busca de STTCs com diversidade completa pode ser simplificada – um único teste de posto completo em uma matriz escalar sobre $\text{GF}(p)$ substitui uma infinidade de testes de posto completo em matrizes complexas. Finalmente, na Seção 3.4, serão apresentados três teoremas que identificam STTCs que possuem o mesmo traço e/ou determinante.

Daqui por diante, para simplificar a notação, em alguns casos $\text{GF}(p)$ será considerado como sendo \mathbb{Z}_{p^k} , para $k = 1$. O leitor que desejar mais informações sobre álgebra aplicada à teoria da codificação pode consultar o Apêndice A deste documento.

3.1 O Critério do Posto p -ário: Conjectura 1

Considere a matriz $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ de dimensão $n \times l$ como sendo uma matriz diferença de palavras-código espácia-temporais sobre $\text{GF}(p)$:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\equiv \mathbf{v} - \mathbf{w} \pmod{p} \\ &\equiv \begin{pmatrix} v_{1,1} - w_{1,1} & v_{1,2} - w_{1,2} & \cdots & v_{1,l} - w_{1,l} \\ v_{2,1} - w_{2,1} & v_{2,2} - w_{2,2} & \cdots & v_{2,l} - w_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n,1} - w_{n,1} & v_{n,2} - w_{n,2} & \cdots & v_{n,l} - w_{n,l} \end{pmatrix} \pmod{p}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{w} são as palavras-código correta e errônea, respectivamente, sobre $\text{GF}(p)$ e cada elemento $d_{i,j} = v_{i,j} - w_{i,j}$ da matriz é reduzido módulo p para se tornar um inteiro pertencente ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Considerando a matriz $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, apresentaremos uma conjectura através da qual se torna possível garantir diversidade completa para STTCs verificando apenas o posto de matrizes diferença sobre $\text{GF}(p)$ e não mais de matrizes diferença sobre os complexos. Com isso, o critério do posto proposto por Tarokh *et al.*, em [4], pode ser simplificado quando se trata de STTCs sobre $\text{GF}(p)$. Este critério simplificado também se aplica tanto aos códigos lineares quanto aos não lineares.

Conjectura 1 Sejam n e l inteiros positivos com $l \geq n$, e p um número primo qualquer. Se a matriz $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ de dimensão $n \times l$ definida anteriormente for de posto completo sobre $\text{GF}(p)$, então a matriz

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) \triangleq \begin{pmatrix} e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{1,1})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{1,1})} & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{1,2})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{1,2})} & \cdots & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{1,l})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{1,l})} \\ e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{2,1})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{2,1})} & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{2,2})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{2,2})} & \cdots & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{2,l})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{2,l})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{n,1})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{n,1})} & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{n,2})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{n,2})} & \cdots & e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{n,l})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{n,l})} \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

também será de posto completo. O contrário geralmente não é verdade.

Comentário 2 Note que a matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ em (3.1) é exatamente a matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ em (2.8), onde $B_{i,t}(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = e_t^i - c_t^i = e^{(\frac{j2\pi}{p}v_{i,t})} - e^{(\frac{j2\pi}{p}w_{i,t})}$.

Comentário 3 No Anexo B uma prova é apresentada para a Conjectura 1 quando o número de antenas transmissoras é $n = 2$, e no Anexo C são apresentadas algumas propriedades que dão indícios de que a Conjectura 1 é verdadeira para qualquer número de antenas transmissoras.

Comentário 4 A Conjectura 1 não tem um impacto significativo na simplificação da busca por STTCs, uma vez que ainda há a necessidade de se verificar o posto das matrizes diferença associadas a todos os possíveis pares de palavras-código. Mas, como veremos adiante, a Conjectura 1 servirá como base para chegarmos a outro resultado importante, que simplificará drasticamente tal busca.

3.2 O Codificador Convolucional sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k}

Uma das contribuições desta tese é a proposição da seguinte estrutura do codificador para a geração de STTCs para a modulação p^k -PSK.

Seja \mathbb{Z}_{p^k} o anel de inteiros módulo p^k , onde p é um número primo e k é um inteiro positivo. Seja $\mathbb{Z}_{p^1} = \text{GF}(p)$ o corpo de inteiros módulo p para o caso $k = 1$. Seja também $U(D) = u_0 + u_1D + u_2D^2 + \dots$ o polinômio de informação sobre \mathbb{Z}_{p^k} , representando uma seqüência de informação. Esta seqüência é codificada por um codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_{p^k} de taxa $R = 1/n$, o qual é uma realização direta de um vetor gerador polinomial:

$$\mathbf{G}(D) = [G_1(D), G_2(D), \dots, G_n(D)],$$

produzindo o vetor codificado

$$\mathbf{V}(D) = U(D)\mathbf{G}(D) = [V^1(D), V^2(D), \dots, V^n(D)],$$

onde $V^i(D) = v_0^i + v_1^iD + v_2^iD^2 + \dots + v_t^iD^t + \dots$, para $i = 1, 2, \dots, n$, são as n seqüências codificadas. Os geradores do código são $G_i(D) = g_{0,i} + g_{1,i}D + g_{2,i}D^2 + \dots + g_{K,i}D^K$, para $i = 1, 2, \dots, n$, onde K é a memória do codificador. Um exemplo genérico de um codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_{p^k} de taxa $R = 1/n$ é apresentado na Figura 3.1, onde as operações de soma e multiplicação são realizadas módulo- p^k , e os símbolos de

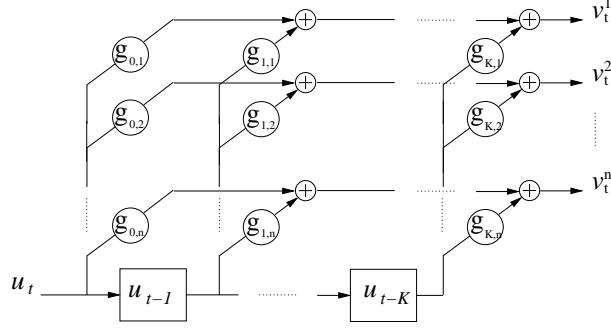


Figura 3.1: Codificador convolucional genérico de taxa $R = 1/n$.

entrada, os coeficientes do codificador e os símbolos de saída são elementos do anel \mathbb{Z}_{p^k} ou do corpo $\text{GF}(p)$, dependendo do valor de k . Da teoria de códigos convolucionais, [37], o código gerado por esse codificador é linear sobre \mathbb{Z}_{p^k} . O número de estados da treliça que representa o código gerado pela estrutura da Figura 3.1 é dado por $(p^k)^K$. Por exemplo, para um codificador sobre \mathbb{Z}_4 e com $K = 2$ o código gerado teria uma treliça com $4^2 = 16$ estados. Quando $k > 1$, graças a estrutura do anel \mathbb{Z}_{p^k} , é possível se obter códigos com número de estados intermediários entre potências de (p^k) . Para que isso ocorra basta acrescentar um multiplicador com valor p^{k-z} , onde $z = 1, 2, \dots, k-1$, entre a K -ésima e a $(K-1)$ -ésima memórias do codificador. As Figuras 3.2 e 3.3 mostram dois exemplos destes codificadores. Na Figura 3.2 é considerado um codificador de taxa $1/3$ com ordem de memória $K = 2$. Para este caso, se fossem utilizadas, por exemplo, as modulações 4, 9 e 25-PSK, possíveis valores de multiplicadores seriam $\psi = 2, 3, 5$, respectivamente, resultando em códigos com $(p^k)^K/\psi$ estados, no caso, 8, 27 e 125 estados. A Figura 3.3 mostra um codificador de taxa $1/3$ e ordem de memória $K = 3$. Tomando-se como exemplo outras modulações, por exemplo, 8 e 16-PSK, os multiplicadores seriam $\psi = 4, 8$, respectivamente, e os códigos teriam 128 e 512 estados.

A seguir, baseando-nos na estrutura do codificador utilizado, definiremos duas matrizes que serão de grande importância para o projeto de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} . A primeira será uma matriz geradora escalar \mathbf{G} , de dimensão $n \times K + 1$, formada pelos

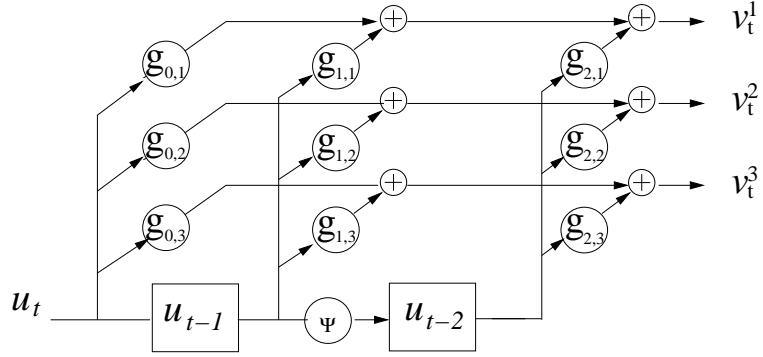


Figura 3.2: Codificador convolucional de taxa $R = 1/3$ e memória $K = 2$.

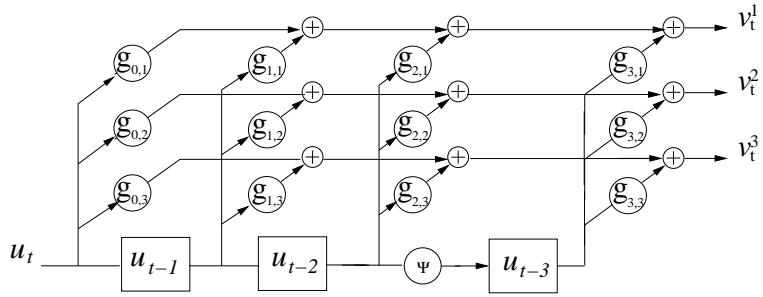


Figura 3.3: Codificador convolucional de taxa $R = 1/3$ e memória $K = 3$.

coeficientes do codificador da Figura 3.1:

$$\mathbf{G} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} g_{0,1} & g_{1,1} & \cdots & g_{K,1} \\ g_{0,2} & g_{1,2} & \cdots & g_{K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{0,n} & g_{1,n} & \cdots & g_{K,n} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

onde $g_{x,i}$, para $x = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$ são os coeficientes do codificador da Figura 3.1. A segunda matriz, \mathbf{G}' , será definida como a matriz \mathbf{G} reduzida módulo- p :

$$\mathbf{G}' \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G} \pmod{p} = \begin{bmatrix} g'_{0,1} & g'_{1,1} & \cdots & g'_{K,1} \\ g'_{0,2} & g'_{1,2} & \cdots & g'_{K,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{0,n} & g'_{1,n} & \cdots & g'_{K,n} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde $g'_{x,i}$, para $x = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$ são elementos de $GF(p)$.

Comentário 5 Note que se o codificador utilizado for sobre $GF(p)$, as duas matrizes

serão idênticas.

3.3 Técnicas para o Projeto de STTCs sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} com Diversidade Completa

Nesta seção serão apresentadas duas conjecturas muito úteis para a obtenção de STTCs com diversidade completa.

3.3.1 Técnica para o Projeto de STTCs sobre $GF(p)$ com Di- versidade Completa: Conjectura 2

Para dizer que um STTC possui ganho de diversidade máximo, é necessário garantir que o posto de todas as matrizes $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ correspondentes ao código seja completo. Este teste, quando realizado individualmente em cada matriz, se torna muito complexo devido ao elevado número de matrizes a serem verificadas. A seguir, apresentaremos uma conjectura através da qual é possível obter STTCs sobre $GF(p)$ com diversidade completa com apenas um único teste de posto completo em uma matriz escalar sobre $GF(p)$.

Conjectura 2 Considere um codificador convolucional sobre $GF(p)$ de taxa $R = 1/n$, como o mostrado na Figura 3.1, e a correspondente matriz geradora escalar \mathbf{G} , definida em (3.2). A matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ terá posto completo sobre os complexos, com relação a todos os possíveis pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} se, e somente se, a matriz \mathbf{G} tiver posto completo sobre $GF(p)$. Portanto, o STTC associado a \mathbf{G} atingirá o máximo ganho de diversidade.

Comentário 6 É importante ressaltar que nessa conjectura uma infinidade de testes de posto de matrizes complexas é substituída por um único teste de posto de uma matriz de inteiros sobre $GF(p)$.

Prova direta: Inicialmente, suponha que a Conjectura 1 seja verdadeira e depois utilize o argumento a seguir (apresentado na prova do [20, Teorema 14]) para garantir

que uma matriz \mathbf{G} de posto completo sobre $GF(p)$ só irá gerar palavras-código também de posto completo sobre $GF(p)$.

Se uma matriz palavra-código sobre $GF(p)$ é de posto incompleto podemos afirmar que:

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{x=0}^K u_{t-x} g_{x,i} = \sum_{i=1}^n a_i G_i(D) U(D) = 0, \quad (3.4)$$

onde a_i é uma solução não trivial para a expressão (3.4) e $\sum_{x=0}^K u_{t-x} g_{x,i}$ é a expressão para a i -ésima saída do codificador da Figura 3.1. A expressão (3.4) será verdadeira quando $U(D) \neq 0$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^n a_i G_i(D) = 0, \quad (3.5)$$

ou seja, se e somente se a matriz \mathbf{G} for de posto incompleto.

Com isso, usaremos a propriedade de que em um código linear a diferença entre duas palavras-código também é uma palavra-código. Portanto, pela Conjectura 1, poderemos concluir que se a matriz geradora \mathbf{G} for de posto completo sobre $GF(p)$, todas as matrizes diferença de palavras-código $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ serão de posto completo sobre $GF(p)$, resultando em um STTC com diversidade completa. \square

A prova de que uma matriz geradora \mathbf{G} de posto incompleto irá gerar um STTC de diversidade incompleta (prova inversa) ainda não foi conseguida, mas essa propriedade se verificou em todos os casos simulados.

Para ilustrar este resultado, mostraremos o seguinte exemplo:

Exemplo 1 Considere um sistema espaço-temporal com duas antenas transmissoras utilizando a modulação 7-PSK e o codificador convolucional sobre $GF(7)$ de taxa $R = 1/2$ mostrado na Figura 3.4. Segundo (3.2), a matriz \mathbf{G} é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Pode-se verificar facilmente que a matriz \mathbf{G} possui posto completo sobre $GF(7)$ e, portanto, segundo a Conjectura 2, o codificador da Figura 3.4 irá gerar um STTC sobre $GF(7)$ para a modulação 7-PSK com ganho de diversidade máximo.

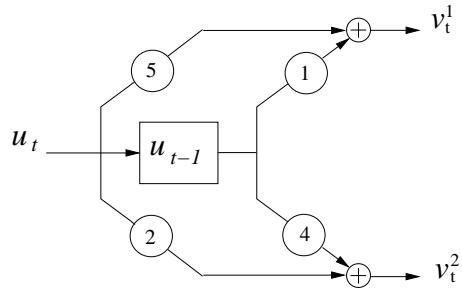


Figura 3.4: Codificador convolucional sobre $\text{GF}(7)$, $R = 1/2$.

3.3.2 Técnica para o Projeto de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} com Diversidade Completa: Conjectura 3

Na Conjectura 2, foi estabelecido que é possível garantir diversidade completa para um STTC sobre $\text{GF}(p)$ desde que os coeficientes de seu correspondente codificador convolucional constituam uma matriz geradora escalar de posto completo sobre $\text{GF}(p)$. Na próxima conjectura, estenderemos esse resultado para codificadores convolucionais sobre \mathbb{Z}_{p^k} de taxa $R = 1/n$, com o intuito de utilizarmos modulações usuais como, por exemplo, 4-PSK e 8-PSK.

Conjectura 3 Considere um codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_{p^k} de taxa $R = 1/n$ com uma matriz geradora escalar \mathbf{G} . A matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ terá posto completo sobre os complexos, com relação a todos os possíveis pares distintos de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} se, e somente se, a matriz \mathbf{G} reduzida módulo- p , denotada por \mathbf{G}' , tiver posto completo sobre $\text{GF}(p)$. Portanto, o STTC associado a \mathbf{G} atingirá o máximo ganho de diversidade.

Comentário 7 Note que para $k = 1$ o resultado apresentado se torna um caso particular da Conjectura 2.

Para propor esta conjectura, fizemos uma analogia a um teorema apresentado por Massey e Mittelholzer em [38] para códigos convolucionais sobre o anel \mathbb{Z}_{p^k} , que diz: “Um polinômio gerador $G(D)$ sobre o anel \mathbb{Z}_{p^k} , onde p é primo e k é um inteiro positivo, é catastrófico se, e somente se, seus coeficientes polinomiais reduzidos módulo- p resultarem em um polinômio gerador sobre $\text{GF}(p)$ também catastrófico”. Apesar de não apresentarmos formalmente uma prova matemática, que relate direamente

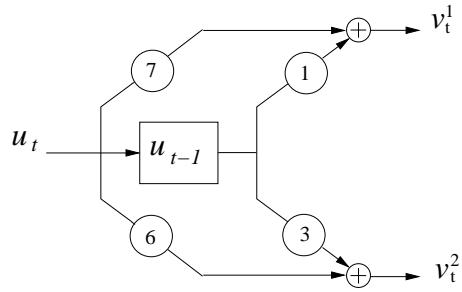


Figura 3.5: Codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_8 , $R = 1/2$.

estes dois resultados, a Conjectura 3 foi verificada em todos os casos onde realizamos buscas exaustivas nos coeficientes do codificador.

Para ilustrar a Conjectura 3, apresentaremos o seguinte exemplo:

Exemplo 2 Considere um sistema espaço-temporal com duas antenas transmissoras utilizando a modulação 8-PSK e o codificador convolucional linear sobre \mathbb{Z}_8 de taxa $R = 1/2$ mostrado na Figura 3.5. Seguindo as definições de \mathbf{G} e \mathbf{G}' , tem-se:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{G}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar facilmente que a matriz \mathbf{G}' possui posto completo sobre $GF(2)$ e, portanto, segundo a Conjectura 3, o codificador da Figura 3.5 irá gerar um STTC sobre \mathbb{Z}_8 para a modulação 8-PSK com ganho de diversidade máximo.

Apesar de a Seção 3.3 ser focada nos STTCs com diversidade completa, esses resultados também podem ser úteis para o projeto de STTCs baseados no critério do traço, pois antes de maximizar o traço mínimo é necessário garantir que $rm \geq 4$. No próximo capítulo usaremos as Conjecturas 2 e 3 para simplificar a busca de STTCs com diversidade completa, e realizaremos algumas simulações para comprovar o bom desempenho dos códigos obtidos.

3.4 Outras Técnicas para se Projetar STTCs sobre $\mathbf{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k}

Nesta seção serão apresentados três teoremas que simplificam a busca de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} sem descartar os códigos ótimos. Os dois primeiros teoremas (Teoremas 1 e 2) são adaptações de [29, Teoremas 1 e 2] para os codificadores utilizados neste trabalho, e servem tanto para os STTCs projetados através do critério do determinante quanto para os projetados pelo critério do traço. O último teorema (Teorema 3) é válida apenas para a simplificação da busca de STTCs projetados pelo critério do traço.

3.4.1 Teorema 1

Em [29], os autores mostraram que é possível reduzir a busca de STTCs sem descartar códigos ótimos. Isto é feito desconsiderando-se os conjuntos de coeficientes que geram matrizes diferença de palavras-código complexas conjugadas, evitando assim avaliar códigos com os mesmos ganhos. No próximo teorema apresentaremos um resultado similar ao obtido em [29, Seção 3.2], porém desenvolvido para STTCs gerados por codificadores convolucionais sobre \mathbb{Z}_{p^k} .

Teorema 1 *Considere um STTC sobre \mathbb{Z}_{p^k} gerado por uma matriz geradora \mathbf{G} com coeficientes $g_{x,i}$, para $x = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$. As matrizes $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, definidas como $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})B(\mathbf{c}, \mathbf{e})^*$, geradas por este código serão complexas conjugadas das matrizes $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ geradas por um código cuja matriz geradora possui coeficientes $p^k - g_{x,i}$. Portanto, para fins de projeto de STTCs, os dois códigos terão as mesmas características com relação ao posto, determinante e traço.*

Prova: Considere que as saídas do codificador da Figura 3.1 sejam dadas por:

$$v_t^i = \sum_{x=0}^K u_{t-x} g_{x,i}, \quad (\text{mod } p^k). \quad (3.6)$$

Tabela 3.1: Exemplos de STTCs Equivalentes - Teorema 1

$p^k - PSK$	n	Matriz G	Matriz $\tilde{G} = p^k - G$	Determinante	Traço
4	2	[0 3 1 3]	[0 1 ; 3 1]	2	6
5	2	[3 0 0 1]	[2 0 ; 0 4]	2,23	5
16	2	[15 5 9 8]	[1 11 ; 7 8]	0,78	4,58

Alterando os coeficientes do codificador por $p^k - g_{x,i}$ teremos as seguintes saídas:

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_t^i &= \sum_{x=0}^K u_{t-x}(p^k - g_{x,i}) \pmod{p^k} = \sum_{x=0}^K (u_{t-x}p^k) - (u_{t-x}g_{x,i}) \pmod{p^k} \\
 &= \sum_{x=0}^K -u_{t-x}g_{x,i} \pmod{p^k} = -v_t^i \pmod{p^k} \\
 &= p^k - v_t^i.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora vamos analisar o impacto desta alteração na matriz diferença de palavras-código $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Cada elemento de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ é uma diferença de números complexos da forma:

$$b_{i,j} = \exp\left(\frac{j2\pi c}{p^k}\right) - \exp\left(\frac{j2\pi e}{p^k}\right)$$

Com a alteração dos coeficientes por $p^k - g_{x,i}$ teremos:

$$\begin{aligned}
 \tilde{b}_{i,j} &= \exp\left(\frac{j2\pi(p^k - c)}{p^k}\right) - \exp\left(\frac{j2\pi(p^k - e)}{p^k}\right) \\
 &= \exp\left(\frac{-j2\pi c}{p^k}\right) - \exp\left(\frac{-j2\pi e}{p^k}\right) \\
 &= \overline{b_{i,j}},
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

onde $\overline{b_{i,j}}$ denota o complexo conjugado.

Com isso, podemos concluir que alterar os coeficientes do codificador sobre \mathbb{Z}_{p^k} por $p^k - g_{x,i}$ implica em obter uma matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ conjugada, e como $A = BB^H$, $\tilde{A} = \overline{(BB^H)} = \overline{A}$. Segundo [4], A é Hermitiana e portanto A e \overline{A} terão o mesmo posto, determinante e traço. \square

A Tabela 3.1 mostra, como exemplo, alguns STCCs equivalentes para constelações p^k -PSK.

Comentário 8 Note que através deste teorema é possível reduzir aproximadamente pela metade o número de STCCs a serem testados sem que os códigos com maior determinante e traço sejam descartados. Esta redução é obtida ignorando-se a verificação de códigos com coeficientes $p^k - g_{x,i}$.

3.4.2 Teorema 2

Com base em [29, Teorema 2], mostraremos um teorema a partir da qual é possível simplificar a busca de STTCs considerando que permutações nas linhas das matrizes diferenças de palavras-código não afetam características como posto, determinante e traço dos STTCs.

Teorema 2 Considere um STTC sobre \mathbb{Z}_{p^k} gerado por uma matriz geradora \mathbf{G} . Uma permutação das linhas de \mathbf{G} não afeta características como posto, determinante e traço do respectivo STTC.

Prova: Observando a estrutura do codificador da Figura 3.1 podemos facilmente notar que uma permutação nas linhas de sua matriz geradora \mathbf{G} implica em uma permutação nas linhas de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, pois cada saída v_t^i depende apenas dos coeficientes da i -ésima linha de \mathbf{G} . Em [29], devido à estrutura do codificador utilizado, as permutações nas linhas de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ são ocasionadas por permutações das colunas da matriz geradora, mas para analisar os efeitos que as permutações nas linhas de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ causam na matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, podemos utilizar a mesma prova apresentada em [29] para garantir que permutações nas linhas de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ não afetam características como posto, determinante e traço da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ correspondente. Esta prova é baseada no fato de que:

$$\det(A) = (-1)^q \det(\tilde{A}), \quad (3.9)$$

onde \tilde{A} é a matriz A permutada e q é o número de permutações realizadas tanto em linha como em coluna.

Sabemos que x permutações nas linhas de \mathbf{G} implicam em x permutações nas linhas de B . Ao se obter B^H , inevitavelmente são feitas mais x permutações em B . Com isso, A e \tilde{A} serão diferentes em $2x$ permutações e, portanto:

$$\det(A) = \det(\tilde{A}). \quad (3.10)$$

Tabela 3.2: Exemplos de STTCs Equivalentes - Teorema 2

$p^k - PSK$	n	Matriz \mathbf{G}	Matriz \mathbf{G} com Permutações nas Linhas	Determinante	Traço
4	2	[0 3 ; 1 3]	[1 3 ; 0 3]	2	6
7	3	[1 6 4 ; 3 3 2 ; 2 5 6]	[3 3 2 ; 1 6 4 ; 2 5 6]	0.44	21
9	3	[7 7 6 ; 6 2 8 ; 1 4 4]	[1 4 4 ; 7 7 6 ; 6 2 8]	0.35	18

Com relação ao traço de A , alterar quaisquer x linhas ou colunas de uma matriz simplesmente altera a ordem do somatório requerido para o cálculo de seu traço. \square

Na tabela 3.2, mostramos alguns exemplos de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} para ilustrar o Teorema 2.

Comentário 9 Note que com esse teorema é possível se obter uma redução factorial na busca de STTCs. Por exemplo, um sistema com $n = 3$ antenas transmissoras teria uma redução do número de códigos verificados de $3! = 6$ vezes.

Comentário 10 Uma maneira alternativa de se provar o Teorema 2 é através do seguinte argumento. Note que uma permutação das linhas de \mathbf{G} implicam numa correspondente permutação espacial das antenas transmissoras. Como supostamente o canal definido a partir de cada antena transmissora tem o mesmo comportamento estatístico, e como o critério de desempenho é baseado na probabilidade de erro média, tal permutação não deveria alterar o desempenho médio do sistema.

3.4.3 Teorema 3

Para finalizar o capítulo, apresentaremos um teorema que reduz o esforço da busca por STTCs projetados pelo critério do traço sem descartar os códigos ótimos. Essa redução é baseada no fato de que alterar uma linha da matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ por seu complexo conjugado não altera o traço da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ correspondente.

Teorema 3 Considere um STTC sobre \mathbb{Z}_{p^k} gerado por uma matriz geradora \mathbf{G} com coeficientes $g_{x,i}$, para $x = 0, 1, \dots, K$ e $i = 1, 2, \dots, n$. Alterar os coeficientes $g_{x,i}$ de χ linhas de \mathbf{G} por $p^k - g_{x,i}$, onde $1 \leq \chi \leq n$, não altera o traço da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ para qualquer par de palavras-código \mathbf{c} e \mathbf{e} do STTC.

Tabela 3.3: Exemplos de STTCs com Traços Iguais - Teorema 3

$p^k - PSK$	n	Matriz \mathbf{G}	Matriz \mathbf{G} com Algumas linhas $p^k - g_{k,i}$	Traço
3	2	[2 1 1 ; 1 1 2]	[2 1 1 ; 2 2 1]	18
8	3	[3 4 7 5 6 2 ; 7 1 3]	[5 4 1 5 6 2 ; 7 1 3]	19,17
11	3	[3 10 2 7 1 8 ; 6 1 6]	[8 1 9 4 10 3 ; 6 1 6]	16,42

Prova: Considere um codificador convolucional sobre $GF(p)$ de taxa $R = 1/n$ com uma matriz geradora escalar \mathbf{G} , definida na Seção 3.2. Como mostrado no Teorema 1, ao substituirmos os coeficientes $g_{x,i}$ de uma linha da matriz \mathbf{G} por $p^k - g_{x,i}$ estamos conjugando a correspondente linha da matriz diferença de palavras-código $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$. Pelo fato de $A = BB^H$, o elemento da diagonal $a_{i,i}$ da matriz A será dado pelo somatório dos módulos ao quadrado dos elementos da i -ésima linha da matriz B . Como $|b_{i,j}|^2 = |\bar{b}_{i,j}|^2$ e como o traço de uma matriz é dado pelo somatório dos elementos de sua diagonal, pode-se concluir que o Teorema 3 é verdadeiro. \square

A Tabela 3.3 apresenta alguns exemplos de STTCs para ilustrar este resultado.

Comentário 11 Note que esse resultado reduz a busca por um fator 2^n .

Comentário 12 Observe que quando todas as linhas são modificadas, i.e., $\chi = n$, esse teorema se torna o Teorema 1, e portanto se torna válida para simplificar também a busca de STTCs projetados pelo critério do determinante.

Capítulo 4

Resultados: Aplicações das Técnicas Propostas

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} obtidos a partir das técnicas propostas neste trabalho. Inicialmente, na Seção 4.1, será feita uma análise da redução de complexidade da busca de STTCs devido à estrutura do codificador utilizado e das técnicas propostas. A Seção 4.2 apresentará algumas tabelas contendo STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} , sendo alguns desses inéditos na literatura, e apresentará também comentários sobre as vantagens e desvantagens em se utilizar codificadores sobre corpos e anéis. Por último, na Seção 4.3, serão apresentados alguns resultados de simulações para comprovar o bom desempenho desses códigos diante dos canais com desvanecimento.

4.1 Simplificação da Busca de STTCs

Nesta seção mostraremos o quanto é possível reduzir a busca de STTCs utilizando a estrutura e as técnicas propostas nesta tese. Antes disso, para uma análise comparativa, apresentaremos a estrutura de codificação para STTCs usualmente utilizada na literatura.

4.1.1 Estrutura Padrão

Baro *et al.* [19] foram um dos pioneiros na sistematização da busca de STTCs. Eles utilizaram o conceito de matriz geradora para descrever os códigos, e assim realizaram as buscas variando os elementos desta matriz. Este processo tornou a busca por STTCs um pouco mais simples. Porém, quando se trata de busca exaustiva, o esforço computacional mesmo para os casos mais simples ainda é bastante elevado. A seguir, descreveremos esta estrutura.

Seja \mathbf{G}_b uma matriz geradora de dimensão $(z+K) \times n$ cujos elementos pertencem ao anel \mathbb{Z}_M , onde $z = \log_2(M)$ e K é o número de registradores do codificador. Seja $\mathbf{u}_t = (u_{zt+(z-1)} \dots u_{zt+1} u_{zt} \dots u_{zt-K})$ o vetor contendo os bits de informação. O vetor codificado é obtido pela operação

$$\mathbf{v}_t = (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{G}_b) \pmod{M},$$

seus elementos pertencem ao anel \mathbb{Z}_M e são diretamente mapeados em valores de uma constelação M -PSK, para em seguida serem transmitidos pelas n antenas transmissoras.

Com este esquema Baro *et al.* encontraram alguns STTCs com diversidade completa utilizando uma modulação 4-PSK e duas antenas transmissoras. Para um codificador com 4 estados foi obtido um STTC com ganho de codificação máximo a partir de uma busca exaustiva sobre todos os possíveis códigos desta estrutura. Para termos uma idéia da complexidade dessa busca, considere o codificador com 4 estados da Figura 4.1 cuja matriz \mathbf{G}_b é:

$$\mathbf{G}_b = \begin{bmatrix} g_{011} & g_{012} \\ g_{021} & g_{022} \\ g_{111} & g_{112} \\ g_{121} & g_{122} \end{bmatrix}$$

Como para esse exemplo foi utilizada uma modulação 4-PSK, houve a necessidade de analisar $4^8 = 65536$ códigos. Caso fosse utilizada uma modulação 8-PSK, o número total de códigos a serem analisados seria de $8^{12} = 68719476736$. Em [34], os autores propõem um método sub-ótimo para simplificar a busca nesta estrutura. Neste método, os coeficientes da matriz geradora para $n - 1$ antenas e um determinado número de

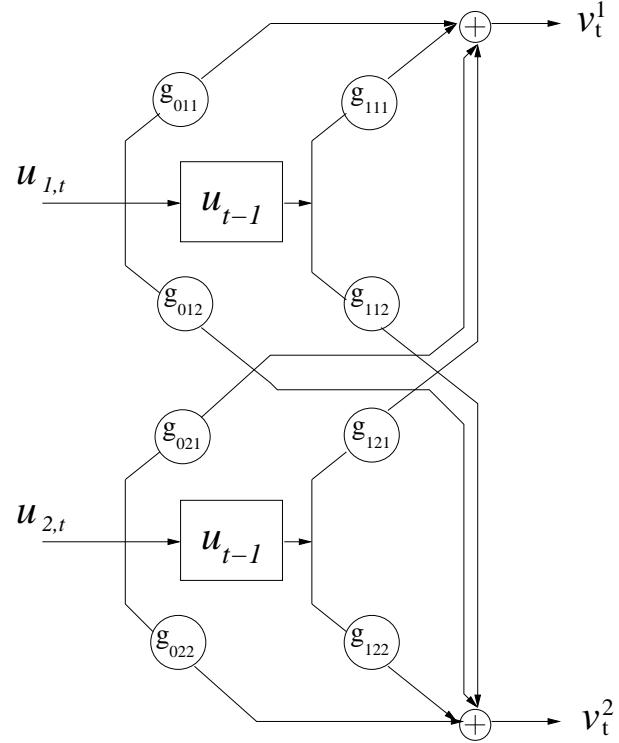


Figura 4.1: Exemplo da estrutura de codificação padrão de taxa $R = 1/2$ e 4 estados

estados são mantidos fixos e a busca ocorre apenas nos coeficientes extras que são adicionados devido à inserção da n -ésima antena transmissora.

Comentário 13 Note que nesse processo de busca todos os códigos são analisados, até mesmo os que não possuem posto suficiente para garantir o bom desempenho do código.

Comentário 14 Todos os códigos apresentados por Baro et al. em [19] são não-lineares sobre o anel \mathbb{Z}_{p^k} , visto que \mathbf{v}_t é um vetor binário e os elementos de \mathbf{G}_b estão sobre o anel.

A estrutura da Figura 4.1 é utilizada em [34], onde pode-se encontrar algumas tabelas contendo uma grande variedade de STTCs para as modulações 4 e 8-PSK.

Tabela 4.1: Comparaçāo das Estruturas para Buscas Exaustivas

$p^k - PSK$	n	N. de estados	N. total de códigos (Estrutura padrão)	N. total de códigos (Estrutura sobre o anel)
4	2	4	4^8	4^4
	2^*	8	4^{10}	4^9
	3	16	4^{18}	4^9
8	2	8	8^{12}	8^4
	2^*	16	8^{14}	8^9
	3	64	8^{27}	8^9
9	2	9	9^8	9^4
	3	81	9^{18}	9^9
16	2	16	16^{16}	16^4
	3	256	16^{36}	16^9

4.1.2 Estrutura Utilizada

Como visto na Seção 4.2, a estrutura de codificação proposta nesta tese para gerar os STTCs é diferente da apresentada na Seção 5.1.1, uma vez que nesta tese os símbolos de entrada estão sobre $GF(p)$ ou \mathbb{Z}_{p^k} e não apenas no corpo binário. Pelo fato de esta estrutura possuir um número menor de coeficientes, a busca exustiva neste caso é proporcionalmente reduzida. A seguir, na Tabela 5.1, faremos algumas comparações para quantificar esta redução. Note pela Tabela 5.1 que enquanto o número de códigos a serem analisados pela estrutura do anel (proposta nesta tese) é de $p^{kn(K+1)}$, com a estrutura padrão será de $p^{k^2n(K+1)}$, onde n é o número de antenas transmissoras e K é a ordem de memória do codificador sobre o anel.

Não podemos deixar de mencionar que em consequência da redução do número total de códigos a serem analisados no caso da estrutura sobre o anel, o código com o melhor ganho poderá ser descartado em alguns casos. Comentaremos melhor este fato na seção seguinte.

4.1.3 Técnicas Propostas

No capítulo anterior foram apresentadas seis técnicas que simplificam a busca por STTCs sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} . A seguir, mostraremos alguns exemplos numéricos para ilustrar estas simplificações.

Tabela 4.2: Busca exaustiva para STTCs com modulações p -PSK

p	n	K	N. total de códigos	Div. completa	Div. incompleta
3	2	1	81	48	33
	3	2	19683	11232	8451
5	2	1	625	480	145
	7	2	2401	2016	385

No primeiro exemplo, faremos referência à Tabela 4.2, a qual compara o número de códigos que são analisados em uma busca exaustiva para o caso de STTCs sobre $GF(p)$ considerando ou não a Conjectura 2. Quando a Conjectura 2 é utilizada, os códigos com diversidade incompleta são descartados e o cálculo do determinante e do traço são realizados apenas nos códigos com diversidade completa. Como mencionado anteriormente, essa conjectura é mais eficaz para o caso de STTCs projetados pelo critério do determinante, uma vez que esses códigos exigem diversidade completa. Quando o critério de projeto é o do traço, esta conjectura pode ser utilizada para garantir um posto mínimo r , tal que $rm \geq 4$.

Comentário 15 Nas buscas da Tabela 5.2, todos os possíveis códigos foram analisados de acordo com o critério do posto e em seguida classificados como sendo de diversidade completa ou não. Neste procedimento pôde-se verificar que todos os STTCs com diversidade completa possuíam matrizes \mathbf{G} com posto completo sobre $GF(p)$, enquanto os STTCs com diversidade incompleta não tinham esta mesma característica. Através destes resultados, pôde-se verificar também que a Conjectura 2 é uma condição necessária e suficiente para se obter STTCs com ganho de diversidade máximo.

A Tabela 4.3 ilustra, de maneira similar ao exemplo anterior, a redução da busca exaustiva para STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} proporcionada pela Conjectura 3. Os comentários anteriores feitos para a Tabela 4.2 também são válidos para a Tabela 4.3.

A redução proporcionada pelos Teoremas 1, 2 e 3 foram mencionadas no capítulo anterior e podem ser combinadas entre si para trazer uma redução significante na busca.

A seguir, mostraremos um exemplo para ilustrar a redução que pode ser obtida

Tabela 4.3: Busca exaustiva para STTCs com modulações p^k -PSK

p^k	n	K	N. total de códigos	Div. completa	Div. incompleta
4	2	1	256	96	160
8	2	1	4096	1536	2560
9	2	1	6561	3888	2673

combinando os resultados propostos nesta seção.

Exemplo 3 Considere um sistema com 3 antenas transmissoras e um codificador convolucional sobre \mathbb{Z}_4 de taxa $R = 1/3$ e $K = 2$. Para esta configuração, o número total de possíveis códigos é de $4^9 = 262144$. Se o critério de projeto for o do determinante, nós poderíamos utilizar o Teorema 1 e reduzir a busca para $4^9/2 = 131072$ códigos. Combinando este resultado com o Teorema 2, o número de código pode ser reduzido a $(4^9/2)/3! = 21845$ códigos. Destes 21845 códigos, ainda podemos utilizar a Conjectura 3 para testar apenas os códigos com diversidade completa e reduzir ainda mais a busca. Caso o critério de busca seja o do traço, ainda há a possibilidade de utilizar o Teorema 3 para reduzir o número de códigos para $((4^9/2)/3!)/2^3 = 2731$. Destes 2731 ainda poderíamos utilizar a Conjectura 3 para testar apenas os códigos cujo posto r mantenham a relação $rm \geq 4$.

Podemos comparar o exemplo anterior com as reduções obtidas por [34] e [29]. Em [34], utilizando um método sub-ótimo e a estrutura padrão, torna-se necessário testar $4^8 + 4^4 = 65792$ códigos. Já em [29], através das técnicas comentadas no Capítulo 3, consegue-se reduzir a busca para $(4^{12}/2)/3! = 1398101$ códigos. Apesar da redução obtida em [29] ser menor, o método aplicado não descarta os códigos com os melhores ganhos.

Comentário 16 Note que os métodos apresentados nesta tese para simplificar a busca exaustiva não descartam os códigos ótimos para as estruturas sobre corpos e anéis mas, como veremos na seção seguinte, existem casos em que o código ótimo obtido pela estrutura utilizada nesta tese tem ganho menor que o código ótimo obtido pela

estrutura padrão, considerando ambos os códigos equivalentes em número de antenas transmissoras e estados.

4.2 Resultados das Buscas de Códigos

Nesta seção, serão apresentados os resultados das buscas de códigos realizadas com o auxílio das técnicas propostas nesta tese. Na Subseção 4.2.1, serão apresentados os resultados de busca para STTCs com modulações p^k -PSK projetados pelo critério do determinante. Na Subseção 4.2.2 serão apresentados os STTCs projetados pelo critério do traço e serão feitos também alguns comentários sobre os resultados obtidos.

4.2.1 STTCs para Modulações p^k -PSK Projetados pelo Critério do Posto e do Determinante

Para STTCs com duas e três antenas transmissoras e uma receptora, a ordem de diversidade do sistema sempre será menor do que quatro e, portanto, os critérios de projeto mais apropriados para esta situação são o do posto e do determinante. Nesta subseção, apresentaremos varias tabelas (4.4 a 4.11) com STTCs para modulações p^k -PSK, utilizando duas, três e quatro antenas transmissoras. A ordem de memória dos codificadores varia de $K = 1$ até $K = 3$. Nestas tabelas serão indicados os seguintes dados: número de antenas transmissoras (n), número de estados ($n.$ de *est*), os coeficientes da matriz geradora (\mathbf{G}), o posto do STTC (*posto*) e a média geométrica mínima dos autovalores de $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ (η_{det}), indicando o ganho do STTC através do critério do determinante e o traço da matriz $A(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ (η_{tr}). A eficiência espectral dos códigos apresentados nesta subseção são de $\log_2 p^k$ b/s/Hz.

Comentário 17 *Em todas as tabelas desta subseção, os códigos que estiverem marcados com * são códigos obtidos através de uma busca exaustiva, ou seja, são os códigos que possuem os maiores parâmetros (posto, η_{det}) com relação à estrutura proposta nesta tese, ao número de antenas transmissoras, ao número de estados e a modulação utilizada, enquanto que os que estão sem * foram obtidos por uma busca parcial. Os códigos*

com a notação † são inéditos na literatura com relação à modulação, ao número de estados e/ou ao número de antenas transmissoras.

Tabela 4.4: STTCs para a modulação 3-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	3*	[0 1 ; 1 0]	2	3	6
	9*	[0 1 1 ; 2 1 2]	2	5, 19	15
2	27*	[1 1 0 2 ; 1 0 1 1]	2	7, 35	18
3	9†*	[0 0 1 ; 0 1 0 ; 1 0 0]	3	3	9
3	27†*	[2 2 0 2 ; 2 1 0 0 ; 2 2 1 1]	3	4, 76	27
4	27†	[0 0 2 0 ; 0 1 1 0 ; 2 2 0 2 ; 1 2 2 0]	4	3	27

Tabela 4.5: STTCs para a modulação 4-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	4*	[0 3 ; 1 3]	2	2	6
	8*	[1 0 1 ; 2 1 1]	2	4	8
2	16*	[0 1 1 ; 1 0 2]	2	4	10
2	64*	[1 0 1 2 ; 0 2 1 1]	2	6, 63	16
3	16*	[1 0 0 ; 0 0 1 ; 0 1 0]	3	2	6
3	64	[0 3 0 2 ; 1 0 2 0 ; 2 0 0 3]	3	4	12
4	64	[0 3 0 2 ; 3 3 1 2 ; 3 1 3 3 ; 3 3 2 3]	4	2	34

Tabela 4.6: STTCs para a modulação 5-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	5*	[3 0 ; 0 1]	2	2, 23	5
	25*	[1 0 2 ; 0 2 1]	2	3, 96	10
2	125†	[3 4 2 4 ; 0 4 1 1]	2	4, 28	14, 14
3	25†*	[0 4 3 ; 1 3 1 ; 2 1 1]	3	1, 94	17, 76
3	125†	[3 4 0 1 ; 0 2 0 0 ; 4 1 2 3]	3	2, 67	20
4	125†	[1 3 2 0 ; 4 1 0 0 ; 4 2 1 2 ; 4 4 0 0]	4	1, 75	24, 14

Tabela 4.7: STTCs para a modulação 7-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	7*	[5 3 ; 4 5]	2	1, 79	6, 39
	49†*	[0 1 2 ; 4 6 0]	2	3, 21	7, 75
3	49†	[6 0 0 ; 5 6 4 ; 0 4 1]	3	1, 93	12, 30

Tabela 4.8: STTCs para a modulação 8-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	8*	[4 1 ; 5 4]	2	2	4
	16*	[4 5 0 ; 7 4 1]	2	2	4
2	64†	[5 4 5 ; 1 1 4]	2	2, 83	8
3	64†	[0 7 4 ; 3 4 0 ; 4 0 1]	3	2	6

Tabela 4.9: STTCs para a modulação 9-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	9*	[6 4 ; 2 3]	2	1,06	6
	27 [†]	[0 8 6 ; 5 6 8]	2	1,79	6
2	81 [†]	[4 8 3 ; 1 0 5]	2	2,47	7,24
3	81 [†]	[0 5 5 ; 7 0 0 ; 0 8 0]	3	1,44	6,46

Tabela 4.10: STTCs para a modulação 11-PSK com $n = 2, 3$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
2	11 ^{†*}	[10 6 ; 6 1]	2	0,86	2,97
	121 [†]	[2 9 3 ; 7 4 0 ; 2 0 0]	3	1,07	6,60

Tabela 4.11: STTCs para a modulação 13, 16 e 17-PSK com $n = 2$ antenas transmissoras baseados nos critérios do posto e do determinante

$p^k - PSK$	n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{det}	η_{tr}
13	2	13 ^{†*}	[0 1 ; 5 0]	2	0,89	2,62
16	2	16*	[15 5 ; 9 8]	2	0,78	4,58
17	2	17 ^{†*}	[10 16 ; 6 4]	2	0,80	5,53

4.2.2 STTCs para Modulações p^k -PSK Projetados pelo Critério do Traço

Quando o sistema possuir uma configuração de antenas na qual seja possível se obter uma ordem de diversidade maior ou igual a quatro, o STTC utilizado terá um melhor desempenho se for projetado de acordo com o critério do traço. As tabelas a seguir (4.12 a 4.21) mostram STTCs obtidos pelo critério do traço em sistemas com duas, três e quatro antenas transmissoras utilizando modulações p^k -PSK. Para que o STTC tenha o melhor desempenho, é necessário que se tenha pelo menos duas antenas receptoras para o caso de $n = 2, 3$ e uma para o caso de $n = 4$. A eficiência espectral dos códigos apresentados nesta subseção são de $\log_2 p^k$ b/s/Hz.

Comentário 18 Novamente, em todas as tabelas desta subseção, os códigos que estiverem marcados com * são códigos obtidos através de uma busca exaustiva, ou seja, são os códigos que possuem os maiores parâmetros (posto, η_{det}) com relação à estrutura proposta nesta tese, ao número de antenas, ao número de estados e a modulação utilizada, enquanto que os que estão sem * foram obtidos por uma busca parcial. Os códigos com a notação † são inéditos na literatura com relação à modulação, ao número de estados e/ou ao número de antenas transmissoras.

Tabela 4.12: STTCs para a modulação 3-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	3^*	[1 1 ; 1 2]	2	12	3
2	9^*	[2 1 1 ; 1 1 2]	2	18	4, 24
2	27^*	[1 0 1 1 ; 1 1 1 2]	2	21	6, 70
3	$3^{\dagger*}$	[1 1 ; 1 2 ; 2 1]	2	18	—
3	$9^{\dagger*}$	[1 1 1 ; 1 1 2 ; 1 2 1]	3	27	3
3	$27^{\dagger*}$	[1 0 1 2 ; 1 1 1 1 ; 1 1 2 1]	3	33	4, 32
4	$3^{\dagger*}$	[1 1 ; 1 1 ; 1 1 ; 1 2]	2	24	—
4	$9^{\dagger*}$	[0 2 1 ; 1 1 1 ; 1 2 1 ; 2 2 1]	3	33	—
4	27^{\dagger}	[2 1 2 2 ; 2 0 2 1 ; 1 1 2 2 ; 2 2 2 1]	4	45	3

Tabela 4.13: STTCs para a modulação 4-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	4^*	[1 1 ; 1 2]	2	10	2
2	8^*	[1 1 0 ; 2 1 1]	2	12	3, 46
2	16^*	[1 1 2 ; 2 1 3]	2	16	3, 46
2	64^*	[1 0 1 2 ; 1 1 2 1]	2	18	5, 29
3	4^*	[1 1 ; 1 1 ; 1 2]	2	14	—
3	8^*	[3 3 0 ; 1 0 1 ; 1 3 1]	2	18	—
3	16^*	[1 1 1 ; 1 2 2 ; 2 1 3]	2	24	—
4	4^*	[1 1 ; 1 1 ; 1 2 ; 1 2]	2	20	—
4	8^*	[1 0 1 ; 1 1 0 ; 1 1 1 ; 1 3 1]	2	26	—
4	16^*	[1 1 1 ; 1 1 2 ; 1 2 2 ; 2 1 3]	3	32	—
4	64	[1 3 2 3 ; 1 2 1 1 ; 2 2 1 2 ; 3 3 1 0]	4	40	2

Tabela 4.14: STTCs para a modulação 5-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	5*	[1 1 ; 2 3]	2	10	1, 38
	25*	[2 1 3 ; 1 2 4]	2	15	3, 16
2	125†	[1 3 4 3 ; 2 4 0 1]	2	16, 38	4, 66
3	5†*	[1 1 ; 1 2 ; 2 2]	2	15	—
3	25†*	[1 1 1 ; 1 3 2 ; 2 3 1]	3	21, 38	1
3	125†	[4 2 2 2 ; 1 2 1 1 ; 2 4 2 4]	3	30	1, 66
4	5†*	[1 2 ; 1 2 ; 2 1 ; 2 1]	2	20	—
4	25†	[1 1 1 ; 1 1 2 ; 2 1 3 ; 2 2 3]	3	30	—
4	125†	[1 0 1 1 ; 2 2 3 4 ; 3 2 3 0 ; 4 0 4 3]	4	31, 01	0, 85

Tabela 4.15: STTCs para a modulação 7-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	7*	[1 1 ; 2 3]	2	7, 75	0, 75
	49*	[1 1 2 ; 2 4 4]	2	12, 30	1, 36
3	7†*	[2 4 ; 3 5 ; 6 1]	2	14	—
3	49†	[1 6 4; 3 3 2 ; 2 5 6]	3	21	0, 44
4	7†*	[1 1 ; 1 2 ; 2 3 ; 3 3]	2	17, 19	—
4	49†	[4 5 6 ; 2 4 1 ; 1 2 1 ; 4 4 4]	3	24, 95	—

Tabela 4.16: STTCs para a modulação 8-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	8*	[1 2 ; 4 3]	2	7, 17	1, 41
	16*	[2 1 0 ; 3 0 1]	2	8	2
2	64	[5 1 6 ; 1 1 3]	2	10, 58	1, 17
3	8*	[1 1 ; 2 2 ; 3 4]	2	12	—
3	16	[5 1 0 ; 3 6 1 ; 1 5 0]	2	12, 58	—
3	64	[3 4 7 ; 5 6 2 ; 7 1 3]	3	19, 17	0, 32
4	8*	[1 1 ; 1 2 ; 2 3 ; 3 4]	2	16, 58	—
4	16	[2 2 1 ; 1 6 0 ; 5 7 0 ; 5 5 1]	12	20	—

Tabela 4.17: STTCs para a modulação 9-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	9*	[6 1 ; 7 4]	2	6, 77	0, 51
	27 [†]	[1 6 1 ; 7 7 1]	2	8, 58	0, 65
2	81 [†]	[8 6 7 ; 7 6 1]	2	10, 24	1, 04
3	9*	[1 3 ; 6 4 ; 7 2]	2	12	—
3	27 [†]	[7 7 6 ; 6 2 8 ; 1 4 4]	3	18	0, 35
4	9 [†]	[1 6 ; 4 8 ; 2 4 ; 6 2]	2	18	—

Tabela 4.18: STTCs para a modulação 11-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	11 ^{†*}	[1 2 ; 4 6]	2	6, 69	0, 46
	11 [†]	[1 3 ; 2 1 ; 5 7]	2	11, 31	—
4	11 [†]	[9 4 ; 5 5 ; 8 8 ; 10 10]	2	15, 79	—

Tabela 4.19: STTCs para a modulação 13-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	$13^{\dagger*}$	[1 5 ; 9 11]	2	5, 96	0, 44
3	13^{\dagger}	[3 6 ; 9 5 ; 11 1]	2	11, 27	—
4	13^{\dagger}	[5 3 ; 8 12 ; 4 7 ; 1 2]	2	15, 62	—

Tabela 4.20: STTCs para a modulação 16-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	16^*	[5 12 ; 13 5]	2	5, 75	0, 28
3	16^{\dagger}	[5 1 ; 6 7 ; 2 13]	2	11, 35	—
4	16^{\dagger}	[3 14 ; 5 1 ; 2 7 ; 6 10]	2	16	—

Tabela 4.21: STTCs para a modulação 17-PSK com $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras baseados no critério do traço

n	n. de est.	\mathbf{G}	posto	η_{tr}	η_{det}
2	$17^{\dagger*}$	[1 3 ; 5 13]	2	5, 54	0.24
3	17^{\dagger}	[15 1 ; 5 11 ; 4 8]	2	10, 75	—
4	17^{\dagger}	[12 13 ; 9 10 ; 15 11 ; 3 16]	2	17	—

Comentário 19 Os STTCs listados anteriormente (Tabelas 4.4 a 4.21) não levam em consideração o espectro de cada código, ou seja, é possível que códigos com parâmetros idênticos aos apresentados aqui tenham um desempenho melhor.

Como pode-se observar nas tabelas desta seção, é apresentada uma grande variedade de STTCs para modulações p^k -PSK, onde boa parte dos códigos não é encontrada na literatura. A seguir, apresentaremos as Tabelas 4.22 e 4.23 que comparam alguns STTCs de [34], com modulações 4 e 8-PSK, com alguns códigos encontrados nesta tese, sendo esta comparação feita sempre para códigos com mesma eficiência espectral. Já para os códigos com modulação p -PSK, a única estrutura que existe na literatura é a estrutura utilizada nesta tese e, portanto, não apresentaremos uma tabela comparativa tendo em vista que os STTCs apresentados aqui têm os mesmos ganhos quando comparados com os poucos STTCs sobre $\text{GF}(p)$ encontrados na literatura [26].

Tabela 4.22: Comparação entre STTCs - Critérios do posto e do determinante

p^k -PSK	n	n. de est.	η_{det} [34]	η_{tr} [34]	η_{det}	η_{tr}
4-PSK	2	4	2,82	—	2	6
	2	8	4	—	4	8
	2	64	6,92	—	6,63	16
	3	64	4,57	18	4	12
	4	64	2,82	26	2	34
8-PSK	2	8	2	4	2	4
	2	16	2	4	2	4

Pela Tabela 4.22 pode-se observar que os STTCs apresentados nesta tese que utilizam modulações 4 e 8-PSK e que são projetados pelo critério do posto e do determinante, não conseguem obter, na maioria dos casos, o mesmo determinante que os STTCs equivalentes obtidos pela estrutura padrão. Para a modulação 8-PSK com $n = 3, 4$ antenas transmissoras bem como para a 16-PSK ($n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras), não foram encontradas referências que apresentassem STTCs gerados pela estrutura padrão.

Através da Tabela 4.23, nota-se que quando o critério de projeto é o do traço os códigos propostos neste trabalho obtiveram, na maioria das vezes, o mesmo ganho que os códigos obtidos através da estrutura padrão.

Uma outra fonte de tabelas de STTCs é a referência [29], onde os resultados apresentam códigos com 4 e 32 estados para $n = 5, 6$ antenas transmissoras e modulação 4-PSK. Apesar de o método de busca utilizado em [29] ser ótimo, o esforço computacional para casos mais complexos torna a busca proibitiva, uma vez que eles utilizam a estrutura padrão para obtenção dos códigos. Com relação aos ganhos dos STTCs encontrados em [29], não são feitas comparações uma vez que a configuração de $n = 5, 6$ antenas transmissoras não é considerada em nenhum dos trabalhos citados nesta tese.

Segundo os resultados de busca obtidos nesta seção, podemos dizer que a estrutura que utilizamos nesta tese é uma boa opção para realizar buscas exaustivas mais complexas de STTCs projetados pelo critério do traço, porém quando os critérios de projetos são os do posto e do determinante, e quando as modulações são 4 e 8-PSK, esta estrutura não apresenta resultados muitos satisfatórios.

Comentário 20 *Devido ao fato de o método utilizado em [34] não ser ótimo, casos onde o traço obtido pela estrutura padrão é menor que o obtido pela estrutura sobre o anel se tornam possíveis (veja a linha da Tabela 4.23 marcada com *). Por outro lado, a estrutura padrão fornece um universo maior para a busca e por isso o caso contrário pode acontecer (veja as linhas da Tabela 4.23 marcadas com **).*

Tabela 4.23: Comparação entre STTCs - Critério do traço

p^k -PSK	n	n. de est.	η_{tr} [34]	η_{det} [34]	η_{tr}	η_{det}
4-PSK	2	4	10	2	10	2
	2	8	12	2, 82	12	3, 46
	2	16	16	2, 82	16	3, 46
	2	64	18	4	18	5, 29
	3**	4	16	—	14	—
	3**	8	20	—	18	—
	3	16	24	—	24	—
	4	4	20	—	20	—
	4	8	26	—	26	—
	4	16	32	—	32	—
8-PSK	4*	64	38	—	40	2
	2	8	7, 17	1, 41	7, 17	1, 41
	2	16	8	0, 82	8	2
	3	8	12	—	12	—
	4	8	16, 58	—	16, 58	—

4.3 Resultados de Simulações

Nesta seção, serão apresentadas simulações de alguns dos STTCs obtidos e tabelados anteriormente. Através destes resultados, será possível comprovar o bom desempenho desses códigos diante do canal com desvanecimento, e ainda observar os impactos de seus parâmetros nas curvas de desempenho. Para estas simulações, será considerado que cada frame tem comprimento de 130 símbolos.

Os primeiros resultados apresentados (Figuras 4.2 a 4.7) mostram o desempenho, em termos de FER (FER, do inglês: *Frame Error Rate*) versus $SNR = nEs/No$, de STTCs sobre $GF(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} projetados pelos critérios do posto e do determinante. Em cada figura é feita uma comparação entre códigos com mesma eficiência espectral e números de estados diferentes, o que possibilita observar o aumento do ganho de codificação (deslocamento horizontal da curva para a esquerda) de acordo com o aumento do número de estados. Os códigos simulados neste conjunto de figuras utilizam $n = 2, 3$ antenas transmissoras, $m = 1$ antena receptora e atingem grau de diversidade de nm . Este conjunto de figuras tem o objetivo apenas de apresentar o desempenho de alguns STTCs obtidos nesta tese.

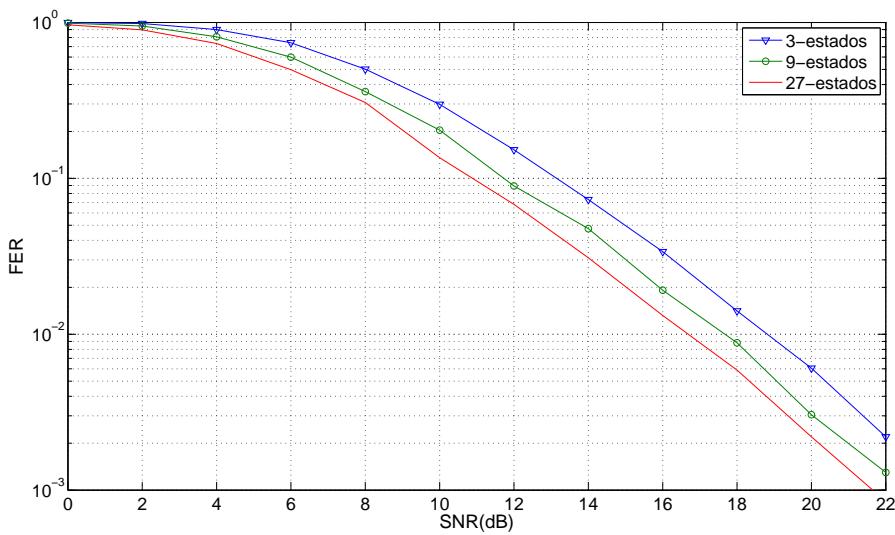


Figura 4.2: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

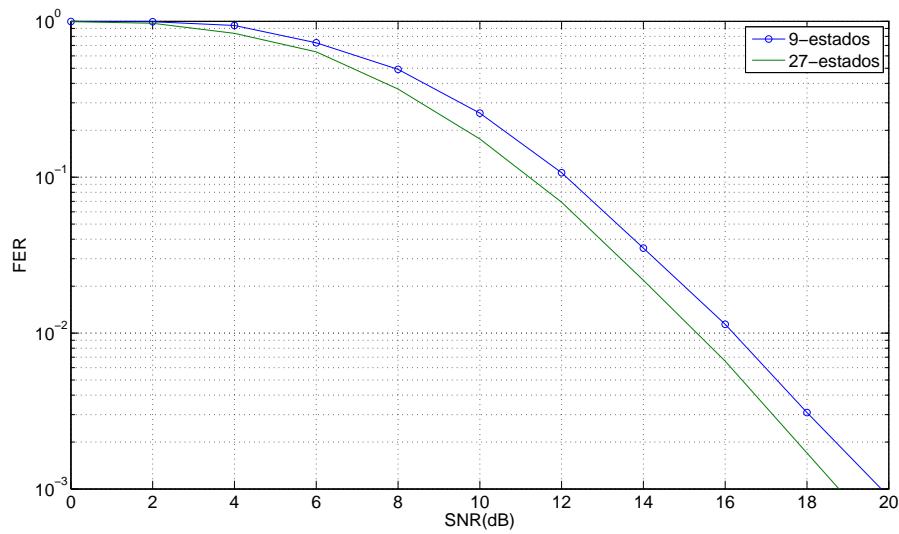


Figura 4.3: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

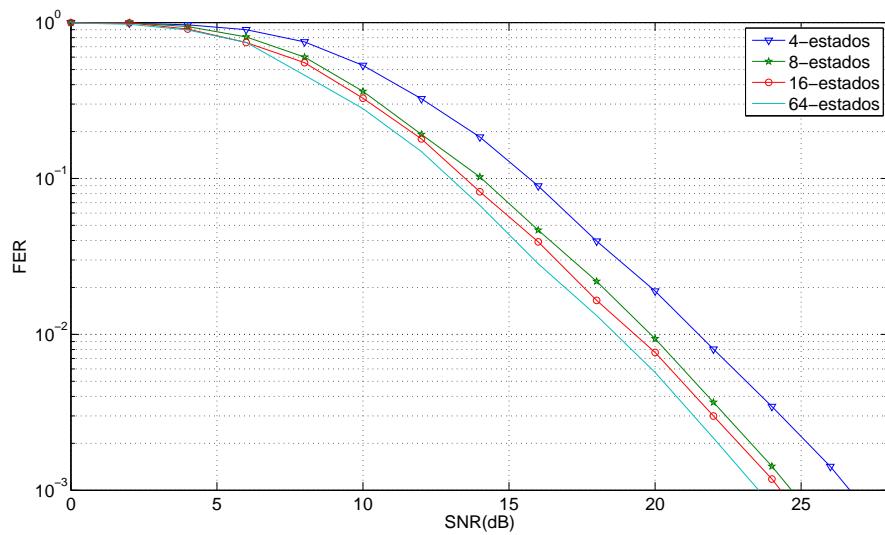


Figura 4.4: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

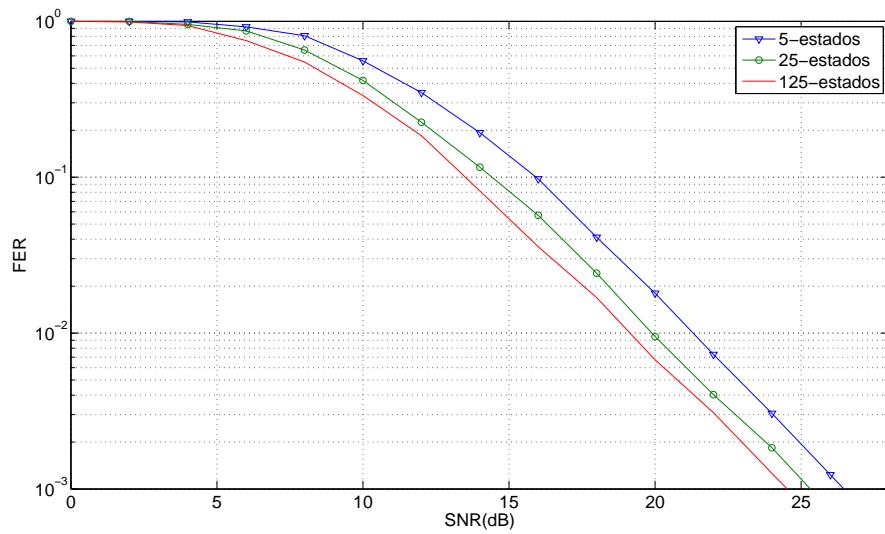


Figura 4.5: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

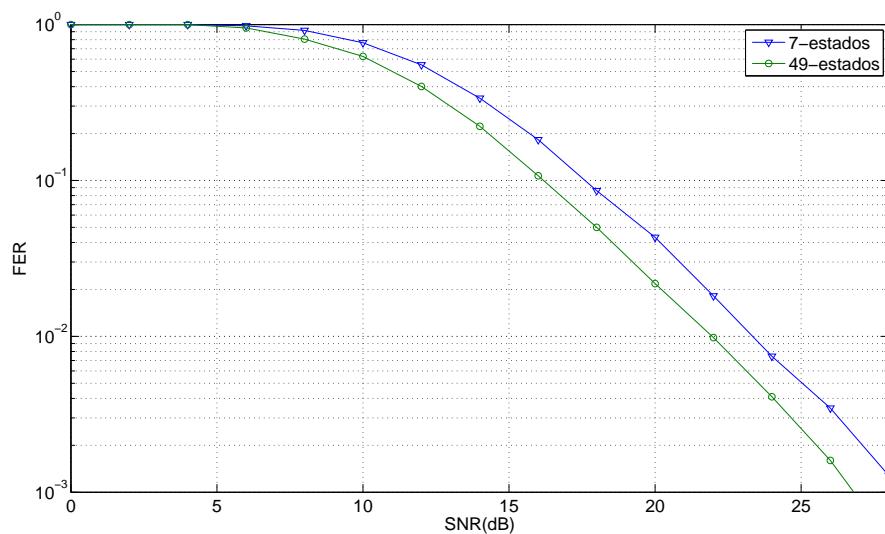


Figura 4.6: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

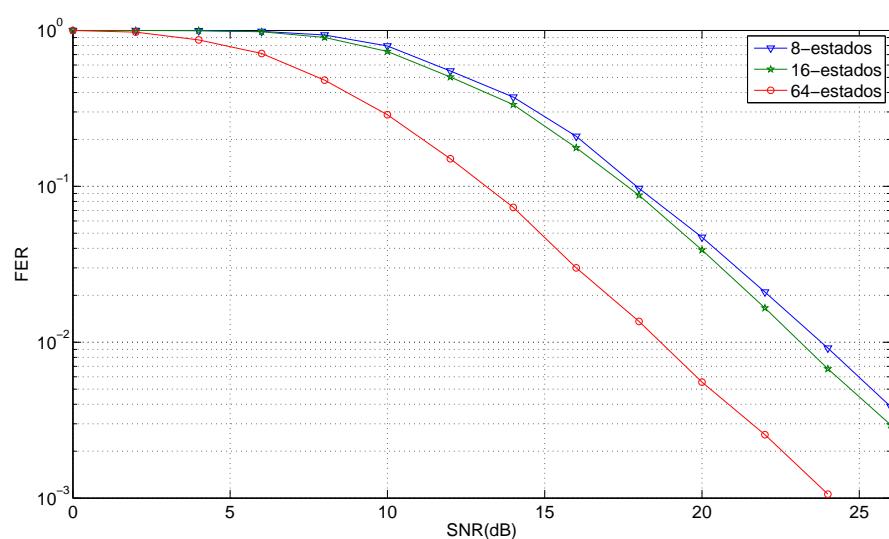


Figura 4.7: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ receptora.

Comentário 21 Devemos notar que em alguns casos, ex. Figura 5.4, aumentar o número de estados não é tão compensador. Entretanto, para o caso apresentado na Figura 5.7, por exemplo, aumentar de 16 para 64 estados leva a um ganho de aproximadamente 5 dB, que é bastante expressivo. Essa mesma observação se aplica aos demais casos , analisados a seguir.

O conjunto das Figuras 4.8 a 4.22 mostram o desempenho de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} projetados pelo critério do traço. Novamente é possível observar o aumento do ganho de codificação, neste caso mensurado pelo traço, proporcionado pelo aumento do número de estados. Para estas simulações foram utilizadas $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ antenas receptoras, o que proporciona um grau de diversidade de $rm \geq 4$. Novamente, o objetivo deste conjunto de curvas é apenas apresentar o desempenho de alguns STTCs obtidos nesta tese.

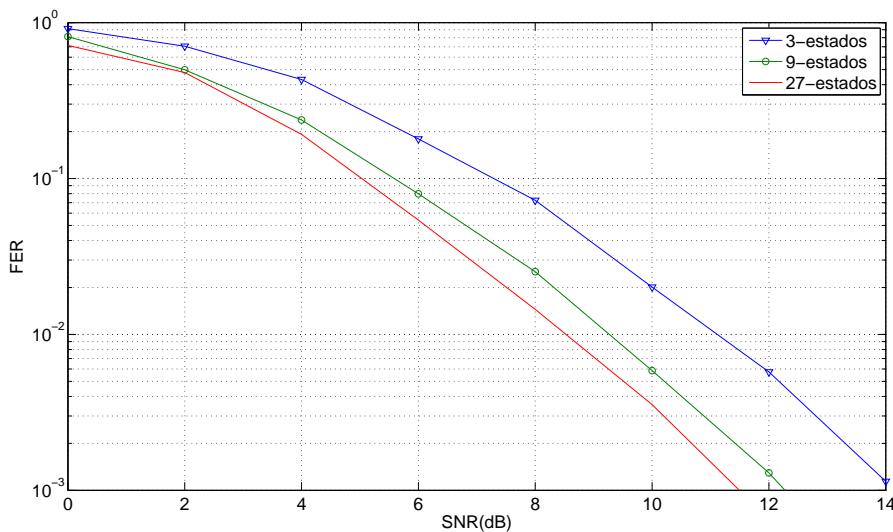


Figura 4.8: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

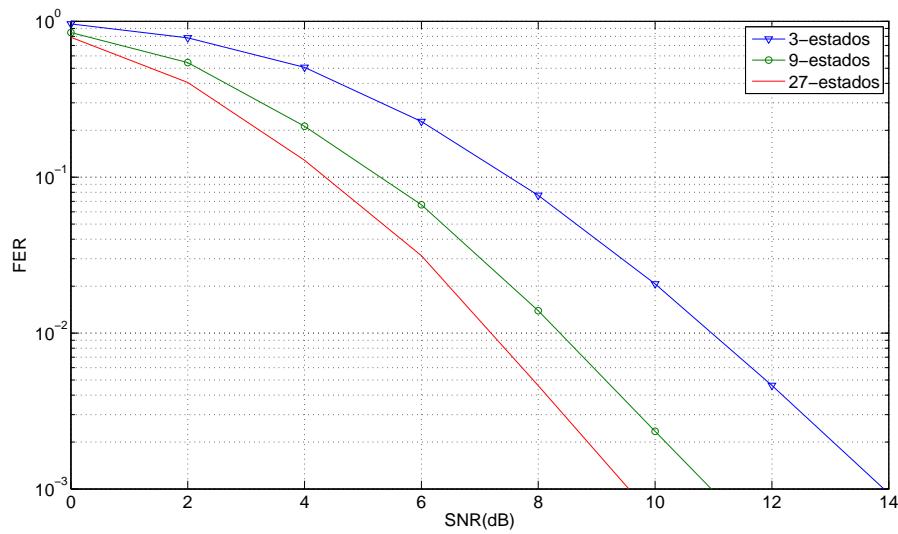


Figura 4.9: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

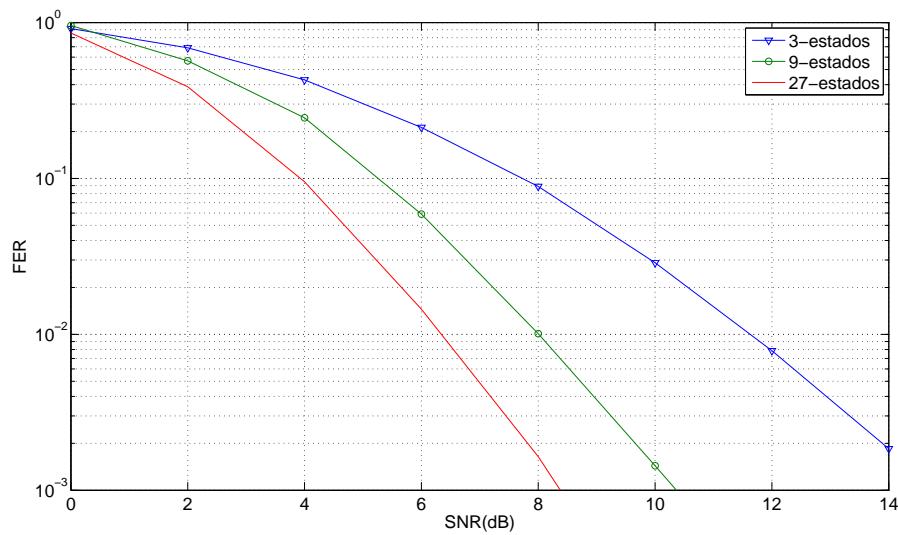


Figura 4.10: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 3-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

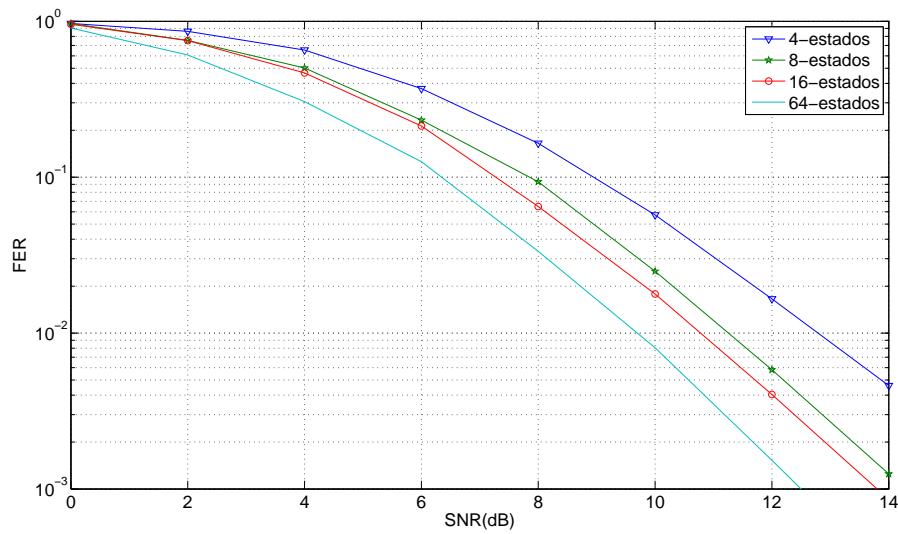


Figura 4.11: Comparação do desempenho de STTCs com modulaao 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

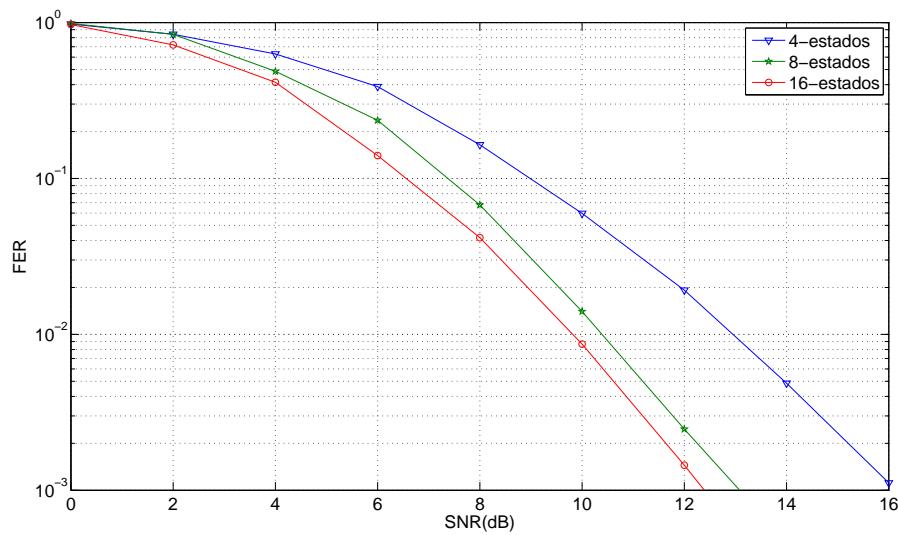


Figura 4.12: Comparao do desempenho de STTCs com modulaao 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

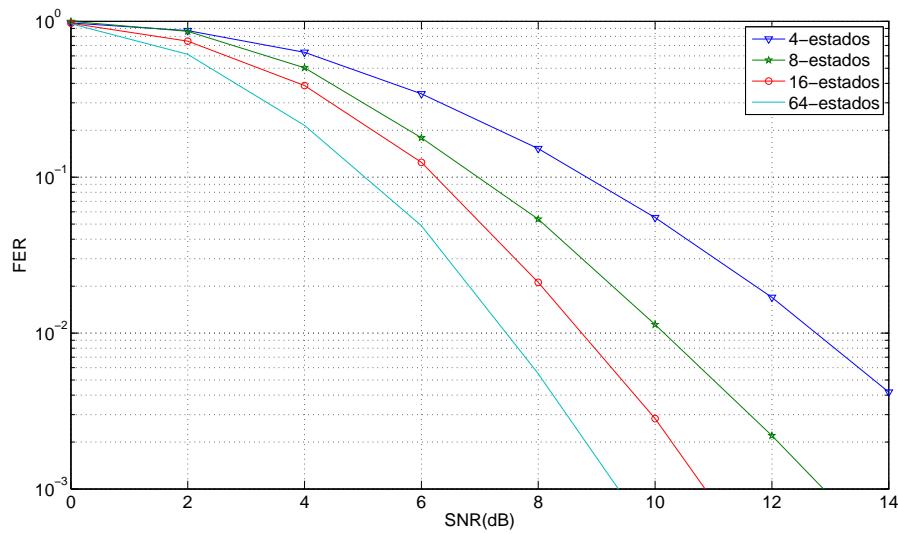


Figura 4.13: Comparação do desempenho de STTCs com modulaao 4-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

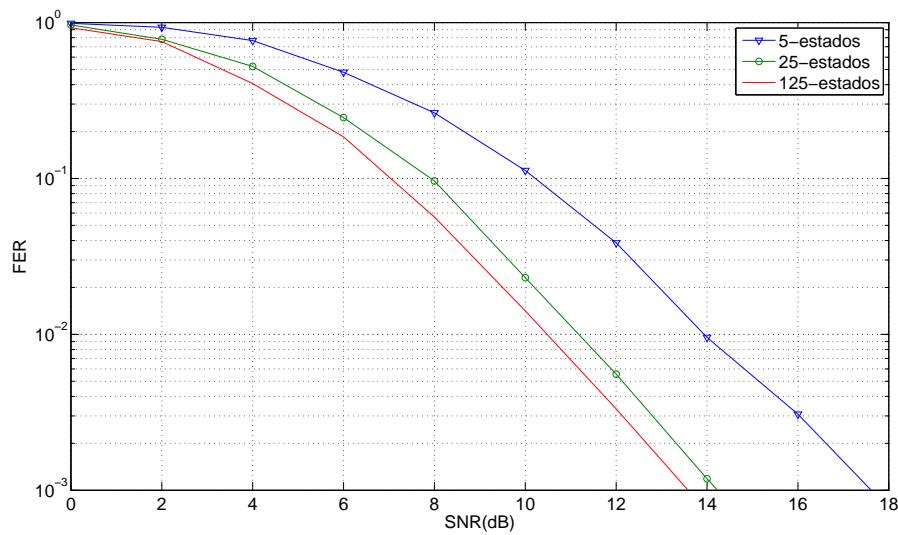


Figura 4.14: Comparao do desempenho de STTCs com modulaao 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

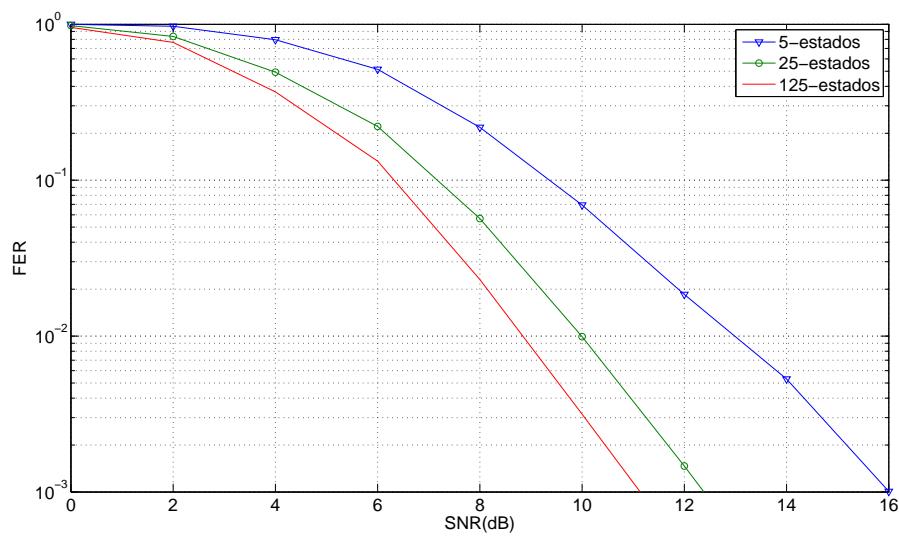


Figura 4.15: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

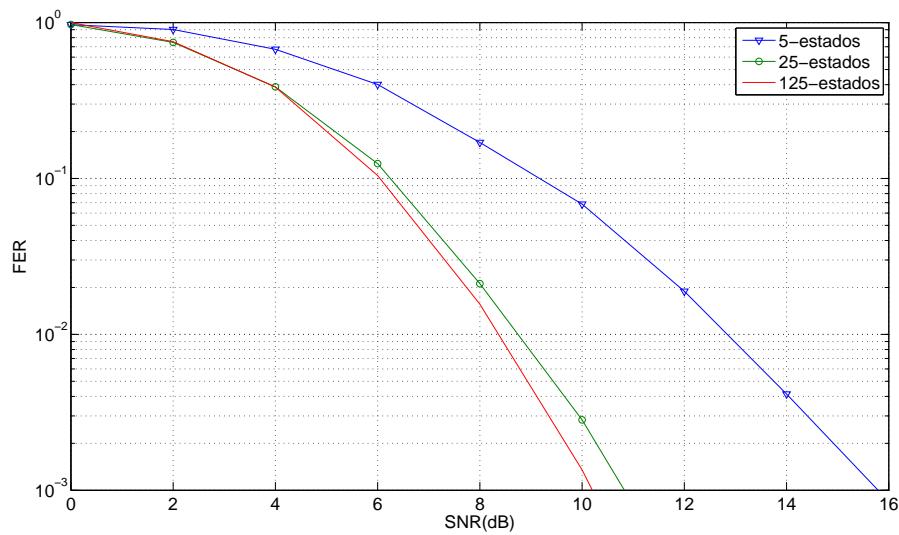


Figura 4.16: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 5-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

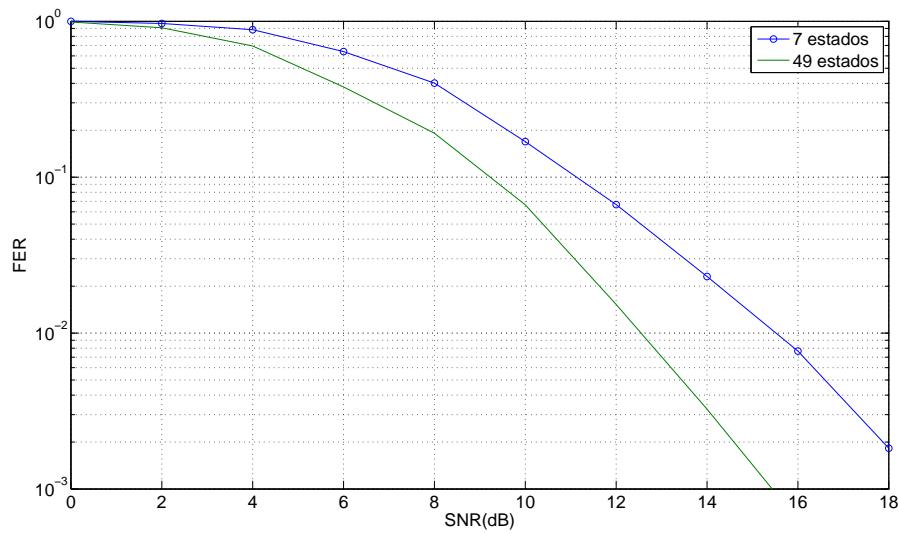


Figura 4.17: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

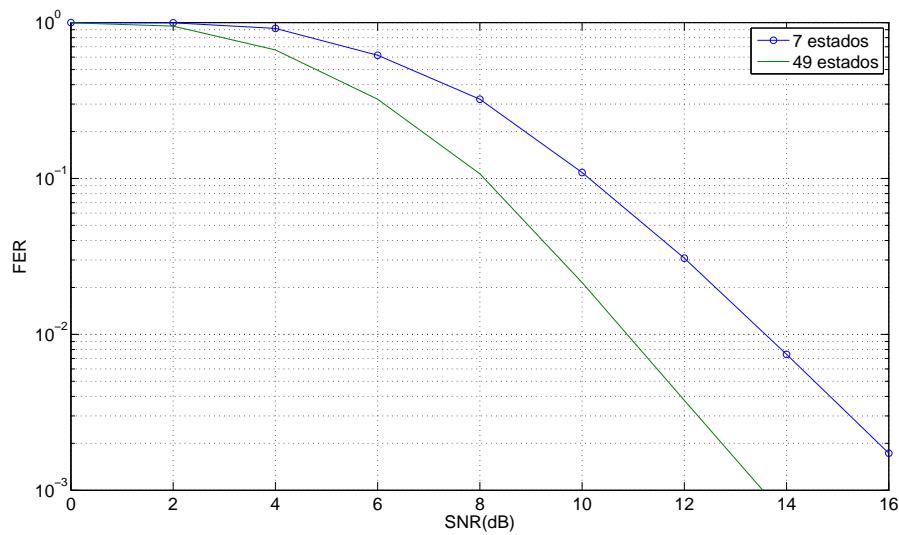


Figura 4.18: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

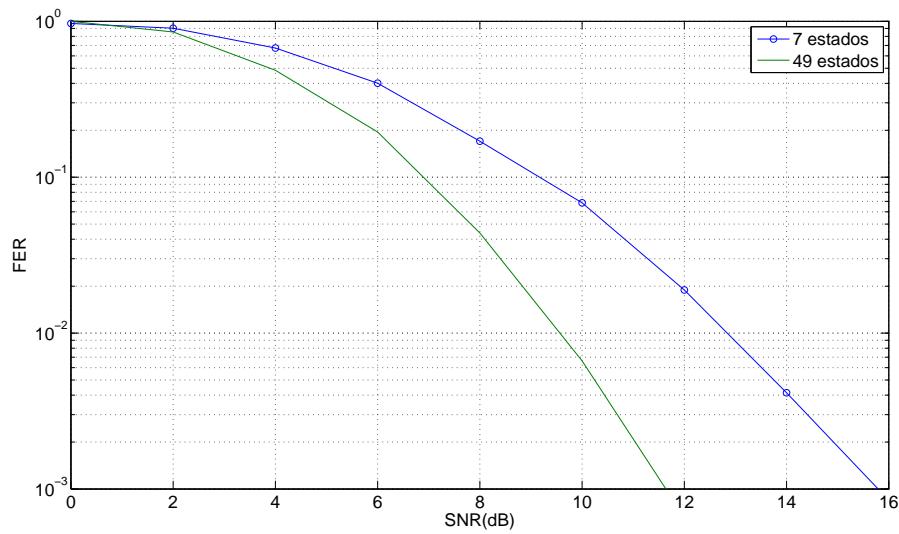


Figura 4.19: Comparaçāo do desempenho de STTCs com modulaçāo 7-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

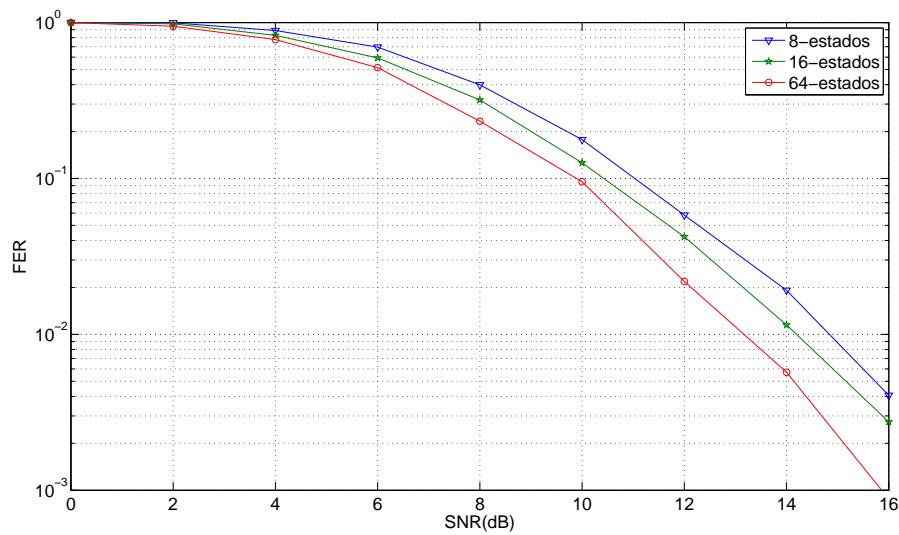


Figura 4.20: Comparaçāo do desempenho de STTCs com modulaçāo 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

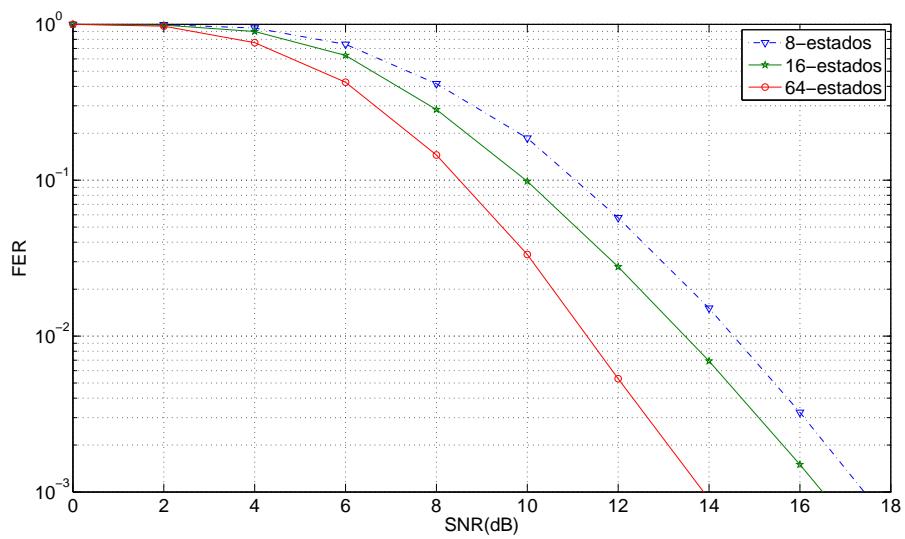


Figura 4.21: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

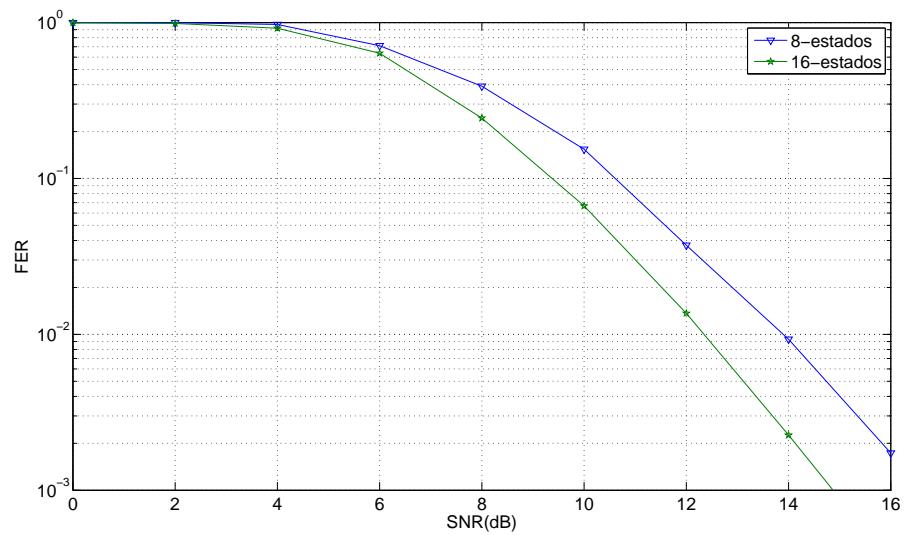


Figura 4.22: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 8-PSK baseados no critério do traço, projetados para sistemas com $n = 4$ antenas transmissoras e $m = 2$ receptoras.

Nas Figuras 4.23 a 4.26 é possível observar os efeitos do número de antenas transmissoras e receptoras no desempenho dos STTCs. As Figuras 4.23, 4.24 e 4.25, apresentam STTCs para as constelações 4, 5 e 8-PSK com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras. Nestas figuras pode-se observar ao mesmo tempo os efeitos da diversidade de transmissão e recepção. O ganho de diversidade de transmissão só é atingido quando o posto do código aumenta junto com o número de antenas transmissoras e quando $rm < 4$. Um caso em que o aumento do número de antenas transmissoras não implica num aumento da diversidade pode ser observado na Figura 4.25. Isso acontece porque os códigos com $n = 2, 3$ e 4 têm o mesmo posto, no caso, posto 2. Observe também que quando $rm < 4$ ($n = 2, 3$ e $m = 1$), os códigos têm um desempenho semelhante e são dominados pelos critérios do posto e do determinante, e quando $rm \geq 4$ o desempenho passa a ser descrito pelo critério do traço, e com isso os códigos com maiores traços possuem um melhor desempenho. Na Figura 4.26 fica bem evidente o efeito da diversidade de transmissão, pois nesse caso o posto do código aumentou junto com o número de antenas transmissoras. No caso da diversidade de recepção, um aumento do número de antenas receptoras implica em um aumento direto na ordem de diversidade do sistema sem depender do posto do código. Esta característica pode ser observada nas Figuras 4.23 a 4.25.

A seguir, as Figuras 4.27 a 4.29 mostram uma comparação entre o desempenho e a eficiência espectral de STTCs sobre $\text{GF}(p)$ e \mathbb{Z}_{p^k} para várias modulações PSK. Nestas figuras todos os STTCs têm o mesmo grau de diversidade.

Na Figura 4.30 é feita uma comparação entre códigos obtidos por diferentes critérios de projeto. Neste caso, os dois STTCs utilizam $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ e 4 antenas receptoras. O STTC1, apresentado na Tabela 4.3, tem $\eta_{det} = 2$. O STTC2 foi apresentado em [34] e tem $\eta_{det} = 2,81$ (um dos códigos com o maior ganho de codificação encontrado na literatura). Ambos os códigos utilizam mesma modulação (4-PSK) e possuem 4 estados. Note que para $m = 1$ os códigos têm quase o mesmo desempenho. Mas à medida que m aumenta o STTC1 começa a ter um desempenho melhor. Isto pode ser explicado devido ao fato de a distância Euclidiana quadrática mínima do STTC1 ser igual a 8, enquanto que a do STTC2 é igual a 6. Como esperado, pôde-se comprovar o resultado da literatura de que quando o produto

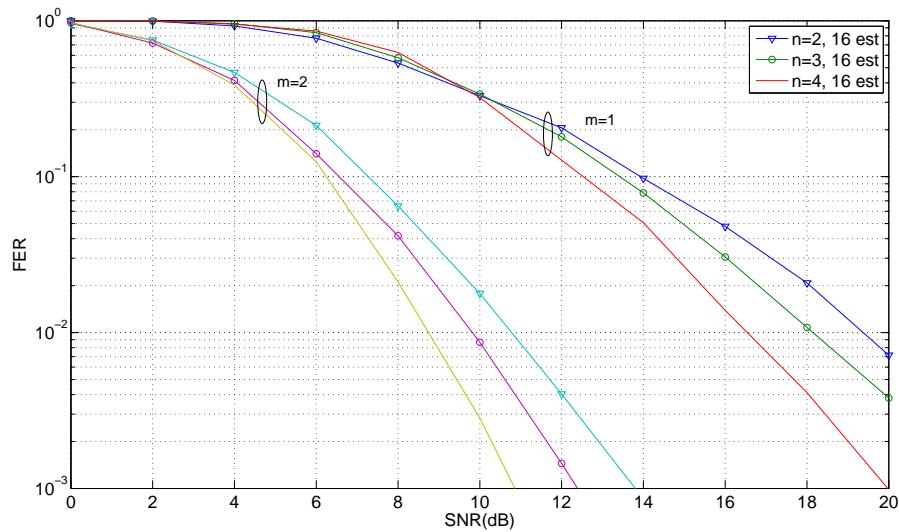


Figura 4.23: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.

$rm \geq 4$, o desempenho do código passa a ser dominado pela distância Euclidiana quadrática, e não mais pelos critérios do posto e do determinante.

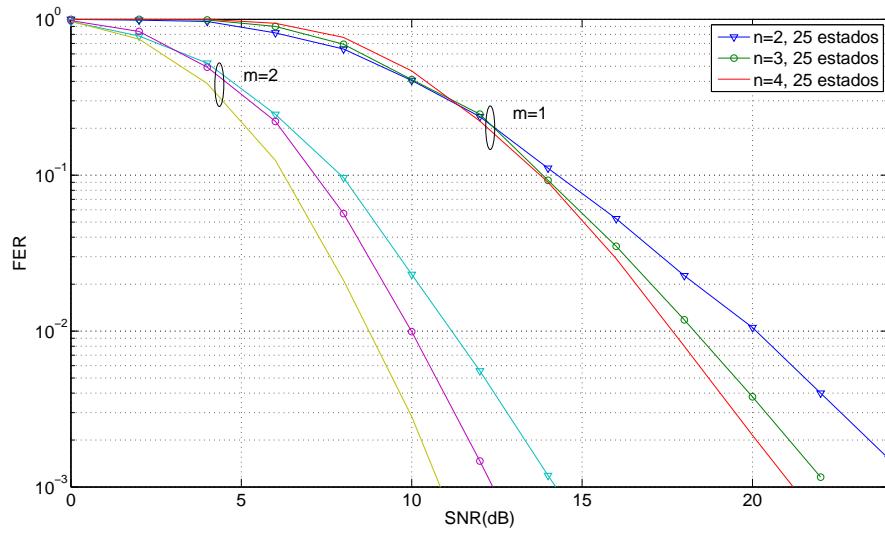


Figura 4.24: Comparaçāo do desempenho de STTCs com modulaçāo 5-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.

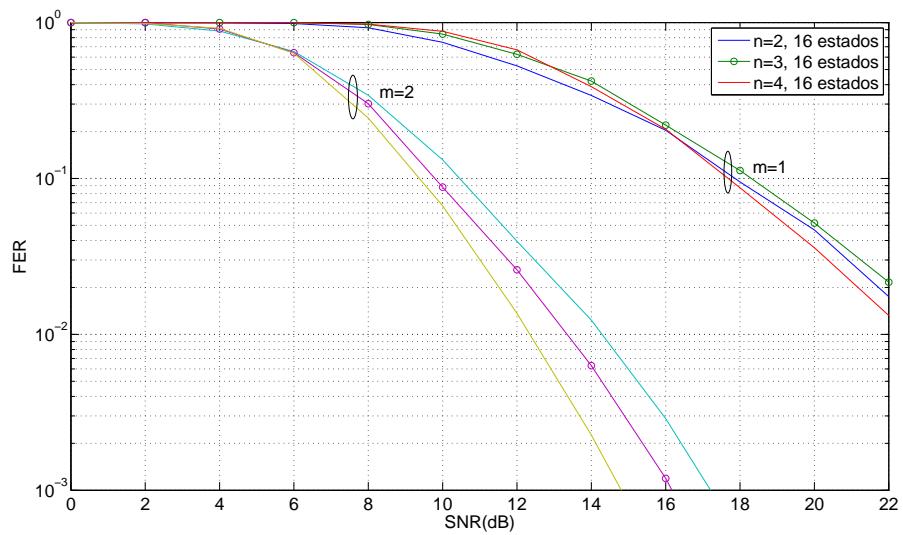


Figura 4.25: Comparaçāo do desempenho de STTCs com modulaçāo 8-PSK baseados no critério do traço e projetados para sistemas com $n = 2, 3, 4$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.

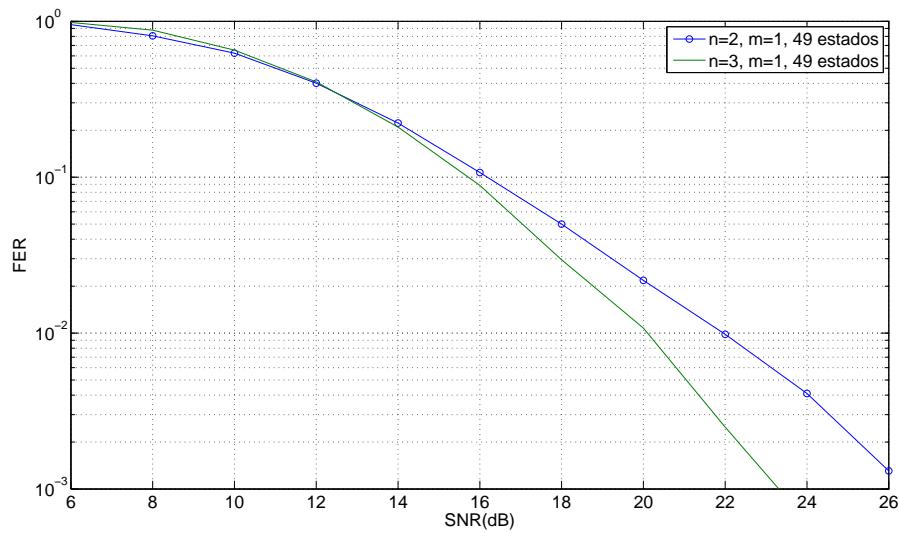


Figura 4.26: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 7-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 2, 3$ antenas transmissoras e $m = 1$ antenna receptora.

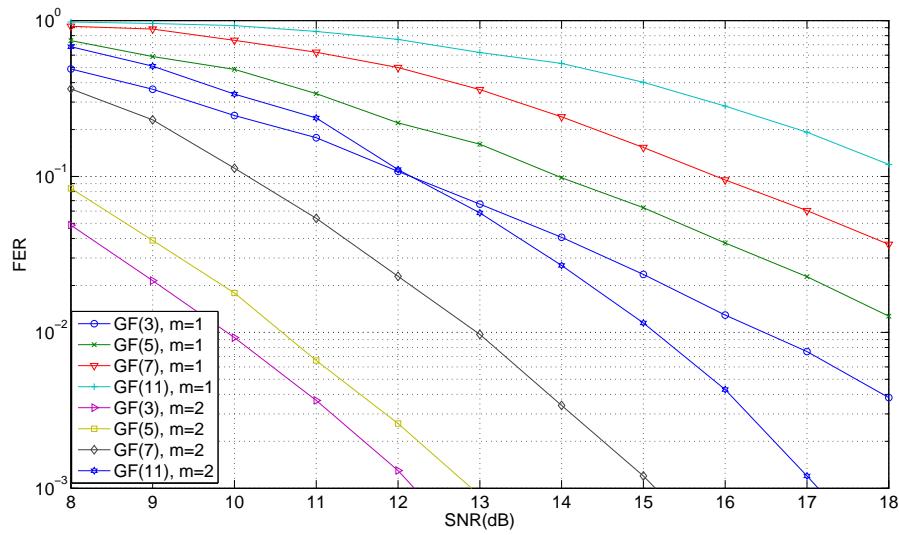


Figura 4.27: Comparação do desempenho de STTCs com modulações 3, 5, 7 e 11-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 3$ antenas transmissoras e $m = 1, 2$ antenas receptoras.

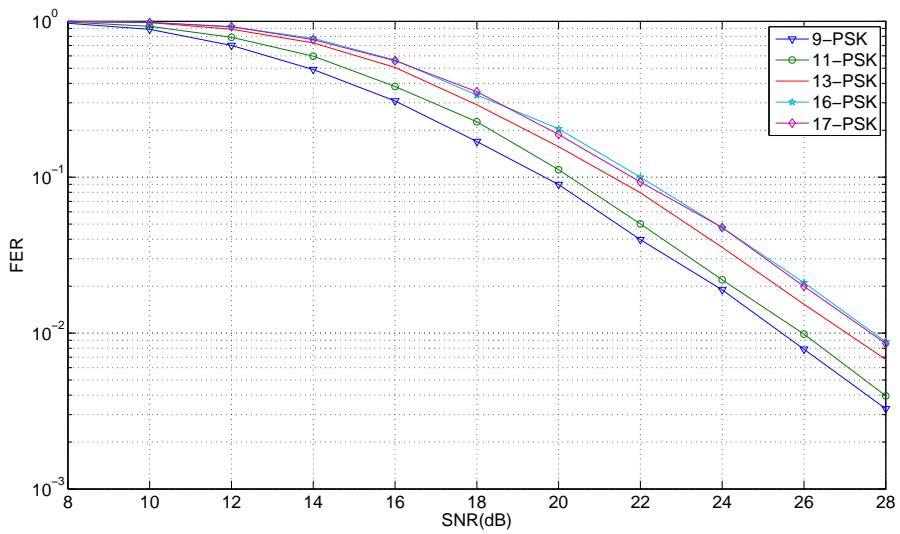


Figura 4.28: Comparação do desempenho de STTCs com modulaao 9, 11, 13, 16 e 17-PSK baseados nos critérios do posto e do determinante e projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 1$ antena receptora.

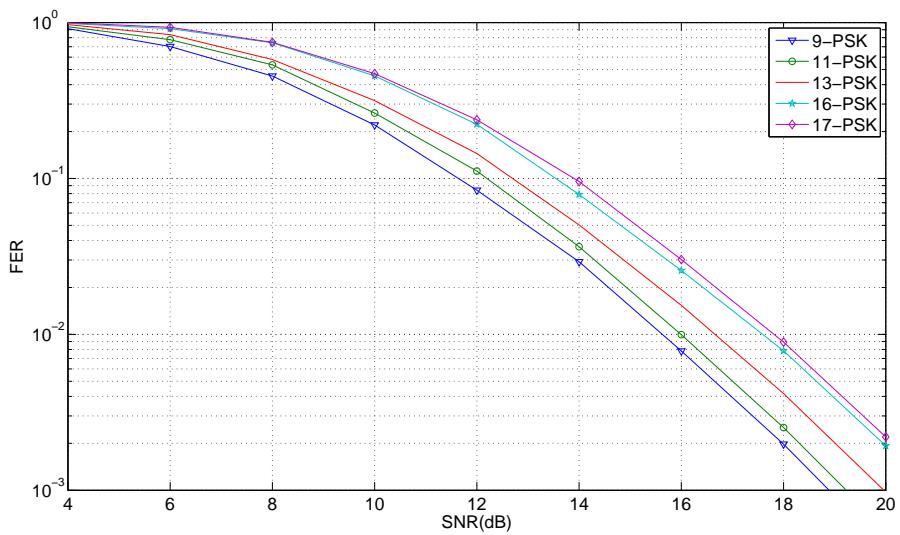


Figura 4.29: Comparao do desempenho de STTCs com modulaao 9, 11, 13, 16 e 17-PSK baseados no critério do trao e projetados para sistemas com $n = 2$ antenas transmissoras e $m = 2$ antenas receptoras.

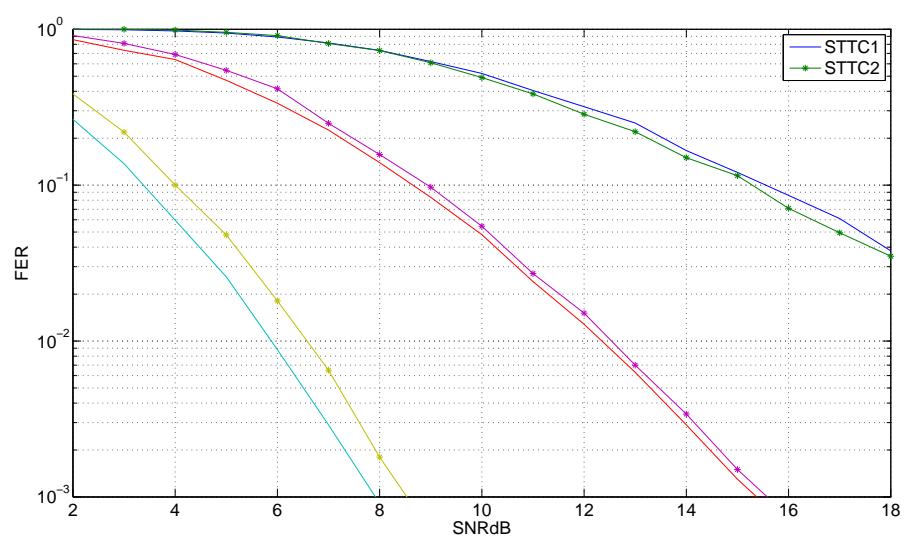


Figura 4.30: Comparação do desempenho de STTCs com modulação 4-PSK projetados por diferentes critérios.

Capítulo 5

Conclusão e Trabalhos Futuros

Nesta tese consideramos códigos espaço-temporais de treliça sobre $GF(p) \equiv \mathbb{Z}_p$ e \mathbb{Z}_{p^k} , onde p é primo e k é um inteiro positivo, para o canal com desvanecimento Rayleigh plano quase-estático. Os códigos foram projetados para proporcionar o melhor desempenho de acordo com os critérios do posto, determinante e também através do critério do traço. Com relação ao critério de projeto a escolher podemos observar que este é muito dependente da ordem de diversidade do sistema, sendo o critério do posto e do determinante adotado quando $rm < 4$ e o critério traço adotado quando $rm \geq 4$. Com isso pôde-se concluir que quando a diversidade total do sistema é elevada, aumentar a ordem de diversidade não implica em uma melhora significativa no desempenho do sistema.

Como contribuição deste trabalho, foram apresentadas seis técnicas através das quais pôde-se simplificar o projeto de STTCs para qualquer número de antenas transmissoras. A primeira delas, a Conjectura 1, mostrou que é possível garantir diversidade completa para STTCs testando apenas o posto em matrizes diferença entre palavras-código sobre $GF(p)$, ao invés de matrizes diferença no domínio dos complexos. Nesse caso o STTC pode ser linear ou não-linear. As Conjecturas 2 e 3, mostraram que pode-se garantir diversidade completa para STTCs com modulações p^k -PSK através de um único teste de posto completo em uma matriz sobre $GF(p)$. Nos Teoremas 1, 2 e 3, foi visto que é possível simplificar a busca de STTCs sobre \mathbb{Z}_{p^k} , sem descartar os códigos ótimos, sendo que os Teoremas 1 e 2 são válidas para os STTCs projetados

pelos critérios do posto, determinante e do traço, e o Teorema 3 é válida somente para STTCs projetados através do critério do traço. Foi apresentado também uma análise comparativa entre a estrutura utilizada nesta tese e a estrutura padrão. Através desta comparação pôde-se concluir que quando se utiliza uma modulação p^k -PSK, com $k > 1$, a estrutura apresentada aqui é uma boa opção para STTCs projetados pelo critério do traço, pois reduz significativamente o número de códigos a serem testados sem descartar, na maioria das vezes, os códigos com maiores traços. Já para o caso dos STTCs projetados pelo critério do posto e do determinante, e para as modulações 4 e 8-PSK, a estrutura padrão consegue, na maioria das vezes, obter códigos com determinantes maiores. No caso dos STTCs que utilizam modulações p -PSK, a estrutura utilizada nesta tese é a única opção.

Utilizando a estrutura sobre \mathbb{Z}_{p^k} e as técnicas propostas aqui, pôde-se encontrar uma grande variedade de STTCs utilizando modulações 3-PSK, 4-PSK, 5-PSK, 7-PSK, 8-PSK, 9-PSK, 11-PSK, 13-PSK, 16-PSK e 17-PSK para $n = 2, 3$ e 4 antenas transmissoras, atingindo eficiências espectrais de 1,58; 2; 2,23; 2,81; 3; 3,17; 3,46; 3,7; 4 e 4,08 b/s/Hz, respectivamente. As eficiências espectrais fracionárias apresentadas aqui podem servir para uma variada gama de diferentes aplicações em sistemas de comunicações móveis, fornecendo ao projetista uma larga opção em termos de desempenho e taxa de transmissão. Com o intuito de validar as técnicas propostas nesta tese e também de analisar os efeitos dos ganhos obtidos, foram realizadas várias simulações com os STTCs apresentados neste trabalho.

Para os casos onde o número de símbolos da constelação não é uma potência de 2, poderia existir um problema se a fonte de informação fosse intrinsecamente binária. Uma solução simples para este problema foi proposta pelo autor em [25], onde uma palavra de n_p símbolos p -ários é associada a cada palavra de n_2 bits de informação, onde $p^{n_p} > 2^{n_2}$. Este mapeamento ocasionará uma perda desprezível na eficiência espectral se a escolha de n_p e n_2 for apropriada [25].

Algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Apresentação de provas formais da Conjectura 1 para $n > 2$ e da Conjectura 3.
- A utilização de uma estrutura de codificação recursiva, observando como as con-

jecturas e os teoremas propostos nesta tese seriam aproveitados.

- A utilização da estrutura proposta nesta tese para se obter STTCs sobre corpos e anéis finitos projetados para o canal com desvanecimento rápido.
- O impácto do uso de algoritmos de otimização na redução da busca por STTCs.

Apêndice A

Álgebra Aplicada à Teoria da Codificação

Este apêndice tem como objetivo apresentar alguns conceitos de álgebra, tais como *operadores binários, grupos, corpos e anéis*, da maneira como eles se aplicam à teoria da codificação.

A.1 Operadores Binários

Seja \mathbb{S} um conjunto de elementos. Um *operador binário* $*$ definido sobre \mathbb{S} tem a função de mapear qualquer par de elementos $(a, b) \in \mathbb{S}$ em um terceiro elemento $c = a * b$ também pertencente a \mathbb{S} . Quando existir um operador binário $*$ definido sobre \mathbb{S} dizemos que \mathbb{S} é fechado com relação a este operador. Segundo [36], podemos definir um operador binário da seguinte maneira.

Definição 1 Um operador binário $*$ definido sobre um conjunto \mathbb{S} é uma função que mapeia $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ em \mathbb{S} . Para cada $(a, b) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}$, denotaremos o elemento $*((a, b))$ de \mathbb{S} por $a * b$.

Por exemplo, as operações usuais de adição: $+$, e de multiplicação: \cdot , são diferentes operadores binários definidos sobre o conjunto dos inteiros \mathbb{Z} , pois quaisquer dois inteiros somados ou multiplicados produzirão também um número inteiro. Por outro

lado, a operação de adição no conjunto \mathbb{Z}^* (inteiros não nulos) não é um operador binário porque a operação $2 + (-2)$, onde $2 \in \mathbb{Z}^*$ e $-2 \in \mathbb{Z}^*$, produz o elemento 0, e $0 \notin \mathbb{Z}^*$. Desta maneira, o conjunto \mathbb{Z}^* não é fechado com relação ao operador binário $+$.

A.2 Grupos

Um *grupo* é um conjunto de elementos que pode ser definido da seguinte maneira.

Definição 2 Seja \mathbb{G} um conjunto de elementos. Seja $*$ um operador binário definido sobre \mathbb{G} . Então, o conjunto \mathbb{G} fechado sobre o operador $*$ será um grupo $\langle \mathbb{G}, * \rangle$ se satisfizer as seguintes condições:

- O operador binário $*$ tem que ser associativo, ou seja, para $a, b, c \in \mathbb{G}$, teremos

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

- Existe um elemento e em \mathbb{G} tal que, para todo $x \in \mathbb{G}$,

$$e * x = x * e = x.$$

Este elemento é chamado de elemento identidade de \mathbb{G} .

- Correspondente a cada $a \in \mathbb{G}$, existe um elemento a' em \mathbb{G} tal que

$$a * a' = a' * a = e.$$

Este elemento é chamado de inverso de a .

Um grupo é dito comutativo se seus operadores binários também satisfizerem a seguinte condição:

$$a * b = b * a,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{G}$.

O conjunto de todos os inteiros é um grupo comutativo com relação à adição real, onde o inteiro 0 é o elemento identidade e o inteiro $-a$ é o elemento inverso de

Tabela A.1: Adição módulo-3

\oplus	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

a. O conjunto \mathbb{Z}^+ (inteiros não negativos) tem como elemento identidade o número 0, mas não é um grupo com relação à adição, porque não contém, por exemplo, o inverso de 3.

Os exemplos de grupos mostrados até aqui possuem um número infinito de elementos. Grupos com um número finito de elementos também existem, como mostraremos nos dois exemplos a seguir.

Exemplo 4 Considere um grupo $\mathbb{G} = \{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$, onde m é um inteiro positivo. Considere também a adição real $+$ e um operador binário \oplus definido sobre \mathbb{G} de modo que, para quaisquer inteiros i e j pertencentes a \mathbb{G} ,

$$i \oplus j = r,$$

onde r é o resto da divisão de $(i+j)$ por m . O resto r é portanto um inteiro e está entre 0 e $m-1$, logo pertence a \mathbb{G} . Com isso concluímos que \mathbb{G} é fechado sobre a operação \oplus , a qual é chamada de adição módulo- m . A Tabela A.1 mostra para todos os possíveis pares de elementos de \mathbb{G} o resultado da operação de adição módulo-3. Pode-se verificar facilmente que $\langle \mathbb{G}, \oplus \rangle$ é um grupo comutativo.

Exemplo 5 Agora vamos considerar \cdot como sendo a operação real de multiplicação. Seja $\mathbb{G}^* = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$, onde p é um número primo. Considere \odot como sendo o operador binário definido sobre \mathbb{G}^* da seguinte maneira: para quaisquer elementos $i, j \in \mathbb{G}$,

$$i \odot j = r,$$

onde r é o resto da divisão de $(i \cdot j)$ por p . Como p é primo, e é maior do que i e maior do que j , então $i \cdot j$ não é divisível por p , logo o resto r ficará no intervalo $0 < r < p$, e portanto pertence a \mathbb{G}^* . Com isso, o conjunto \mathbb{G} é fechado sobre a operação binária \odot .

Tabela A.2: Multiplicação módulo-5

\odot	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Este tipo de operação é conhecida como multiplicação módulo-p. A Tabela A.2 mostra, para todos os possíveis pares de elementos de $\{1, 2, 3, 4\}$, o resultado da operação \odot . Pode-se verificar facilmente que $\langle \mathbb{G}^*, \odot \rangle$ é um grupo comutativo.

No exemplo anterior, é importante notar que se p não for primo, alguns elementos de \mathbb{G}^* não terão o inverso, fazendo com que \mathbb{G}^* não seja fechado com relação ao operador \odot . Por exemplo, para $p = 4$, o elemento 2 não possui inversa multiplicativa, pois $2 \odot 1 = 2$, $2 \odot 2 = 0 \notin \{1, 2, 3\}$, $2 \odot 3 = 2$. Ou seja, não existe $a \in \{1, 2, 3\}$ tal que $a \odot 2 = 2 \odot a = 1$.

A.3 Corpos e Anéis

Baseados na definição de grupos, apresentaremos agora duas estruturas algébricas muito importantes para a teoria da codificação, chamadas *corpo* (ou campo) e *anel*.

Um *corpo* é um conjunto onde se pode realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão sem resultar num elemento fora do conjunto. A adição e a multiplicação devem satisfazer as leis da comutação, distribuição e associação. Formalmente, um corpo pode ser definido da seguinte maneira.

Definição 3 Seja \mathbb{F} um conjunto de elementos. Seja $+$ e \cdot os operadores binários de adição e multiplicação. O conjunto \mathbb{F} será um **corpo** $\langle \mathbb{F}, +, \cdot \rangle$ se satisfizer as seguintes condições:

- $\langle \mathbb{F}, + \rangle$ é um grupo comutativo cujo elemento identidade é denotado por 0.
- $\langle \mathbb{F}, \cdot \rangle$ é um grupo comutativo cujo elemento identidade é denotado por 1.

- Para qualquer tripla a, b e c pertencentes a \mathbb{F} ,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

e

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Um anel tem quase as mesmas propriedades de um corpo a não ser a de que alguns elementos não possuem inverso multiplicativo (os zeros do anel) nem identidade multiplicativa. A definição de um anel pode ser formalizada da seguinte maneira.

Definição 4 Seja \mathbb{R} um conjunto de elementos. Seja $+$ e \cdot os operadores binários de adição e multiplicação. O conjunto \mathbb{R} será um **anel** $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ se satisfizer as seguintes condições:

- $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ é um grupo comutativo cujo elemento identidade é denotado por 0.
- A multiplicação é associativa.
- Para qualquer tripla a, b e c pertencentes a \mathbb{R} ,

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

e

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Apêndice B

Prova da Conjectura 1 para o caso de 2 Antenas Transmissoras

Antes de mostrarmos a prova da Conjectura 1 para o caso de duas antenas transmissoras, apresentaremos algumas propriedades da matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ que serão utilizadas durante a prova.

Considere cada elemento diferença em $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ na forma polar:

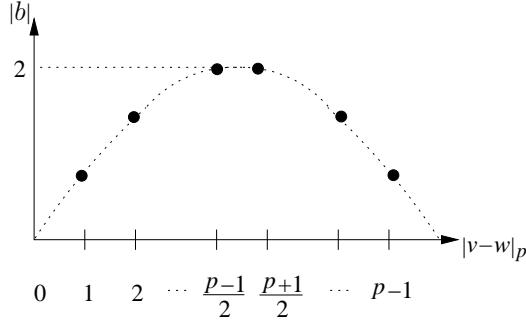
$$b = e - c = \exp\left(\frac{j2\pi v}{p}\right) - \exp\left(\frac{j2\pi w}{p}\right) = |b| \exp(j\theta_b).$$

As duas próximas propriedades são relacionadas ao módulo de b , enquanto a Propriedade 3 é relacionada à fase de b .

Propriedade 1 O módulo de b , denotado por $|b|$, é dado por:

$$|b| = 2 \sin\left(\frac{\pi}{p}|v - w|_p\right),$$

onde o subscrito p denota módulo- p . Isto significa que o módulo de b não depende especificamente dos valores de v e w , mas do valor absoluto da diferença módulo- p . Além disso, existem apenas $\frac{p-1}{2}$ módulos diferentes de zero distintos, os quais são indicados na Figura B.1, e se $|b| = |b'|$, então ou $|v - w|_p = |v' - w'|_p$ ou $|v - w|_p = p - |v' - w'|_p$.

Figura B.1: Módulos de b .

Prova:

$$\begin{aligned}
 |b|^2 &= bb^* \\
 &= 2 - \exp\left[\frac{j2\pi(v-w)}{p}\right] - \exp\left[\frac{j2\pi(v-w)}{p}\right]^* \\
 &= 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi(v-w)}{p}\right) \\
 &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{p}(v-w)\right) \\
 |b| &= 2\sin\left(\frac{\pi}{p}|v-w|_p\right). \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

O resto da prova segue das propriedades da função seno. \square

Propriedade 2 Seja \mathcal{M} o conjunto de todos os possíveis módulos de b diferentes de zero. Defina a matriz Q de dimensão $\frac{p-1}{2} \times \frac{p-1}{2}$ como segue. O (i, j) -ésimo elemento de Q é dado por $q_{i,j} = m_i/m_j$, onde $m_i = 2\sin\left(\frac{\pi}{p}i\right) \in \mathcal{M}$, para $i, j \in \{1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}\}$. Então, os elementos de Q que não estão na diagonal principal são todos distintos.

Agora considere as possíveis fases de b . Para se obter θ_b , considere inicialmente a fase $\tilde{\theta}_b$ no intervalo $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ radianos, definida como:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_b(v, w) &= \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{p}v\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{p}w\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{p}v\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{p}w\right)}\right] \\
 &= \arctan\left[\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{p}(v+w)\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}(v-w)\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{p}(v+w)\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}(v-w)\right)}\right] \\
 &= \arctan\left[\frac{-1}{\tan\left[\frac{\pi}{p}(v+w)\right]}\right] \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]. \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

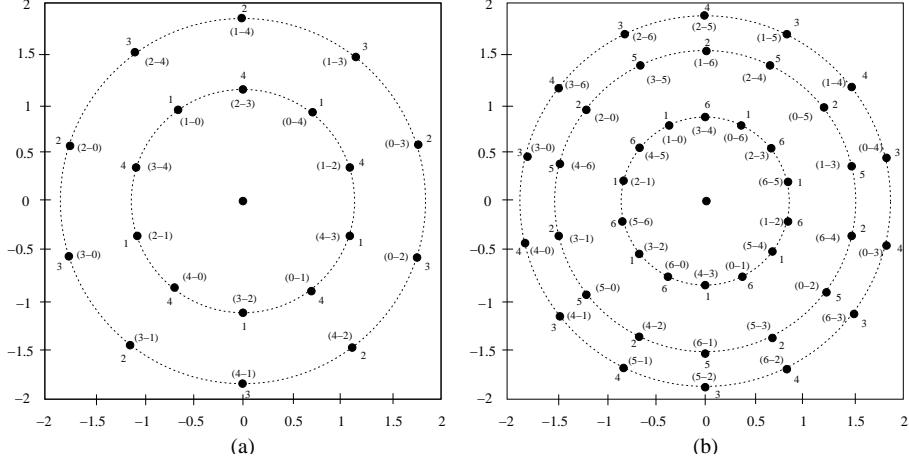


Figura B.2: Conjunto de símbolos de diferenças complexas das constelações (a) 5-PSK e (b) 7-PSK. Os pontos das diferenças complexas $\exp(j(2\pi/p)v) - \exp(j(2\pi/p)w)$ estão rotulados (internamente) por $(v-w)$, e (externamente) por d , onde $d \equiv v-w \pmod{p}$.

Note que $\tilde{\theta}_b(v, w)$ depende unicamente de $v + w \pmod{p}$. A verdadeira fase de b , $\theta_b(v, w)$, é a própria $\tilde{\theta}_b(v, w)$ ou $\tilde{\theta}_b(v, w) + \pi$, de acordo com os casos 1 e 2, respectivamente, dados a seguir. Os módulos e as fases dos elementos diferença para as constelações 5-PSK e 7-PSK podem ser vistos na Figura B.2.

Considere o conjunto de números complexos b , obtidos como anteriormente, com módulo fixo $2 \sin\left(\frac{\pi}{p}k\right) \in \mathcal{M}$, para algum $k \in \text{GF}(p)$. De acordo com a Propriedade 1, existem dois casos a serem considerados.

Caso 1: $d = v - w \equiv k \pmod{p}$, onde

$$\begin{aligned} v &\equiv k + i \\ w &\equiv i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Neste caso, os possíveis valores de fase que θ_b pode assumir são obtidos através de (B.2), onde

$$v + w = k + 2i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (\text{B.3})$$

Caso 2: $d = v - w \equiv p - k \pmod{p}$, onde

$$\begin{aligned} v &\equiv p - k + i \\ w &\equiv i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Aqui,

$$v + w = p - k + 2i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1. \quad (\text{B.4})$$

Note que se k é par(ímpar), então $k + 2i$ é par(ímpar) e $p - k + 2i$ é ímpar(par).

Com isso, podemos concluir que, para um dado módulo $|b| \in \mathcal{M}$, os possíveis valores de fase que θ_b pode assumir são

$$\frac{\pi}{p} \left(i - \frac{1}{2} \right), \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, 2p, \quad (\text{B.5})$$

e, portanto, temos a seguinte propriedade.

Propriedade 3 Sejam b e b' dois números complexos obtidos como anteriormente onde $|b| = |b'| \in \mathcal{M}$. Então, temos que:

Se $d \equiv d' \pmod{p}$, então $\theta_b - \theta_{b'} = 2i\frac{\pi}{p}$, para algum inteiro $i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Se $d \equiv p - d' \pmod{p}$, então $\theta_b - \theta_{b'} = (2i + 1)\frac{\pi}{p}$, para algum inteiro $i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Para ilustrar esta propriedade, observe a Figura B.2. No círculo pontilhado, isto é, na região contendo as diferenças complexas com o mesmo módulo, note que os rótulos d alternam entre dois elementos de $\text{GF}(p)$, um sendo p menos o outro. Se dois pontos complexos em um círculo têm o mesmo rótulo, então o ângulo entre eles (vistos como vetores no plano complexo) é um múltiplo par de $\frac{\pi}{p}$ radianos. Se dois pontos complexos em um círculo têm rótulos diferentes, então o ângulo entre eles é um múltiplo ímpar de $\frac{\pi}{p}$ radianos. Agora, apresentaremos uma prova matemática para a Conjectura 1 quando apenas duas antenas transmissoras são usadas.

Comentário 22 Como $L \geq n$, e uma matriz $n \times L$ é de posto completo se existirem n colunas linearmente independentes, sem perda de generalidade focaremos a prova apenas em matrizes quadradas.

Prova: Suponha que $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ seja de posto incompleto sobre os complexos e, por contradição, suponha que $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ seja de posto completo sobre $\text{GF}(p)$. O fato de

$B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ ser de posto incompleto implica que existem número complexos, digamos α_1 e α_2 , nem todos nulos, tal que

$$\alpha_1 \cdot [b_{1,1} \ b_{1,2}] - \alpha_2 \cdot [b_{2,1} \ b_{2,2}] = [0 \ 0]. \quad (\text{B.6})$$

Podemos reescrever a equação (B.6) como um conjunto de equações:

$$\begin{cases} |\alpha_1| \cdot e^{j(\theta_{\alpha_1} + \theta_{b_{1,1}})} = |\alpha_2| \cdot \frac{|b_{2,1}|}{|b_{1,1}|} \cdot e^{j(\theta_{\alpha_2} + \theta_{b_{2,1}})} \\ |\alpha_1| \cdot e^{j(\theta_{\alpha_1} + \theta_{b_{1,2}})} = |\alpha_2| \cdot \frac{|b_{2,2}|}{|b_{1,2}|} \cdot e^{j(\theta_{\alpha_2} + \theta_{b_{2,2}})}. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Segue de (B.7) que

$$\theta_{\alpha_1} - \theta_{\alpha_2} = \theta_{b_{2,1}} - \theta_{b_{1,1}} = \theta_{b_{2,2}} - \theta_{b_{1,2}},$$

o que implica que

$$\theta_{b_{1,1}} - \theta_{b_{1,2}} = \theta_{b_{2,1}} - \theta_{b_{2,2}}. \quad (\text{B.8})$$

Agora, devemos distinguir entre dois casos, a saber, $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$ e $|\alpha_1| = |\alpha_2|$. Se $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$ então, através de (B.7) e da Propriedade 2, podemos concluir que:

$$|b_{1,1}| = |b_{1,2}| \quad \text{e} \quad |b_{2,1}| = |b_{2,2}|. \quad (\text{B.9})$$

A Equação (B.9) e a Propriedade 1 nos dirão que ou $d_{1,1} \equiv d_{1,2} \pmod{p}$ ou $d_{1,1} \equiv p - d_{1,2} \pmod{p}$ e, pelo mesmo raciocínio, ou $d_{2,1} \equiv d_{2,2} \pmod{p}$ ou $d_{2,1} \equiv p - d_{2,2} \pmod{p}$. Entretanto, da igualdade (B.8) e da Propriedade 3, se $d_{1,1} \equiv d_{1,2} \pmod{p}$, então deveremos ter que $d_{2,1} \equiv d_{2,2} \pmod{p}$, e se $d_{1,1} \equiv p - d_{1,2} \pmod{p}$, então deveremos ter que $d_{2,1} \equiv p - d_{2,2} \pmod{p}$. Portanto, a matriz de inteiros $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ assume uma das duas formas:

$$\begin{bmatrix} d & d \\ d' & d' \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} d & p-d \\ d' & p-d' \end{bmatrix},$$

onde $d, d' \in \text{GF}(p)$. Claramente, estas duas matrizes têm posto um. Então $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ não pode ser de posto completo. Por contradição, para o caso de $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$ provamos que se $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ não tem posto completo sobre os complexos, então $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ não terá posto completo sobre $\text{GF}(p)$.

Agora, se $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, então analisando (B.7) veremos que $\frac{|b_{2,1}|}{|b_{1,1}|}$ e $\frac{|b_{2,2}|}{|b_{1,2}|}$ são da forma dos elementos da diagonal principal da matriz Q definida na Propriedade 2. Com isso, teremos que:

$$|b_{1,1}| = |b_{2,1}| \quad \text{e} \quad |b_{1,2}| = |b_{2,2}|. \quad (\text{B.10})$$

Note que para caso onde $|\alpha_1| = |\alpha_2|$, a equação (B.9) em geral não é satisfeita, embora (B.8) permaneça verdadeira. Através das equações (B.10) e (B.8), e seguindo a mesma linha de raciocínio do caso $|\alpha_1| \neq |\alpha_2|$, é possível mostrar que se $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ não possui posto completo sobre os complexos, então as duas colunas de $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ são linearmente dependentes.

Com isso, provamos que se $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ não possui posto completo sobre os complexos, então $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ não possui posto completo sobre $\text{GF}(p)$. Pela negação, provamos que se $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tiver posto completo sobre $\text{GF}(p)$, então $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ terá posto completo sobre os complexos, garantindo assim diversidade completa para STTCs apenas testando o posto de matrizes sobre $\text{GF}(p)$. Para provar que a reciproca não é verdadeira em geral, um contra-exemplo, como o mostrado a seguir, pode ser facilmente achado.

Exemplo 6 Observe neste exemplo que a matriz $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ não tem posto completo sobre $\text{GF}(5)$ enquanto sua respectiva matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ possui posto completo sobre os complexos, mostrando que a reciproca da Conjectura 1 não é verdadeira.

$$D(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 2 - 4 & 4 - 1 \\ 1 - 2 & 4 - 0 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{posto1}} \pmod{5},$$

$$B(\mathbf{c}, \mathbf{e}) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1.1180 + j1.5388 & 0 - j1.9021 \\ 1.1180 + j0.3633 & -0.6910 - j0.9511 \end{pmatrix}}_{\text{posto2}}.$$

□

Apêndice C

Propriedade Rumo à Prova da Conjectura 1: Caso Geral

Neste apêndice apresentaremos uma propriedade e um exemplo que poderão ser úteis na generalização da prova da Conjectura 1 para $n \geq 3$. Aqui, tanto a propriedade quanto o exemplo serão apresentados para o caso do sistema com $n = 3$ antenas transmissoras e modulação 5-PSK.

O caminho que será usado para mostrar a relação existente entre os postos de matrizes diferença nos complexos e em $\text{GF}(p)$ está baseado no cálculo de seus determinantes, portanto nos concentraremos apenas em matrizes quadradas (ver Comentário 22 no Apêndice B).

Em uma matriz qualquer, \mathbf{Q} , de dimensão 3×3 , pode-se calcular o determinante da seguinte maneira:

$$\det(Q) = \underbrace{(q_{1,1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{3,3})}_{a_1} + \underbrace{(q_{2,1} \cdot q_{3,2} \cdot q_{1,3})}_{a_2} + \underbrace{(q_{1,2} \cdot q_{2,3} \cdot q_{3,1})}_{a_3} - \underbrace{(q_{3,1} \cdot q_{2,2} \cdot q_{1,3})}_{a_4} - \underbrace{(q_{3,2} \cdot q_{2,3} \cdot q_{1,1})}_{a_5} - \underbrace{(q_{2,1} \cdot q_{1,2} \cdot q_{3,3})}_{a_6}, \quad (\text{C.1})$$

onde $q_{i,j}$ é o elemento da matriz referente à i -ésima linha e à j -ésima coluna, e a_s , para $s = 1, 2, \dots, 6$, é a multiplicação de três números complexos pertencentes a matriz $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, definida no Capítulo 2.

Com base nos elementos a_s , apresentaremos a seguinte propriedade:

Propriedade 4 Considere $|a_s|$ e θ_s como sendo o módulo e a fase de a_s , respectivamente.

mente. Analisando a Figura B.2a podemos notar que, com relação ao módulo de a_s , existem apenas 5 possíveis valores, quais sejam:

$$\begin{aligned}
 |a_s| &= |q_{i,j}| \cdot |q_{k,l}| \cdot |q_{t,s}| \\
 0 &= 0 \\
 1,6246 &= 1,1756^3 \\
 2,6287 &= 1,1756^2 \cdot 1,9021 \\
 4,2533 &= 1,9021^2 \cdot 1,1756 \\
 6,8819 &= 1,9021^3,
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

onde 0; 1,1756 e 1,9021 são os possíveis módulos de $q_{i,j}$ (ver Figura B.2).

Com relação à fase de a_s pode-se dizer que, devido ao fato de θ_s ser uma multiplicação de três elementos de $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$, seu valor será igual a uma das fases θ_b para o caso de $p = 5$, que são obtidas a partir da seguinte equação (adaptada a partir de (B.5)):

$$\frac{\pi}{10} (2i_f - 1), \quad \text{para } i_f = 1, 2, \dots, 10. \tag{C.3}$$

Observe também que se θ_s resultar em um i_f ímpar(par), então pode-se dizer que esta fase foi obtida pela soma de três θ_b 's cujos i_f 's são par(ímpar), par(ímpar), par(ímpar) ou ímpar(par), ímpar(par), par(ímpar), não importando a ordem da soma. Isto pode ser visto da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \theta_s &= \frac{\pi}{10} (2i_f - 1) \\
 &= \theta_{b1} + \theta_{b2} + \theta_{b3} \\
 &= \frac{\pi}{10} [(2i_1 - 1) + (2i_2 - 1) + (2i_3 - 1)]
 \end{aligned} \tag{C.4}$$

Assim,

$$2(i_1 + i_2 + i_3) - 2 = 2i_f$$

que resulta na equação:

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_f + 1 \tag{C.5}$$

a partir da qual se chega ao resultado acima.

Agora apresentaremos um exemplo que indica o caminho que estamos tentando seguir para completar a prova da Conjectura 1.

Exemplo 7 Considere as seguintes matrizes:

$$D(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 2 - 0 & 1 - 0 & 4 - 0 \\ 2 - 4 & 2 - 4 & 3 - 4 \\ 4 - 0 & 1 - 2 & 4 - 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \pmod{5}$$

e

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1,9021e^{j162} & 1,1756e^{j126} & 1,1756e^{j234} \\ 1,9021e^{j126} & 1,9021e^{j126} & 1,1756e^{j162} \\ 1,1756e^{j234} & 1,1756e^{j18} & 1,9021e^{j306} \end{pmatrix},$$

onde $b_{i,j} = e^{(\frac{j2\pi}{5}v_{i,j})} - e^{(\frac{j2\pi}{5}w_{i,j})}$

Suponha que o determinante de B seja igual a zero, ou seja, que $B(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tenha posto incompleto.

$$\det(B(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = 6,8819e^{j234} + 2,6287e^{j18} + 1,6246e^{j162} - 2,6287e^{j234} - 2,6287e^{j342} - 4,2533e^{j198} = 0 \quad (\text{C.6})$$

De acordo com a Propriedade 4, podemos analisar o módulo e a fase de cada elemento complexo da expressão (C.6) para chegarmos aos seus correspondentes elementos em $GF(5)$, e com isso verificar se o determinante em $GF(5)$ também será igual a zero. Neste exemplo mostraremos esta análise apenas para o número complexo $6,8819e^{j234}$. Note que esse número complexo foi obtido a partir do produto de três elementos diferenças, todos com módulo 1,9021. Observando a Figura B.2a, o correspondente número em $GF(5)$ do módulo 6,8819 será ou 2 ou 3, dependendo da fase. Analisando a fase 234, veremos que esta resulta em um i_f ímpar. Portanto, os três números em $GF(5)$ terão que corresponder a valores de fase onde os i_f 's sejam par, par, par ou ímpar, ímpar, par. Novamente observando a Figura B.2a, notaremos que o número com módulo 1,9021 e i_f 's ímpar é o número 2 e com o i_f 's par é o 3, portanto, multiplicando três números 3 e reduzindo o resultado módulo-5 teremos o número 2, e se

multiplicarmos dois números 2 e um 3 e reduzirmos o resultado módulo-5, também teremos o número 2. Com isso, o elemento em GF(5) relacionado com o primeiro termo será o número 2. O restante dos casos podem seguir o mesmo raciocínio. O resultado final do determinante em GF(5) será:

$$\det(D) = 2 + 3 + 1 - 3 - 2 - 1 = 0 \quad (\text{C.7})$$

Como no Apêndice B, pela negação pode-se dizer que se $D(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ tiver posto completo sobre GF(5), então $B(\mathbf{c}, \mathbf{e})$ terá posto completo sobre os complexos, garantindo assim diversidade completa para STTCs sobre GF(5) apenas testando o posto de matrizes sobre GF(5).

Referências Bibliográficas

- [1] I. E. Telatar, “Capacity of multi-antenna gaussian channels,” *Tech. Report AT&T Bell Laboratories*, 1995.
- [2] G. J. Foschini and M. J. Gans, “On limits of wireless communications in a fading environment when using multiple antennas,” *Wireless Personal Communications*, vol. 6, pp. 311-335, 1998.
- [3] T. Marzetta and B. Hochwald, “Capacity of a mobile multiple antenna communication link in Rayleigh flat fading,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, pp. 139-158, Jan. 1999.
- [4] V. Tarokh, N. Seshadri and A. R. Calderbank, “Space-time codes for high data rate wireless communications: performance criterion and code construction,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 44, No. 2, pp. 744-765, Mar. 1998.
- [5] S. M. Alamouti, “A simple transmit diversity technic for wireless communications”, *IEEE Journal Select. Areas Commun.*, vol. 16, no. 8, pp. 1451-1458, Out. 1998.
- [6] V. Tarokh, H. Jafarkhani e A. R. Calderbank, “Space-time block codes from orthogonal designs”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 45, no. 5, pp. 1456-1467, Jun. 1999.
- [7] G. Foschini, “Layered space-time architecture for wireless communication in a fading enviroment when using multi-element antennas”, *Bell Labs Technical Journal* Autumn 1996, pp. 41-59.

- [8] D. Cui e A. Haimovich, “Performance of parallel concatenated space-time codes”, *IEEE Commun. Letters*, vol. 5, pp. 236-238, Jun. 2001.
- [9] W. Firmato, B. Vucetic, J. Yuan e Z. Chen. “Space-time turbo trellis coded modulation for wireless data communications”, *Eurasip Journal on Applied Signal Processing*, vol. 2002, no. 5, pp. 459-470, Mar. 2002.
- [10] V. Tarokh e H. Jafarkhani, “A differential detection scheme for transmit antennas”, *IEEE J. Select Areas Commun.*, vol. 18, pp. 1169-1174, Jul. 2000.
- [11] D. Agrawal, V. Tarokh, A. Naguib e N. Seshadri, “Space-time coded OFDM for high data rate wireless communication over wide-band channels”, *em Proc. IEEE VTC‘98*, Ottawa, Canada, pp. 2232-2236, Maio 1998.
- [12] H. Jafarkhani, N. Sechadri, “Super-orthogonal space-time trellis codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 49, No. 4, pp. 937-950, Abril. 2003.
- [13] Z. Chen, J. Yuan and B. Vucetic, “Improved space-time trellis coded modulation scheme on slow rayleigh fading channels,” *Electron. Lett*, vol. 37, No. 7, pp 440-441, Mar. 2001.
- [14] Z. Chen, J. Yuan and B. Vucetic, “An improved space-time trellis coded modulation scheme on slow rayleigh fading channels,” *IEEE ICC’01*, pp. 1110-1116, 2001.
- [15] J. Yuan, B. Vucetic, Z. Chen, and W. Firmanto “Performance of space-time coding on fading channels,” *IEEE ISIT’01*, pp 153, Jun. 2001.
- [16] Z. Chen, B. Vucetic, J. Yuan, and K. L. Lo “Space-time trellis codes for 4-PSK with three and four transmit antennas in the quasi-static flat rayleigh fading channels,” *IEEE Commun. Lett*, vol. 6, No. 2, pp 67-69, Fev. 2002.
- [17] M. Tao and R. S. Cheng, “Improved design criteria and new trellis codes for space-time coded modulation in slow flat fading channels,” *IEEE Commun. Letters*, pp. 67-69, Jul. 2001.

- [18] J. Grimm, M. P. Fitz, and J. V. Krogmeier, “Further results in space-time coding for Rayleigh fading,” in *Proc. 36th Allerton Conf. on Communications, Control and Computing*, Sept. 1998.
- [19] S. Baro, G. Bauch and A. Hansmann, “Improved codes for space-time trellis coded modulation,” *IEEE Commun. Letters*, pp. 20-22, Jan. 2000.
- [20] A. R. Hammons, Jr. and H. El Gamal, “On the theory of space-time codes for PSK modulation,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 46, no. 2, pp. 524-542, Mar. 2000.
- [21] H. El Gamal and A. R. Hammons, Jr., “On the design and performance of algebraic space-time codes for BPSK and QPSK modulation,” *IEEE Trans. on Commun.*, vol. 50, No. 6, pp. 907-913, June 2002.
- [22] Y. Liu, M. P. Fitz, and O. Y. Takeshita, “A rank criterion for QAM space-time codes,” *IEEE Trans. on Inform. Theory*, vol. 48, no. 12, pp. 3062-3079, Dec. 2002.
- [23] R. S. Blum, “New analytical tools for designing space-time convolutional codes,” in *Conf. Inform. Sci. Systm.*, Princeton, NJ, Mar. 2000.
- [24] R. S. Blum, “Some analytical tools for the design of space-time convolutional codes,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, no. 10, pp. 1593-1599, Oct. 2002.
- [25] M. de Noronha-Neto, R. D. Souza, and B. F. Uchôa-Filho, “Space-time convolutional codes over $GF(p)$ achieving full 2-level diversity,” in *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC'03)*, vol. 1, pp. 408-413, Mar. 2003.
- [26] S. K. Hong abd J.-M. Chung, “Prime valued space-time convolutional Zw code achieving full 2-level diversity,” *Electron. Lett*, vol. 40, No. 4, Fev. 2004.
- [27] T. Koike e S. Yoshida, “Space-time trellis-coded ternary PSK for mobile communications”, *Electron. Lett*, vol. 40, No. 16, Agosto, 2004.
- [28] S. K. Hong abd J.-M. Chung, “16-state space-time code for 16PSK modulation,” *Electron. Lett*, vol. 40, No. 1, Jan. 2004.

- [29] B. Abdool-Rassool, M. R. Nakhai, F. Heliot, L. Revelly, and H. Aghvami, “Search for space-time trellis codes: novel codes for Rayleigh fading channels”, *IEE Proc. Commun.*, vol. 151, No. 1, Feb. 2004.
- [30] M. de Noronha-Neto e B. F. Uchôa-Filho, “Códigos convolucionais espaciotemporais sobre $GF(p)$ atingindo ganho de diversidade máximo para qualquer número de antenas transmissoras,” em *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT 03)*, Rio de Janeiro, Brasil.
- [31] M. de Noronha-Neto and B. F. Uchôa-Filho, “Space-time trellis codes over $GF(p)$ for p -PSK modulations,” *IEEE International Conference on Communications (ICC'04)*, Paris, Franca.
- [32] M. de Noronha-Neto e B. F. Uchôa-Filho, “Códigos convolucionais espácio-temporais sobre anéis para modulações p^k -PSK,” em *Anais do Simpósio Brasileiro de Telecomunicações (SBT 04)*, Belém, Brasil.
- [33] T. S. Rappaport. *Wireless Communications - Principles and Practice* N. J. USA: Prentice-Hall PTR, 1996.
- [34] Branka Vučetić and Jinhong Yuan. *Space-time Coding*. Wiley, 2003
- [35] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. New York: Cambridge Univ. Press, 1988.
- [36] J. B. Fraleigh. *A First Course in Abstract Algebra*. Sixth Edition, Addison-Wesley, 1998.
- [37] R. Johannesson and K. S. Zigangirov. *Fundamentals of Convolutional Coding*. Wiley-IEEE Press, 1999.
- [38] J. L. Massey and T. Mittelholzer, “Convolutional codes over rings,” *Proc. 4th Joint Swedish-Soviet Int. Workshop on Inform. Th.*, Gotland, Sweeden, pp.14-18, Aug.27 - Sept.1, 1989.