



CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO ACADÊMICO DE ELETRÔNICA

---



---

PROF. FERNANDO LUI Z ROSA MUSSOI

VERSÃO 3.3

FLORIANÓPOLIS – AGOSTO, 2007

# FUNDAMENTOS DE ELETROMAGNETISMO

Versão 3.3 - 01 de agosto, 2007.

## NOTA DO AUTOR

Esta apostila é um material de apoio didático utilizado pelo autor nas suas aulas das disciplinas ministradas no Departamento Acadêmico de Eletrônica do Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina (CEFET/SC), campus Florianópolis.

Este material não tem a pretensão de esgotar, tampouco inovar o tratamento do assunto por ele abordado. Tem por objetivo facilitar a dinâmica de aula, com expressivos ganhos de tempo, além de dar uma primeira orientação e compreensão aos alunos sobre o assunto abordado.

Este trabalho foi construído com base nas referências, citadas ao longo do texto, nas notas de aula e na experiência do autor na abordagem do assunto com os seus alunos.

Em se tratando de um material didático elaborado por um professor de uma Instituição Pública de Ensino, são permitidos o uso e a reprodução do texto, desde que devidamente citada a fonte.

**O aluno deve desenvolver o hábito de consultar, estudar e, se possível, adquirir a Bibliografia Referenciada original para melhores resultados no processo de aprendizagem.**

Quaisquer contribuições, correções e críticas construtivas a este trabalho serão bem-vindas pelo autor.

Prof. Fernando Luiz Rosa Mussoi  
mussoi@cefetsc.edu.br

***"Tudo está cheio de deuses. Tudo está cheio de forças vivas. Tudo tem uma alma. O universo em seu conjunto organizado e harmônico é o Cosmos, que é inteligente. A inteligência do Cosmos é o Deus".***

Thales de Mileto, filósofo.

# Índice

Nota do Autor .....	2
Índice .....	4
Parte I - Magnetismo .....	5
1. Introdução .....	5
2. Origem do Magnetismo .....	7
3. Campo Magnético .....	11
4. Indução Magnética - Imantação .....	17
5. Classificação das Substâncias quanto ao Comportamento Magnético .....	18
6. Permeabilidade Magnética .....	20
7. Relutância Magnética .....	22
Parte II - Eletromagnetismo .....	24
1. Descobertas de Oersted .....	24
2. Fenômenos do Eletromagnetismo .....	24
3. Campo Magnético criado por Corrente Elétrica .....	25
4. Fontes do Campo Eletromagnético .....	27
5. Força Eletromagnética .....	39
6. Variação do Fluxo Magnético .....	49
7. Indução Eletromagnética .....	52
8. Auto-Indução Eletromagnética e Indutância .....	63
9. Indutores: .....	70
10. Transitório de Carga e Descarga de um Indutor .....	81
11. Análise Matemática do Transitório do Indutor: .....	87
12. Correntes de Foucault .....	95
13. Ondas Eletromagnéticas .....	98
14. Curva de Magnetização e Histerese Magnética .....	99
15. Circuitos Magnéticos .....	102
16. Acoplamento Magnético .....	108
17. Referências Bibliográficas: .....	115
18. Agradecimentos: .....	115
19. Problemas Propostos .....	116
Anexo A - Magnetismo Terrestre .....	133
Anexo B - Tabela de Fios de Cobre Esmaltados .....	136
Anexo C - Informações Relevantes: .....	137
Pesquisas Propostas: .....	142

# Parte I - MAGNETISMO

## 1. Introdução

Os gregos já sabiam, há mais de 2500 anos, que certas pedras da região da Magnésia, na Ásia Menor (agora chamada de Manisa, no oeste da Turquia) se atraíam e também atraíam pedaços de ferro. Estas pedras são conhecidas hoje como **Magnetitas** ou **Ímãs<sup>1</sup> Permanentes**. As primeiras experiências com o magnetismo referiam-se, principalmente, ao comportamento dos ímãs permanentes. Na China, no século I a.C., observou-se que um ímã suspenso por um fio (ou flutuando sobre a água), tende a orientar-se na direção *norte-sul terrestre*. Isto deu origem à Bússola. A bússola é, simplesmente, um ímã permanente em forma de agulha, suspenso no seu centro de gravidade e que pode girar livremente sobre um eixo para indicar a direção geográfica norte-sul. O lado da agulha que aponta para o norte geográfico convencionou-se chamar de norte magnético. Não se sabe quando a bússola foi usada pela primeira vez na navegação, mas existem referências escritas sobre este uso que datam do século XII.

Em 1260, o francês Petrus Peregrinus observou que, as extremidades de um ímã possuem um poder maior de atração pelo ferro: são os pólos magnéticos. A figura 1.1(a) ilustra este fenômeno. Ele também observou que os pólos não existem separadamente.

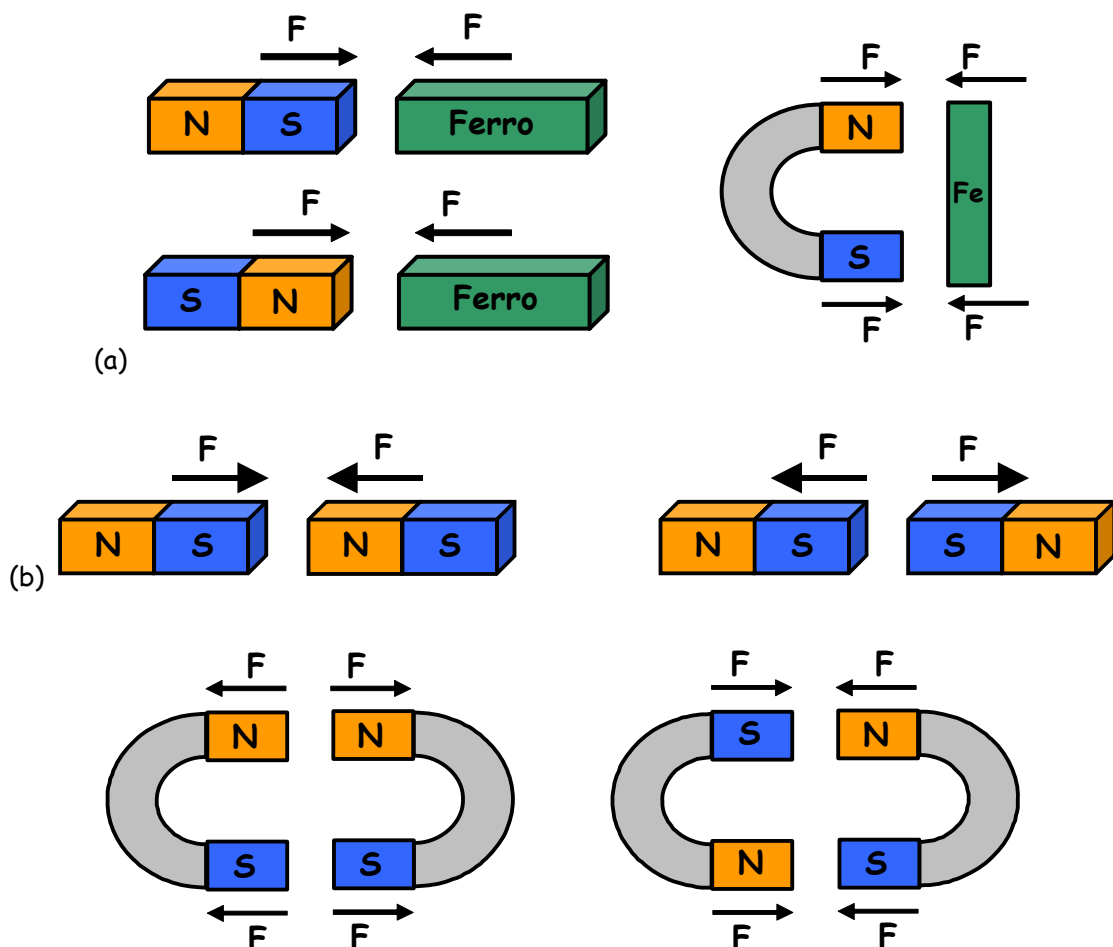
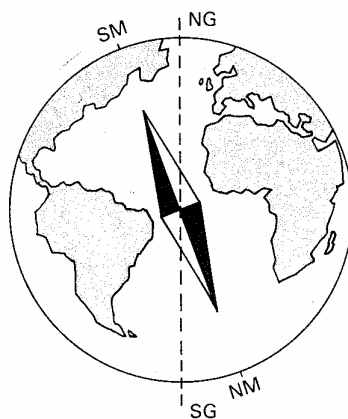


Figura 1.1 - Força Magnética: (a) atração do Ferro (b) atração e repulsão entre pólos dos ímãs.

<sup>1</sup> A palavra "ímã" vem do francês *aimant* que significa "amante", em relação à sua característica de atração.

Em 1269, Pierre de Maricourt fez uma importante descoberta ao colocar uma agulha sobre um ímã esférico natural em várias posições e marcou as direções de equilíbrio da agulha. Descobriu então que as linhas envolviam o ímã, da mesma forma que os meridianos envolviam a Terra, e passavam por dois pontos situados sobre as extremidades de um diâmetro da esfera. Em virtude da analogia com os meridianos terrestres, estes dois pontos foram denominados os *pólos* do ímã. Muitos observadores verificaram que, qualquer que fosse a forma do ímã, sempre havia dois pólos, um pólo norte e um pólo sul, onde a força do ímã era mais intensa. Os pólos de mesmo nome de dois ímãs repeliam-se e os de nome oposto atraíam-se. A figura 1.1(b) ilustra essa situação observada.

Em 1600, William Gilbert, físico e médico da corte da rainha Elisabeth da Inglaterra, descobriu a razão de a agulha de uma bússola orientar-se em direções definidas: a própria Terra era um ímã permanente. Como um pólo do ímã da agulha da bússola é atraído para o pólo norte geográfico, convencionou-se chamá-lo de pólo norte magnético (da bússola). Assim, na região do pólo norte geográfico da Terra há um pólo sul magnético. A figura 1.2 mostra a Bússola devido à orientação geográfica de um ímã. A localização dos pólos geográficos e magnéticos da Terra não coincidem exatamente. O ângulo entre eles é chamado de declinação magnética. A declinação magnética e a intensidade do campo magnético terrestre variam lentamente ao longo dos milhões de anos (veja Anexo A desta apostila).



**Figura 1.2 - Bússola: Orientação Geográfica dos pólos de um ímã** (Fonte: Moretto, V.P. *Elettricidade e Eletromagnetismo*, ed. Ática, 3ª ed, 1989).

A atração e a repulsão dos pólos magnéticos foram estudadas quantitativamente por John Michell, em 1750. Usando uma balança de torção, Michell mostrou que a atração e a repulsão dos pólos de dois ímãs tinham igual intensidade e variavam inversamente com o quadrado da distância entre os pólos. Estes resultados foram confirmados pouco depois por Coulomb. A lei da força entre dois pólos magnéticos é semelhante à que existe entre duas cargas elétricas, mas há uma diferença importante: os pólos magnéticos ocorrem sempre aos pares. É impossível isolar um único pólo magnético. Se um ímã for quebrado ao meio, aparecem pólos iguais e opostos no ponto de fratura, de modo que se formam dois novos ímãs, com pólos iguais e opostos, como mostra a figura 1.3. Coulomb explicou este resultado admitindo que o magnetismo estava contido em cada molécula do ímã.

Em 1920 foram desenvolvidos ímãs de maior capacidade com ligas de Alnico (Alumínio, Níquel e Cobalto), que retêm um magnetismo muito intenso e são usados na fabricação de alto-falantes, por exemplo. Em 1950 grandes avanços foram feitos no desenvolvimento de ímãs cerâmicos orientados (Ferrites) feitos com ligas de Manganês e Zinco (MnZn) e Níquel e Zinco (NiZn). Em 1970 foram obtidos impressionantes aumentos de forças magnéticas a partir de ligas de Samário Cobalto (terras raras), mas com custos elevados. Em 1980, da família das terras raras, os ímãs de Neomídio-Ferro-Boro surgiram com capacidades magnéticas ainda maiores e com custos menores, porém muito sensíveis a temperaturas elevadas.

Hoje o magnetismo tem importância fundamental em quase todos os equipamentos eletro-eletrônicos mais usados na indústria, no comércio, nas residências e na pesquisa. Geradores de energia, motores elétricos, transformadores, disjuntores, equipamentos de telecomunicações, sistemas de

iluminação, televisores, computadores, vídeo-cassetes, discos rígidos de computadores (HDs), telefones, cartões magnéticos, equipamentos médico-hospitalares (como a Ressonância Magnética) e muitos outros equipamentos e tecnologias usam efeitos magnéticos para desempenhar uma série de funções importantes.

O conceito de pólo magnético é análogo ao da carga elétrica. Pólos magnéticos (norte e sul) e cargas elétricas (positivas e negativas) de nomes contrários atraem-se e de mesmos nomes repelem-se. Embora exista o monopolo elétrico (partícula carregada apenas positivamente ou negativamente), ainda não se obteve o monopolo magnético, ou seja, os pólos magnéticos ainda são considerados inseparáveis.

A primeira evidência da relação entre o magnetismo e o movimento de cargas elétricas foi em 1819 pelo dinamarquês Hans Christian Oersted. Ele verificou que a agulha de uma bússola pode ser desviada de sua orientação na proximidade de um condutor percorrido por corrente elétrica.

Anos depois, Michael Faraday na Inglaterra e Joseph Henry nos Estados Unidos, descobriram que o movimento de um ímã nas proximidades de uma espira condutora pode produzir corrente elétrica. Isso levou-nos à compreensão que a atração e repulsão magnéticas são produzidas, fundamentalmente, pelo efeito de interação magnética dos elétrons dos átomos no interior dos corpos. Esta interação magnética, embora também tenha origem nas partículas atômicas é diferente das interações elétricas de atração e repulsão.

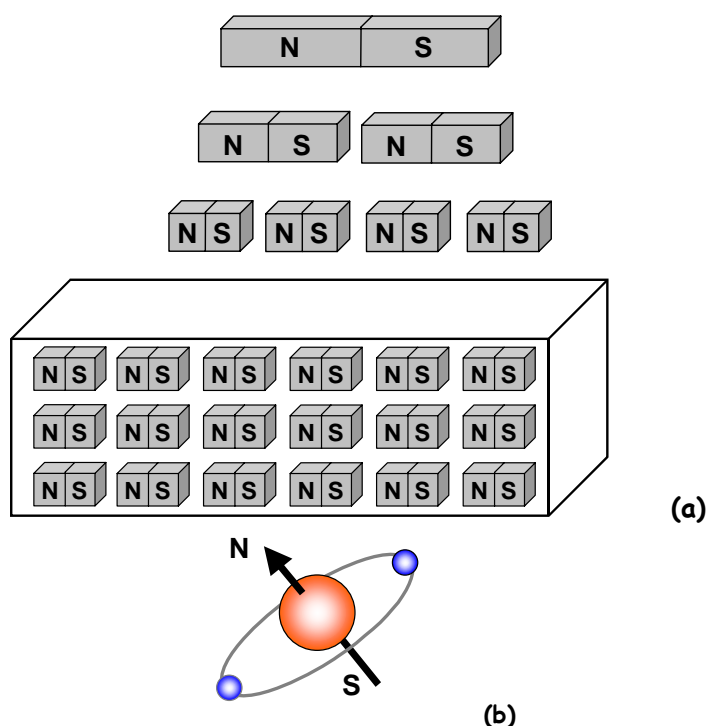


Figura 1.3 - (a) Inseparabilidade dos pólos de um ímã e (b) ímã elementar.

## 2. Origem do Magnetismo

O magnetismo é a expressão de uma forma de energia, normalmente associada a forças de atração e de repulsão entre alguns tipos particulares de materiais, chamados de **Ímãs**. Os ímãs naturais encontrados na natureza, chamados de **Magnetitas**, são compostos por Óxido de Ferro ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ). Os ímãs artificiais são materiais geralmente compostos de **metais** e **ligas cerâmicas** aos quais se transmitem as propriedades magnéticas e estes podem ser **temporários** ou **permanentes**. Os temporários são fabricados com ferro doce (mais puro) e os permanentes com ligas de aço (Ferro e Carbono), geralmente contendo Níquel ou Cobalto.

Não é ainda completamente conhecida a natureza das forças magnéticas de atração e repulsão, embora conheçamos as leis que orientam suas ações e como utilizá-las.



O relato de William Gilbert sobre suas primeiras experiências com ímãs naturais, publicado em 1600, talvez represente o primeiro estudo científico do magnetismo. Nos anos seguintes, as descobertas feitas por Coulomb, Oersted e Ampère aumentaram nosso conhecimento do comportamento dos ímãs e da natureza das forças magnéticas. Entretanto, os físicos acreditam que somente durante este último século é que começaram a compreender a verdadeira natureza do magnetismo. A opinião atual é que as propriedades magnéticas da matéria são de origem elétrica, resultante, talvez, dos movimentos dos elétrons dentro dos átomos das substâncias. Como o elétron é uma partícula eletricamente carregada, esta teoria sugere que o magnetismo é uma propriedade de uma carga em movimento. Se assim for, podemos explicar a energia associada às forças magnéticas usando leis conhecidas da Física. Dois tipos de movimentos eletrônicos são importantes neste moderno modelo posto para explicar o magnetismo, como mostra figura 2.1.

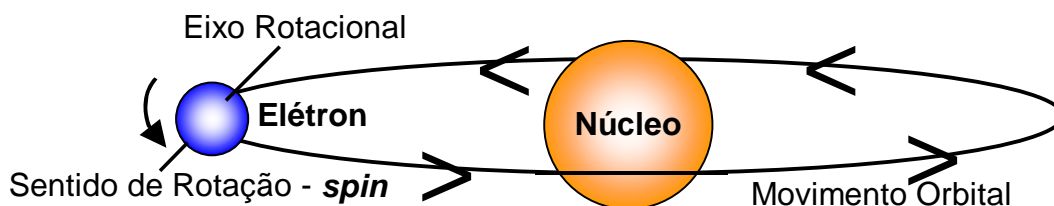
O primeiro, um elétron girando em torno do núcleo de um átomo num movimento de translação, confere uma propriedade magnética à estrutura atômica. O segundo tipo de movimento eletrônico é o "spin" do elétron, o movimento de rotação em torno do seu próprio eixo. A propriedade magnética da matéria parece originar-se basicamente do spin dos elétrons. Cada elétron que gira sobre si mesmo atua como um pequenino ímã permanente. Spins opostos são indicados como + e - spins; os elétrons que giram em direções opostas tendem a formar pares e, assim, neutralizam seu caráter magnético.

Na maioria dos materiais, a combinação entre as diferentes direções e sentidos dos efeitos magnéticos gerados pelos seus elétrons resulta nula, produzindo um átomo **magneticamente neutro**. Porém, pode acontecer uma **resultante magnética** quando um número de elétrons giram em um sentido e um número menor de elétrons giram em outro. É o caso do átomo de ferro, representado na figura 2.2. Podemos notar que na camada Md temos mais elétrons girando no sentido anti-horário que no sentido horário. Este átomo, portanto, apresenta uma resultante magnética.

As propriedades magnéticas estão associadas a ambos os tipos de movimentos eletrônicos. Os átomos de algumas substâncias podem possuir características de ímã permanente devido a um desequilíbrio entre órbitas e spins. Esses átomos atuam como pequeninos ímãs, chamados **dipolos**, e são atraídos por ímãs fortes (são os chamados materiais ferromagnéticos).

Embora exista, de fato, um movimento de cargas elétricas em nível atômico, a corrente elétrica (fluxo ordenado de elétrons) não está presente nos ímãs. Não devemos confundir esses dois fenômenos.

A natureza fundamental do magnetismo está na interação produzida por cargas elétricas em movimento.



*Figura 2.1 - movimentos dos elétrons no átomo.*

Assim, muitos dos elétrons dos átomos dos ímãs, girando ao redor de seus núcleos em direções determinadas e em torno de seus próprios eixos, produzem um efeito magnético em uma mesma direção. Resulta, então, na **resultante magnética externa**. Esta resultante é conhecida como **Campo Magnético** e é representado pelas **Linhas de Campo**, como será estudado posteriormente. É devido ao campo magnético que percebemos os fenômenos magnéticos.



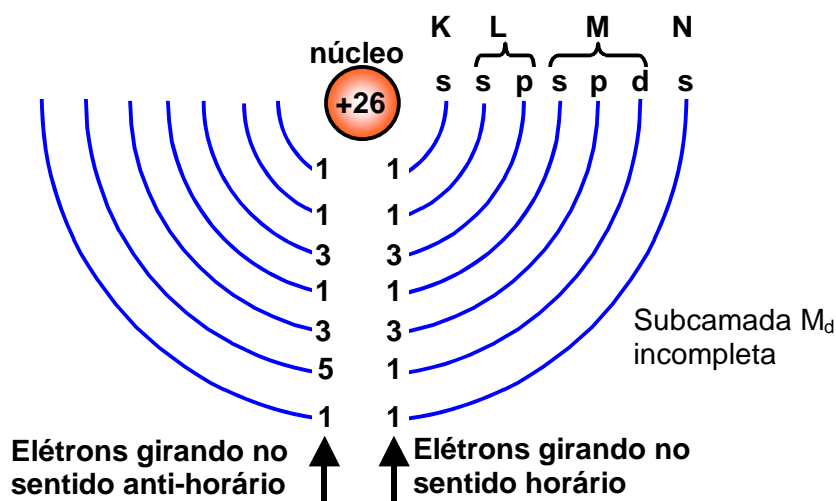


Figura 2.2 - Distribuição dos elétrons nas camadas do átomo de ferro magnetizado.

## 2.1. Teoria de Weber

Em 1260, o francês Petrus Peregrinus observou que os *pólos de um ímã não existem separadamente*. Cortando-se um ímã em duas partes iguais, que por sua vez podem ser redivididas em outras, figura 1.3, observa-se que cada uma destas partes constitui um novo ímã que, embora menor, tem sempre dois pólos. É possível continuar esse processo de divisão, até que chega-se a um ponto em que encontra-se o átomo ou molécula do material de que ele é feito. Cada átomo ou molécula do ímã, possui propriedades magnéticas devido à orientação dos seus *spins* (orientação rotacional dos elétrons). Esses átomos ou moléculas reúnem-se em pequenos conjuntos de mesma orientação, denominados *ímãs elementares*.

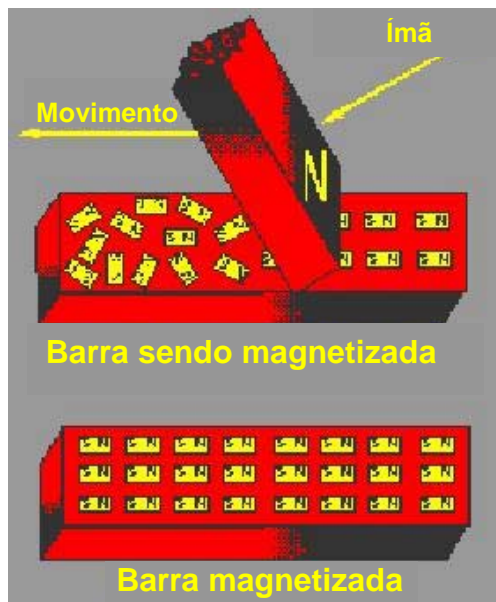
A teoria mais popular do magnetismo considera este alinhamento atômico ou molecular do material. Isto é conhecido como Teoria de Weber. Esta teoria assume que toda substância magnética é composta de ímãs muito pequenos, chamados de **Ímãs Elementares**. Qualquer material não magnetizado tem as forças magnéticas de seus ímãs elementares neutralizados pelos ímãs elementares adjacentes, dessa forma eliminando algum efeito magnético possível.

Um material **magnetizado** terá a maioria de seus ímãs elementares organizados em fileiras, com o pólo norte de cada átomo ou molécula apontando em uma direção e a face do pólo sul em direção oposta. Um material com átomos ou moléculas assim alinhados terá **pólos magnéticos efetivos**.

Uma ilustração da Teoria de Weber é mostrada na figura 2.3, onde uma barra de ferro é magnetizada quando submetida a um campo magnético externo, resultando no alinhamento de seus ímãs elementares.

Um material apresenta propriedades magnéticas, quando há uma predominância de ímãs elementares orientados sobre os não orientados. Assim, genericamente, pode-se dizer que:

- **Materiais Magnéticos:** são aqueles que permitem a orientação dos seus ímãs elementares. Exemplos: ferro, níquel e algumas ligas metálicas, como o aço.
- **Materiais Não-Magnéticos:** são aqueles que não permitem a orientação dos seus ímãs elementares. Exemplos: alumínio, madeira, plástico, entre outros.

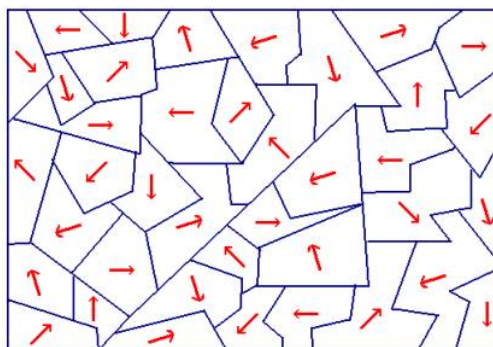


*Figura 2.3 - barra de ferro sendo magnetizada.*

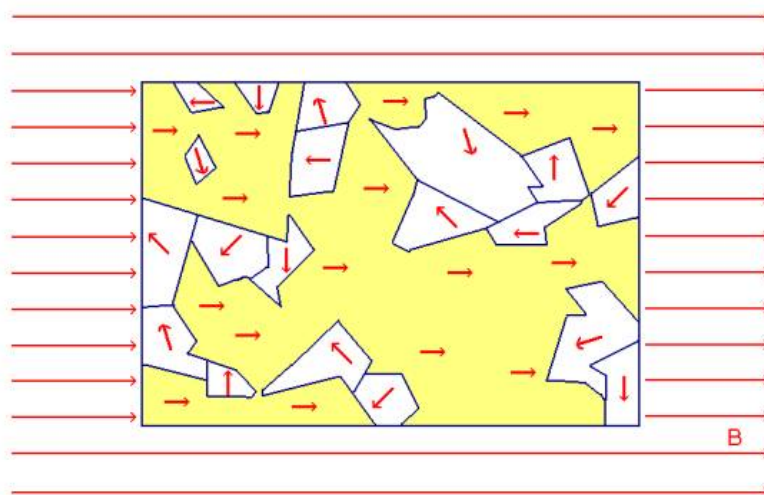
## 2.2. Teoria dos Domínios Magnéticos

Nos materiais com melhores características magnéticas de estrutura cristalina, além de alguns átomos apresentarem resultante magnética, eles se concentram em regiões de mesma direção magnética. Isto é chamado de *Acoplamento de Troca*. Ou seja, um exame microscópico revelaria que um ímã é, na verdade, composto por pequenas regiões, na sua maioria com 1mm de largura ou comprimento [Giancoli], que se comportam como um pequeno ímã independente, com os seus dois pólos. Estas regiões são conhecidas como **Domínios Magnéticos**. Num material desmagnetizado os domínios estão desalinhados, ou seja, estão numa disposição aleatória. Os efeitos de um domínio cancela o de outro e o material não apresenta um efeito magnético resultante. A figura 2.5 mostra os domínios magnéticos desalinhados de um material.

Quando submetidos a campos magnéticos externos (aproximação de um ímã, por exemplo), estes materiais têm a maioria de seus **domínios alinhados** ao campo externo. Na verdade, existe um aumento daqueles domínios que se encontravam inicialmente em direções próximas à direção do campo em detrimento daqueles domínios que apresentavam direções opostas, estes últimos diminuindo de tamanho. A figura 2.6 mostra um material sob a ação de um campo magnético orientando os seus domínios magnéticos.



*Figura 2.5 - Domínios magnéticos desalinhados*



**Figura 2.6 - Domínios magnéticos orientados sob a ação de um campo**

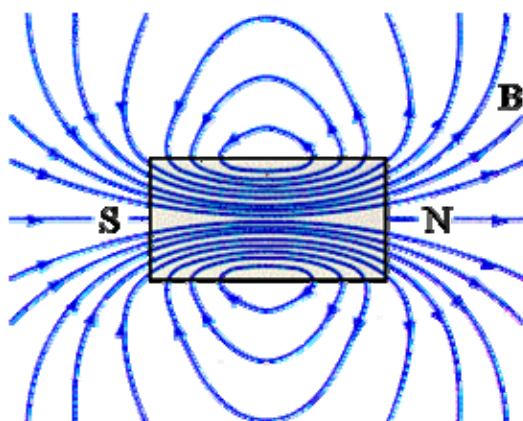
Enquanto o material estiver com os seus domínios alinhados ele age como um ímã. Se ao afastarmos o campo externo os domínios se desalinham, o material perde o efeito magnético. Isso explica, por exemplo, porque um ímã consegue atrair vários cliques e estes uns aos outros. Cada clipe age como um pequeno ímã temporário.

### 3. Campo Magnético

Campo Magnético é a região ao redor de um ímã, na qual se observa um efeito magnético. Esse efeito é percebido pela ação de uma Força Magnética de atração ou de repulsão. O campo magnético pode ser definido pela medida da força que o campo exerce sobre o movimento das partículas de carga, tal como um elétron.

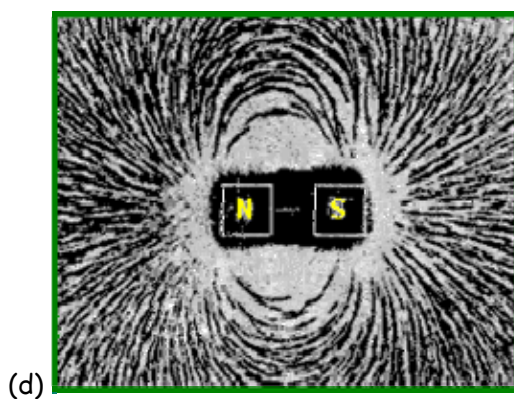
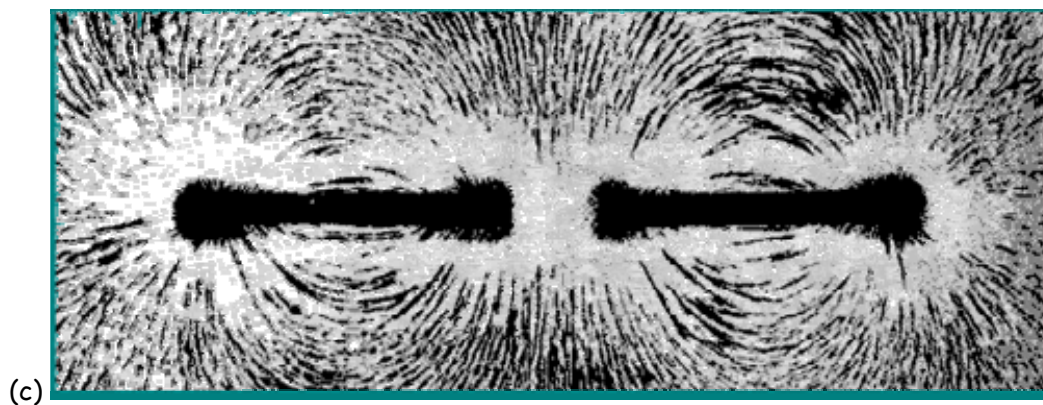
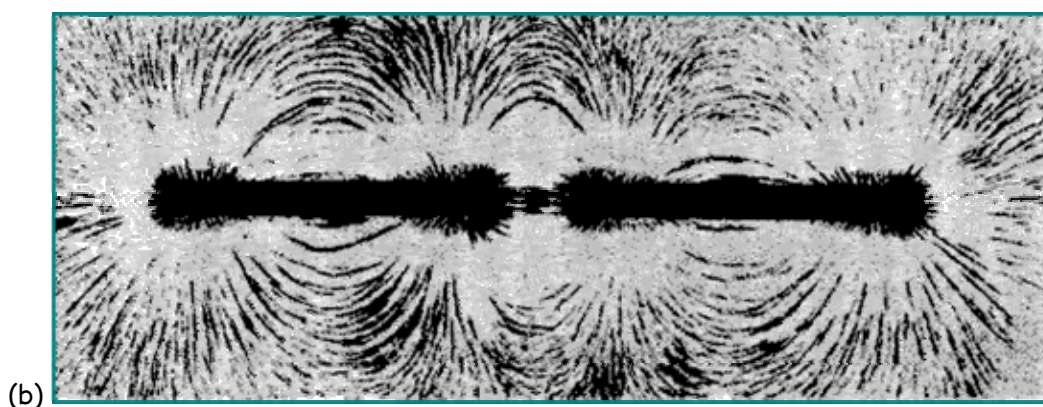
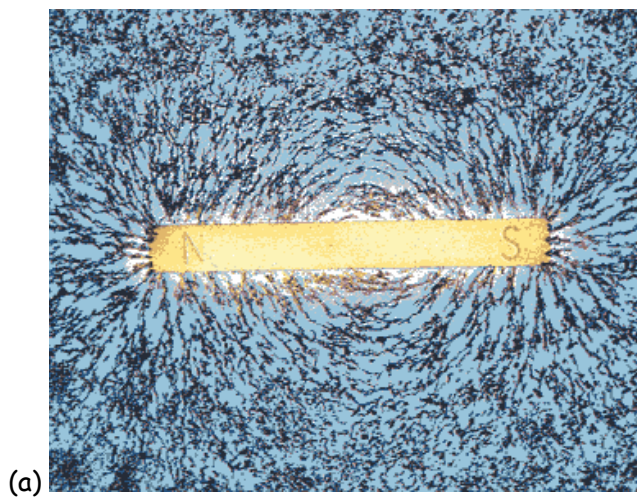
Como veremos neste estudo, um campo magnético pode ser criado por um ímã permanente, por uma corrente elétrica num condutor ou por qualquer carga elétrica em movimento. Desta forma, esse campo magnético pode ser percebido pela ação de uma força magnética sobre uma carga elétrica em movimento ou sobre um condutor percorrido por corrente elétrica.

A representação visual do Campo Magnético é feita através de **Linhas de Campo Magnético**, também conhecidas por **Linhas de Indução Magnética** ou ainda por **Linhas de Fluxo Magnético**, que são linhas envoltórias imaginárias. As linhas de campo magnético são linhas *fechadas que saem do pólo norte e entram no pólo sul*. A figura 3.1 mostra as linhas de campo representando visualmente o campo magnético. Em 3.2 as linhas de campo são visualizadas com limalha de ferro sobre um vidro. Em 3.3 vemos a representação do campo magnético terrestre.



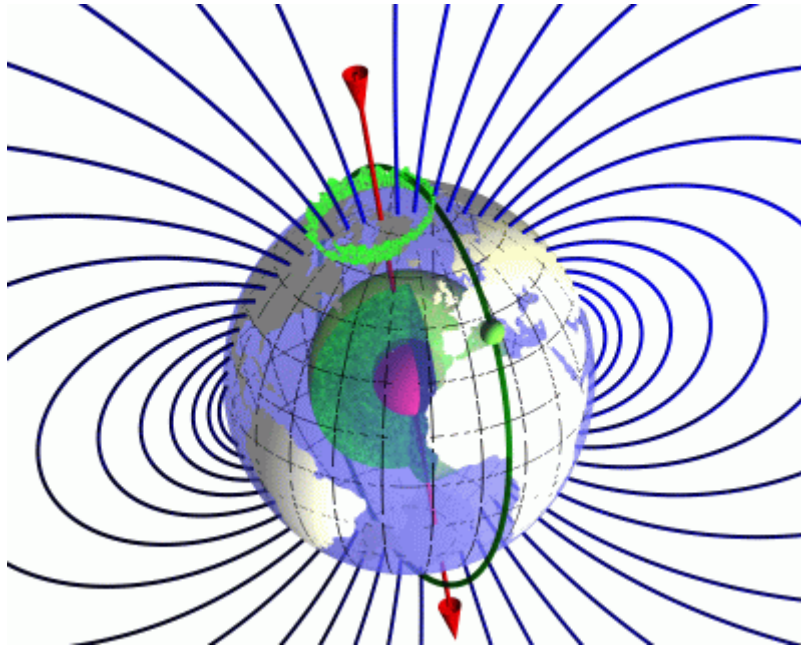
**Figura 3.1 - Linhas de Campo Magnético dentro e fora de um ímã** (Fonte: <http://images.google.com.br>).





**Figura 3.2 - Visualização das Linhas de Campo com limalha de ferro:** (a) um ímã em forma de barra (Fonte: Giancoli. *Physics for engineers and scientists*; (b) dois ímãs em barra com polos opostos se defrontando concentram as linhas de campo; (c) dois ímãs em barra com pólos iguais se defrontando deformam as linhas de

*campo; (d) linhas de campo de um ímã em ferradura (U) visto do topo (Fonte: [http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_T01.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_T01.asp))*



*Figura 3.3 - Linhas do Campo Magnético Terrestre (Fonte: <http://images.google.com.br>)*

**As características das linhas de campo magnético:**

- São sempre linhas fechadas: saem e voltam a um mesmo ponto;
- As linhas nunca se cruzam;
- Fora do ímã, as linhas saem do pólo norte e se dirigem para o pólo sul;
- Dentro do ímã, as linhas são orientadas do pólo sul para o pólo norte;
- Saem e entram na direção perpendicular às superfícies dos pólos;
- Nos pólos a concentração das linhas é maior: quanto maior concentração de linhas, mais intenso será o campo magnético numa dada região;

Uma verificação das propriedades das linhas de campo magnético é a chamada **inclinação magnética** da bússola. Nas proximidades do equador as linhas de campo são praticamente paralelas à superfície. À medida que nos aproximamos dos pólos as linhas vão se inclinando até se tornarem praticamente verticais na região polar. Assim, a agulha de uma bússola acompanha a inclinação dessas linhas de campo magnético e se pode verificar que na região polar a agulha da bússola tenderá a ficar praticamente na posição vertical.

Se dois pólos diferentes de ímãs são aproximados haverá uma força de atração entre eles e as linhas de campo se concentrarão nesta região e seus trajetos serão completados através dos dois ímãs. Se dois pólos iguais são aproximados haverá uma força de repulsão e as linhas de campo divergirão, ou seja serão distorcidas e haverá uma região entre os ímãs onde o campo magnético será nulo. Estas situações estão representadas na figura 3.4. Nas figuras 3.2 (b) e (c) também podemos observar essas situações.

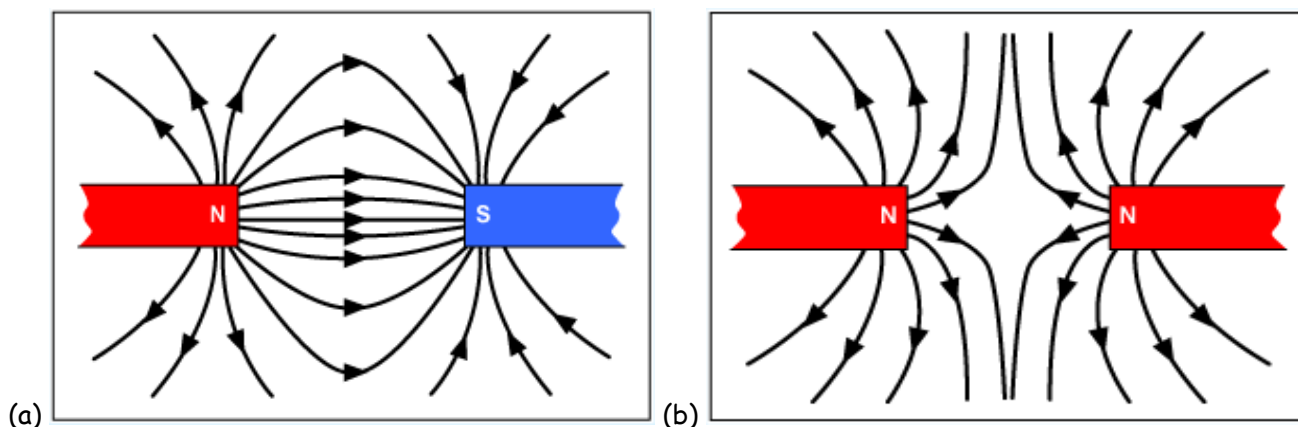


Figura 3.4 - Distribuição das Linhas de Campo Magnético: (a) atração entre pólos diferentes; (b) repulsão entre pólos iguais (Fonte: <http://images.google.com.br>)

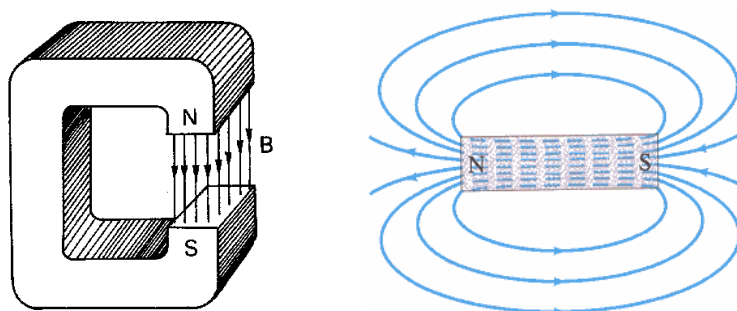


Figura 3.5 - Campo magnético uniforme e não-uniforme (Fonte: Moretto, V.P. Eletricidade e Eletromagnetismo, ed. Ática, 3ª ed, 1989).

No caso de um ímã em forma de ferradura, as linhas de campo entre as superfícies paralelas dispõem-se praticamente **paralelas**, originando um **campo magnético uniforme**. No campo magnético uniforme, todas as *linhas de campo* têm a *mesma direção e sentido* em qualquer ponto. A figura 3.5 mostra essa situação. Na prática, dificilmente encontra-se um campo magnético perfeitamente uniforme. Entre dois pólos planos e paralelos o campo é praticamente uniforme se a área dos pólos for maior que a distância entre eles. Nas bordas de um elemento magnético há sempre algumas linhas de campo que não são paralelas às outras. Estas distorções são chamadas de "**espraçamento**", como mostra a figura 3.6.

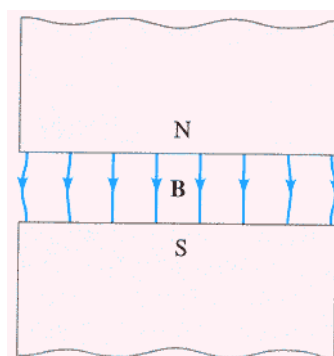


Figura 3.6 - Espraçamento de linhas num campo magnético praticamente uniforme (Fonte: Giancoli. Physics for engineers and scientists).

### 3.1. Densidade de Campo Magnético ou Densidade de Fluxo Magnético

O **Fluxo magnético**, simbolizado por  $\Phi$ , é definido como o conjunto de todas as linhas de campo que atingem **perpendicularmente** uma dada área, como mostra a figura 3.7. A unidade de Fluxo Magnético é o

**Weber (Wb).** Um Weber corresponde a  $1 \times 10^8$  linhas do campo magnético [Giancoli]. Por ter uma dada orientação (direção e sentido), o fluxo magnético é uma grandeza vetorial.

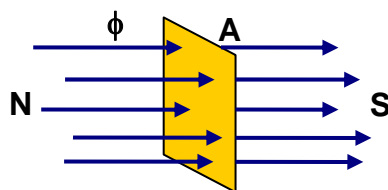


Figura 3.7 - Fluxo Magnético: quantidade de linhas de campo numa área.

A **Densidade de Campo Magnético** também conhecida como **Densidade de Fluxo Magnético** ou simplesmente **Campo Magnético**<sup>2</sup>, é uma **grandeza vetorial** representada pela letra **B**, cuja unidade é o **Tesla**<sup>3</sup> (T) e é determinada pela relação entre o Fluxo Magnético  $\phi$  e a área de uma dada superfície perpendicular à direção do fluxo magnético. Assim:

$$B = \frac{\phi}{A}$$

onde:

B - Densidade de Campo Magnético ou Densidade de Fluxo Magnético, Tesla (T);

$\phi$  - Fluxo Magnético, Weber (Wb);

A - área da seção perpendicular perpendicular ao fluxo magnético,  $m^2$ .

Dessa equação podemos verificar que  $1T = 1Wb/m^2$ .

A direção do vetor Densidade de Campo Magnético **B** é sempre **tangente** às linhas de campo magnético em qualquer ponto, como mostra a figura 3.8. O sentido do vetor Densidade de Campo Magnético é sempre o mesmo das linhas de campo. A figura 3.9 mostra as linhas de campo magnético usando limalha de ferro e bússolas indicando a ação da força magnética e a direção tangente para o Vetor Densidade de Campo Magnético.

O número de linhas de campo magnético que atravessam uma dada superfície **perpendicular** por unidade de área é proporcional ao módulo do vetor **B** na região considerada. Assim sendo, onde as linhas de indução estão muito próximas umas das outras, **B** terá alto valor. Onde as linhas estiverem muito separadas, **B** será pequeno.

**Observação:** se as linhas de campo não forem perpendiculares à superfície considerada devemos tomar a componente perpendicular, como será estudado posteriormente.

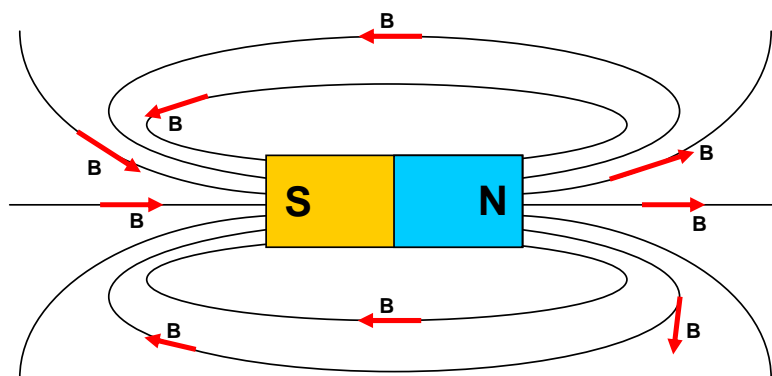
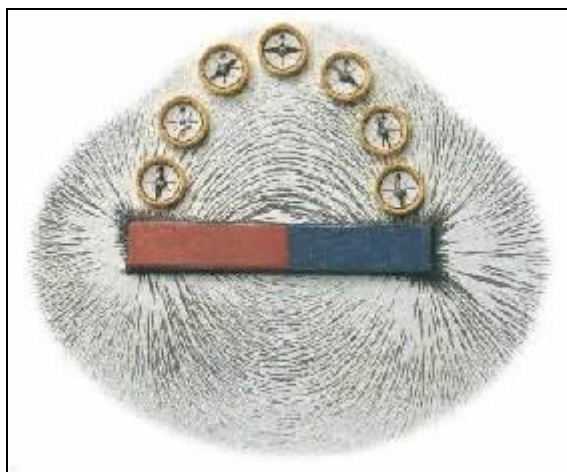


Figura 3.8 - Vetor Densidade de Campo Magnético tangente às linhas de campo.

<sup>2</sup> Alguns autores denominam essa grandeza simplesmente de Intensidade de Campo Magnético.

<sup>3</sup> Nikola TESLA (1856-1943): inventor e engenheiro eletricitista croata-americano, desenvolveu o motor de corrente alternada e vários outros inventos, entre os quais a Bobina de Tesla, indutores, transformadores, sistemas polifásicos e sistemas de iluminação.





*Figura 3.9 - Ação do campo magnético de um ímã sobre uma bússola: direção tangente às linhas de campo.*

No interior de um ímã as linhas de campo encontram-se mais concentradas e, portanto, a intensidade do campo magnético é elevada. Há, portanto, alta densidade de fluxo magnético. Externamente ao ímã as linhas de campo encontram-se mais dispersas ao longo dos caminhos entre os pólos, como mostra claramente a figura 3.8. Podemos concluir que a intensidade do campo magnético nesta região é menor, ou seja, há menor densidade de fluxo magnético.

No entanto, percebemos que o número de linhas de campo no interior do ímã e no exterior é exatamente o mesmo, já que são linhas fechadas. Assim o fluxo magnético total no interior e no exterior de um ímã é exatamente o mesmo, porém percebemos que a Densidade de Fluxo Magnético é maior no interior do ímã que no exterior, pois o mesmo número de linhas está concentrado numa área menor.

A densidade de fluxo magnético também pode ser medida em **Gauss** no sistema CGS:

$$1\text{ T} = 10^4 \text{ Gauss}$$

Como indica a figura 3.8, o conjunto de todas as linhas de campo numa dada superfície é denominado Fluxo Magnético. Assim o Fluxo Magnético pode ser determinado pela integral da Densidade de Campo Magnético numa dada área, pois:

$$B = \frac{d\phi}{dA}$$

$$d\phi = B \cdot dA$$

$$\int d\phi = \int B \cdot dA$$

$$\phi = \int B \cdot dA$$

### Exemplo 3.1.

Um fluxo magnético de  $8 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$  atinge perpendicularmente uma superfície de  $2 \text{ cm}^2$ . Determine a densidade de fluxo  $B$ .

Temos:  $2 \text{ cm}^2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Substituindo na equação:

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{8 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

Assim, a densidade de fluxo magnético é de  $4 \cdot 10^{-2} \text{ T}$ .

## 4. Indução Magnética - Imantação

A Indução Magnética é o fenômeno de imantação de um material provocada pela proximidade de um campo magnético. Como podemos ver na figura 4.1, o ímã induz magneticamente (imanta) os pregos e estes sucessivamente imantam uns aos outros e atraem-se.



Figura 4.1 - Imantação por Indução Magnética (Fonte: <http://images.google.com.br>).

Quando o ferro encontra-se próximo de um ímã, o campo magnético faz com que a barra de ferro se transforme temporariamente em um ímã. Isto acontece porque na presença de um campo magnetizante (ou campo indutor) os domínios magnéticos do ferro, que normalmente estão orientados em todas as direções ao longo da barra, ficam orientados em uma direção predominante, como num ímã. Esta situação está demonstrada na figura 4.2.

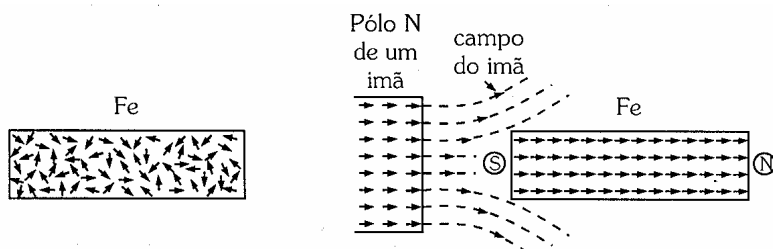


Figura 4.2 - Indução magnética (Fonte: Gozzi, G.G.M., Circuitos Magnéticos, Ed. Érica, 1996).

Quando afastamos o ímã indutor, a maioria dos domínios magnéticos do ferro volta ao estado de orientação desorganizada fazendo com que o material praticamente perca as suas propriedades magnéticas. Materiais com esse comportamento, como o ferro puro<sup>4</sup>, são chamados **Materiais Magneticamente Moles**.

Os materiais nos quais os domínios magnéticos não perdem a orientação obtida com a aproximação de um campo magnético são chamados **Materiais Magneticamente Duros**, como o aço e o ferrite. Isto acontece porque nessas ligas (Ferro e Carbono) os átomos de ferro uma vez orientados sob a ação do campo magnético são impedidos de voltar à sua orientação inicial pelos átomos do outro do material da liga, permanecendo magnetizados. É assim que são fabricados os ímãs permanentes.

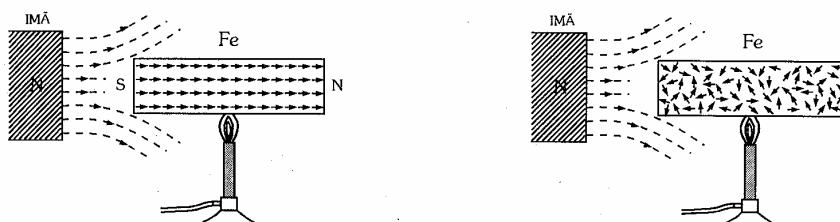
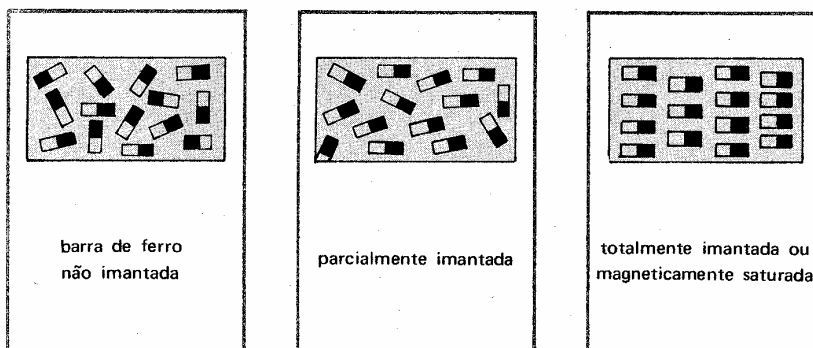


Figura 4.3 - Influência da temperatura no magnetismo (Gozzi, G.G.M., Circuitos Magnéticos, Ed. Érica, 1996).

<sup>4</sup> Também conhecido por Ferro Doce ou *Soft Iron*.

Porém, aquecendo-se uma barra de ferro sob a ação de um campo magnético acima de uma certa temperatura, no caso  $770^{\circ}\text{C}$ , ela deixa de ser atraída pelo ímã. Esta temperatura é denominada **Ponto Curie**. Isto acontece, pois o aquecimento provoca uma agitação nos átomos de ferro, de tal maneira que eles se desorganizam e a barra de ferro perde as suas propriedades magnéticas. Quando a barra de ferro é esfriada, ela novamente será atraída pelo ímã. A figura 4.3 ilustra essa situação.



**Figura 4.4 - Saturação Magnética**

Um material também pode perder suas propriedades magnéticas quando submetido a choques mecânicos que propiciem a desorientação dos seus átomos.

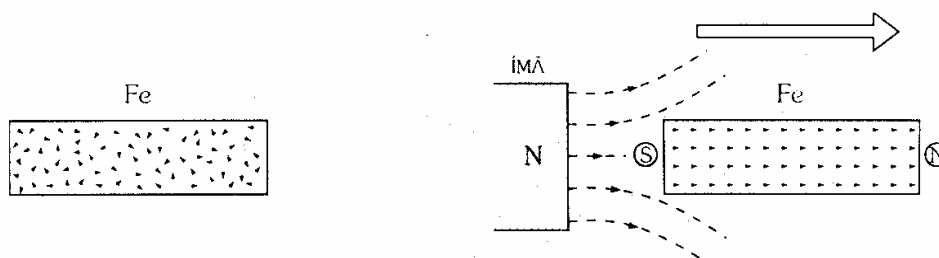
Um material pode ter os seus átomos orientados até um determinado limite. O efeito devido à limitação na orientação e alinhamento dos átomos do material, mesmo sob a ação de campos magnéticos intensos, é chamado de **Saturação Magnética**. A figura 4.4 ilustra a condição de saturação magnética.

## 5. Classificação das Substâncias quanto ao Comportamento Magnético

As substâncias são classificadas em quatro grupos quanto ao seu comportamento magnético: *ferromagnéticas*, *paramagnéticas*, *diamagnéticas* e *ferrimagnéticas*.

### 5.1. Substâncias Ferromagnéticas:

Seus ímãs elementares sofrem *grande influência* do campo magnético indutor. De modo que, eles ficam *majoritariamente* orientados no mesmo sentido do campo magnético aplicado e são fortemente atraídos por um ímã. Exemplos: ferro, aços especiais, cobalto, níquel, e algumas ligas (*alloys*) como Alnico e Permalloy, entre outros. A figura 5.1 ilustra o comportamento das substâncias ferromagnéticas.



**Figura 5.1 -Substâncias ferromagnéticas** (Fonte: Gozzi, G.G.M., *Circuitos Magnéticos*, Ed. Érica, 1996).

## 5.2. Substâncias Paramagnéticas:

Seus ímãs elementares ficam *fracamente* orientados no *mesmo sentido* do campo magnético indutor. Surge, então, uma força de *atração muito fraca* entre o ímã e a substância paramagnética. Exemplos: alumínio, sódio, manganês, estanho, cromo, platina, paládio, oxigênio líquido, sódio, etc. A figura 5.2 ilustra o comportamento das substâncias paramagnéticas.

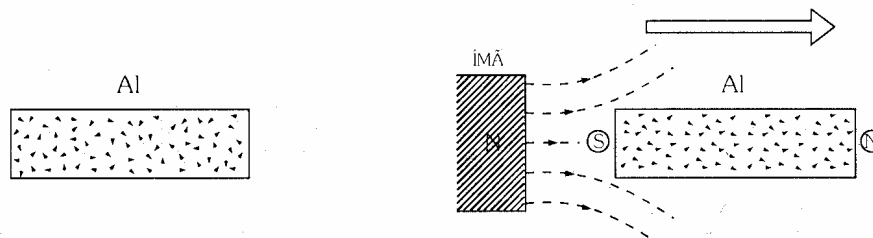


Figura 5.2 - Substâncias paramagnéticas (Fonte: Gozzi, G.G.M., Circuitos Magnéticos, Ed. Érica, 1996).

## 5.3. Substâncias Diamagnéticas:

Substâncias Diamagnéticas são aquelas que quando colocadas próximas a um campo magnético indutor proveniente de um ímã, os seus ímãs elementares sofrem uma pequena influência, de modo que eles ficam *fracamente* orientados em *sentido contrário* ao campo externo aplicado. Surge, então, entre o ímã e a substância diamagnética, uma força de *repulsão fraca*. Exemplos: cobre, água, mercúrio, ouro, prata, bismuto, antimônio, zinco, chumbo, Cloreto de Sódio (NaCl), etc. A figura 5.3 ilustra o comportamento das substâncias diamagnéticas.

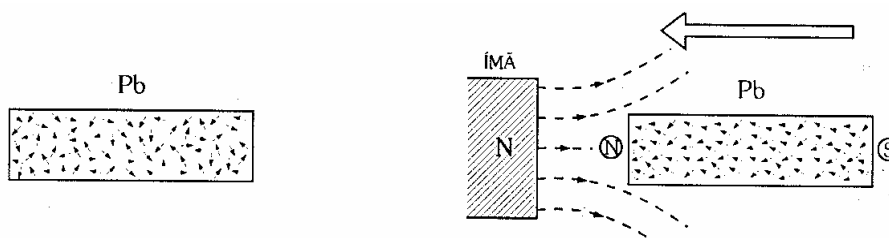
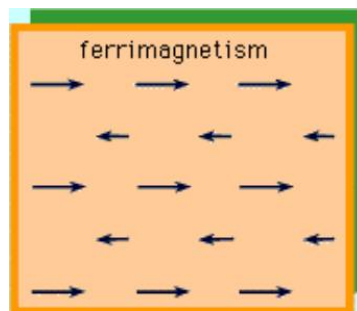


Figura 5.3 -Substâncias diamagnéticas (Fonte: Gozzi, G.G.M., Circuitos Magnéticos, Ed. Érica, 1996).

## 5.4. Substâncias Ferrimagnéticas:

O Ferrimagnetismo permanente ocorre em sólidos nos quais os campos magnéticos associados com átomos individuais se alinham espontaneamente, alguns de forma paralela, ou na mesma direção (como no ferromagnetismo) e outros geralmente antiparalelos, ou emparelhados em direções opostas, como ilustra a figura 5.4. O comportamento magnéticos de cristais de materiais ferrimagnéticos pode ser atribuído ao alinhamento paralelo; o efeito desses átomos no arranjo antiparalelo mantém a força magnética desses materiais geralmente menor do que a de sólidos puramente ferromagnéticos como o ferro puro.

O Ferrimagnetismo ocorre principalmente em óxidos magnéticos conhecidos como *Ferritas*. O alinhamento espontâneo que produz o ferrimagnetismo também é completamente rompido acima da temperatura de *Curie*, característico dos materiais ferromagnéticos. Quando a temperatura do material está abaixo do Ponto Curie, o ferrimagnetismo aparece novamente.

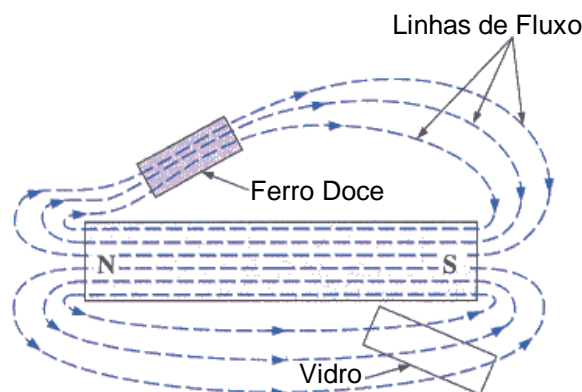


**Figura 5.4 - Ferrimagnetismo**

## 6. Permeabilidade Magnética

Se um material não magnético, como vidro ou cobre for colocado na região das linhas de campo de um ímã, haverá uma imperceptível alteração na distribuição das linhas de campo. Os materiais não magnéticos, em geral, são transparentes ao fluxo magnético, isto é, seu efeito sobre as linhas de fluxo magnético é semelhante à do vácuo ou do ar. Entretanto, se um material magnético, como o ferro, for colocado na região das linhas de campo de um ímã, estas passarão através do ferro em vez de se distribuírem no ar ao seu redor porque elas se concentram com maior facilidade nos materiais magnéticos, como indicam as figuras 6.1 e 6.2. Este princípio é usado na Blindagem Magnética de elementos e instrumentos elétricos sensíveis e que podem ser afetados pelo campo magnético. As figura 6.3 e 6.4 mostram exemplos de blindagem magnética onde as linhas de campo ficam concentradas na carcaça metálica. Percebemos, na figura 6.4 que as linhas de campo não atingem o instrumento, ou seja, o campo magnético é praticamente nulo no seu interior.

Portanto, um material na proximidade de um ímã pode alterar a distribuição das linhas de campo magnético. Se diferentes materiais com as mesmas dimensões físicas são usados a intensidade com que as linhas são concentradas varia. Esta variação se deve a uma grandeza associada aos materiais chamada Permeabilidade Magnética,  $\mu$ . A Permeabilidade Magnética de um material é uma medida da facilidade com que as linhas de campo podem atravessar um dado material. As figuras 6.1 e 6.2 mostram a concentração das linhas de campo um magnético devido à presença de um material de alta permeabilidade. Podemos entender a permeabilidade magnética como um conceito similar ao conceito da condutividade elétrica dos materiais.



**Figura 6.1 - Distribuição das linhas de campo na proximidade de um material magnético e não magnético.**  
 (Fonte: R.L. Boylestad, *Introductory Circuit Analysis*, 10ª ed. 2003)



Figura 6.2 - Concentração das linhas de campo devido a um meio de alta permeabilidade.

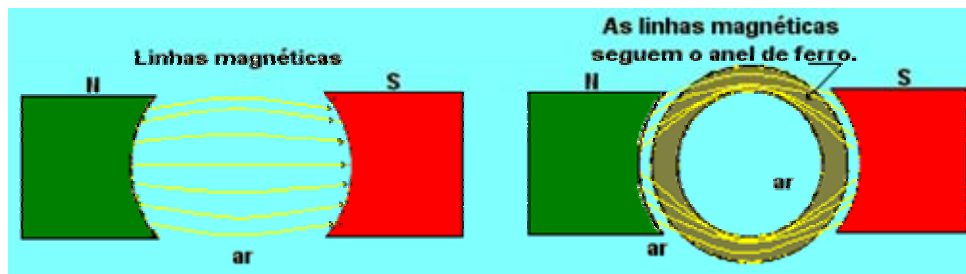


Figura 6.3 - Efeito da alta permeabilidade do ferro na blindagem magnética (Fonte: [http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_38.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_38.asp)).

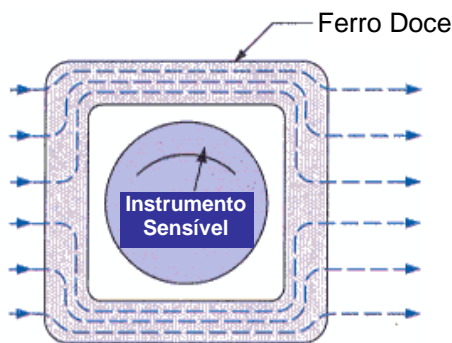


Figura 6.4 - Efeito da Blindagem Magnética; campo magnético praticamente nulo no interior (Fonte: R.L. Boylestad, *Introductory Circuit Analysis*, 10ª ed. 2003).

A permeabilidade magnética do vácuo,  $\mu_0$  vale:

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Wb}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

A unidade de permeabilidade também pode ser expressa por Tesla-metro por Ampère, Tm/A ou ainda, Henry por metro, H/m. Assim:  $H = \text{Wb}/A$ .

A permeabilidade magnética de todos os materiais não magnéticos, como o cobre, alumínio, madeira, vidro e ar é aproximadamente igual à permeabilidade magnética do vácuo. Os materiais que têm a permeabilidade um pouco inferior à do vácuo são chamados **Materiais Diamagnéticos**. Aqueles que têm a permeabilidade um pouco maior que a do vácuo são chamados **Materiais Paramagnéticos**. Materiais magnéticos como o ferro, níquel, aço, cobalto e ligas desses materiais (*Alloys*) têm permeabilidade centenas e até milhares de vezes maiores que a do vácuo. Esses materiais são conhecidos como **Materiais Ferromagnéticos**.

A propriedade de um material pela qual ele muda a indução de um campo magnético, em relação ao seu valor no vácuo, é chamada Permeabilidade Magnética Relativa ( $\mu_r$ ). Portanto, é dada pela relação entre a permeabilidade de um dado material e a permeabilidade do vácuo, assim:

$$\mu_r = \frac{\mu_m}{\mu_0}$$

onde:

$\mu_r$  - permeabilidade relativa de um material (adimensional)

$\mu_m$  - permeabilidade de um dado material

$\mu_o$  - permeabilidade do vácuo

Geralmente,  $\mu_r \geq 100$  para os materiais ferromagnéticos, valendo entre 2.000 e 6.000 nos materiais de máquinas elétricas e podendo ultrapassar 100.000 em materiais especiais. Para os não magnéticos  $\mu_r \cong 1$ . A tabela 6.1 mostra uma relação simplificada dos valores de permeabilidade relativa dos materiais. A tabela 6.2 apresenta valores de permeabilidade magnética relativa para alguns materiais ferromagnéticos utilizados em dispositivos eletro-eletrônicos.

**Observação:** devemos ter em mente que a permeabilidade de um material ferromagnético não é constante e seu valor depende da densidade de campo magnético a que está submetido. Esse assunto será estudado no item sobre curvas de magnetização.

Tabela 6.1 - Materiais quanto à Permeabilidade Relativa

Permeabilidade Relativa, $\mu_R$	Tipo de Material
$\gg 1$	Ferromagnéticos
$\cong 1$	Paramagnéticos
$< 1$	Diamagnéticos

Tabela 6.2 - Permeabilidade Relativa de Materiais Ferromagnéticos

Tipo de Material	Permeabilidade Relativa, $\mu_R$
Ferro Comercial	9.000
Ferro Purificado	200.000
Ferro Silício	55.000
Permalloy	$1 \times 10^6$
Supermalloy	$1 \times 10^7$
Permendur	5.000
Ferrite	2.000

## 7. Relutância Magnética

A relutância magnética é uma medida da oposição que um meio oferece ao estabelecimento e concentração das linhas de campo magnético. A relutância magnética é determinada pela equação:

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot A}$$

onde:

$\mathfrak{R}$  - relutância magnética, rel/s ou Ae/Wb (Ampéres-espiras<sup>5</sup> por Weber);

$\ell$  - comprimento médio do caminho magnético das linhas de campo no meio, m;

$\mu$  - permeabilidade magnética do meio, Wb/Am;

$A$  - área da seção transversal, m<sup>2</sup>.

A relutância magnética é uma grandeza análoga à resistência elétrica que pode ser determinada pela equação que relaciona a resistividade e as dimensões de um material:

$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{A}$$

<sup>5</sup> A unidade Ampéres-espiras está associada ao número de espiras de uma bobina eletromagnética. Este assunto será estudado posteriormente.



Podemos notar que a resistência elétrica  $R$  e a relutância magnética  $\mathfrak{R}$  são inversamente proporcionais à área  $A$ , ou seja, maior área menor resistência ao fluxo de cargas elétricas e ao fluxo de linhas de campo. Estas grandezas são diretamente proporcionais ao comprimento  $\ell$  do material. Entretanto a relutância é inversamente proporcional à permeabilidade magnética, enquanto a resistência é diretamente proporcional à resistividade elétrica  $\rho$ . Materiais com alta permeabilidade, como os ferromagnéticos, têm relutâncias muito baixas e, portanto, proporcionam grande concentração das linhas de campo magnético.

Quando dois materiais de permeabilidades diferentes apresentam-se como caminho magnético para as linhas do campo, estas se dirigem para o de maior permeabilidade. Isto é chamado de **Princípio da Relutância Mínima**, e é mostrado na figura 7.1. Este princípio pode ser aplicado quando se necessita uma **Blindagem Magnética**, ou seja, liberar um dispositivo das influências magnéticas, como ilustra a figura 6.3.

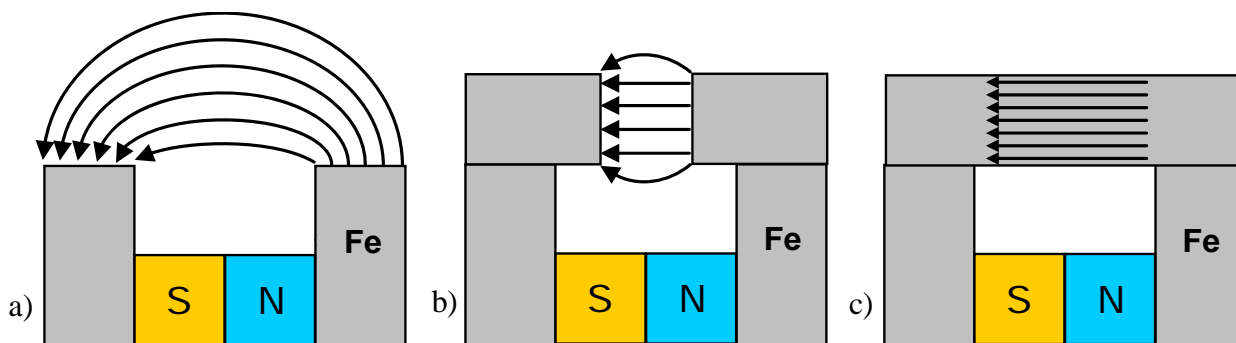


Figura 7.1 - relutância: (a) alta; (b) baixa e (c) menor.

Na figura 7.2 podemos perceber que o ferro, de alta permeabilidade, representa um caminho magnético de menor relutância para as linhas de campo, concentrando-as. Já o vidro, de baixa permeabilidade, não proporciona grande concentração das linhas de campo. Isso representa um caminho magnético de alta relutância.

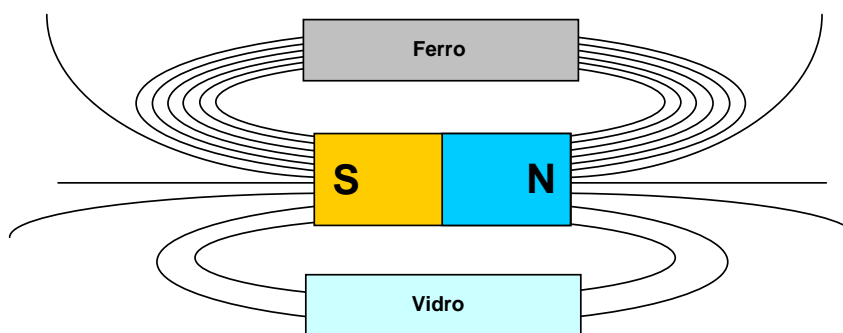
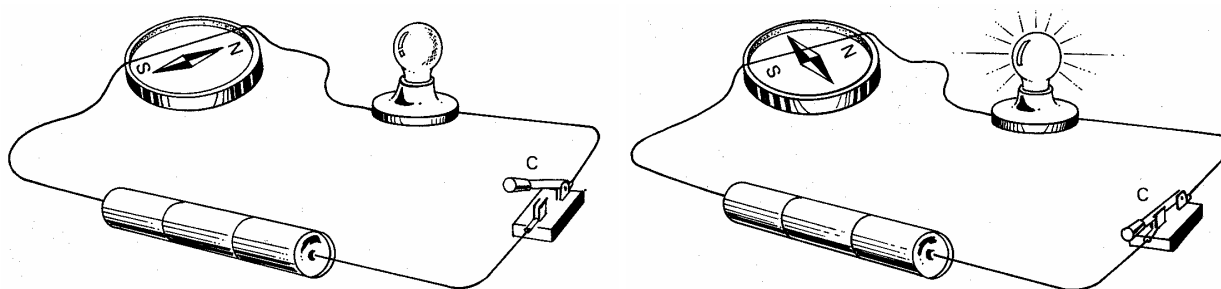


Figura 7.2 - Caminhos Magnéticos de alta e baixa relutância.

## Parte II - ELETROMAGNETISMO

### 1. Descobertas de Oersted

Até o início do século XIX acreditava-se que não existia relação entre os fenômenos elétricos e magnéticos. Em 1819, um professor e físico dinamarquês chamado *Hans Christian Oersted* observou que uma *corrente elétrica* era capaz de alterar a direção de uma *agulha magnética* de uma bússola. Pesquisas semelhantes foram realizadas na França por *Andre Marie Ampère*



*Figura 1.1 - Experiência de Oersted (Fonte: Moretto, V.P.; Eletricidade e Eletromagnetismo, Ed. Érica, 1989).*

Quando havia corrente elétrica no fio, Oersted verificou que a agulha magnética movia-se, orientando-se numa direção **perpendicular** ao fio, evidenciando a presença de um campo magnético produzido pela corrente, como mostra a figura 1.1. Este campo originava uma força magnética capaz de mudar a orientação da bússola. Interrompendo-se a corrente, a agulha retornava a sua posição inicial, ao longo da direção norte-sul. Observou-se, então, a existência de uma relação entre a *Eletricidade* e o *Magnetismo*. Ao campo magnético de origem elétrica chamamos de Campo Eletromagnético.

*Conclusão de Oersted:*

Todo condutor percorrido por corrente elétrica, cria em torno de si um campo eletromagnético.

Surge, a partir daí, o estudo do Eletromagnetismo.

Em decorrência dessas descobertas, foi possível estabelecer o princípio básico de todos os fenômenos magnéticos:

Quando duas cargas elétricas estão em movimento manifesta-se entre elas uma força magnética além da força elétrica (ou força eletrostática).

### 2. Fenômenos do Eletromagnetismo

Da Lei da Ação e Reação de Newton, podemos concluir que, se um condutor percorrido por corrente provoca uma força de origem magnética capaz de mover a agulha da bússola, que é um ímã, então um ímã deve também provocar uma força num condutor percorrido por corrente.

Além disso, os cientistas concluíram que, se uma corrente elétrica é capaz de gerar um campo magnético, então o contrário é verdadeiro, ou seja, um campo magnético é capaz de gerar corrente elétrica.

São três os principais fenômenos eletromagnéticos e que regem todas as aplicações tecnológicas do eletromagnetismo:

- I. Condutor percorrido por corrente elétrica produz campo magnético;
- II. Campo magnético provoca ação de uma força magnética sobre um condutor percorrido por corrente elétrica.
- III. Fluxo Magnético variante sobre um condutor gera (induz) corrente elétrica.

Estes três fenômenos do eletromagnetismo serão estudados em detalhes ao longo deste trabalho.

### 3. Campo Magnético criado por Corrente Elétrica

Um campo magnético pode ser criado através do movimento de cargas elétricas, tal como o fluxo de corrente num condutor. Ao campo magnético originado por uma corrente elétrica chamamos de **Campo Eletromagnético**<sup>6</sup>. Este campo magnético é originado pelo *momento de giro* do dipolo magnético (referente ao *spin* do elétron) e pelo *momento da órbita* do dipolo magnético de um elétron dentro de um átomo.

No mesmo ano que Oersted comprovou a existência de um campo magnético produzido pela corrente elétrica, o cientista francês André Marie Ampère, preocupou-se em descobrir as características desse campo. Nos anos seguintes, outros pesquisadores como Michael Faraday, Karl Friedrich Gauss e James Clerk Maxwell continuaram investigando e desenvolveram muitos dos conceitos básicos do eletromagnetismo.

Quando o condutor retilíneo da figura 3.1 é percorrido por uma corrente elétrica pode-se observar, pela orientação das agulhas das bússolas, a existência de um campo que o envolve longitudinalmente (ao longo de seu comprimento) e as linhas de campo magnético que o representam, são círculos concêntricos. A figura 3.2 mostra uma foto da visualização das linhas de campo magnético produzido por um condutor retilíneo usando limalha de ferro.



**Figura 3.1 - Orientação da bússola em torno de um condutor percorrido por corrente** (Fonte: Giancoli. *Physics for engineers and scientists*)

As linhas de campo magnético são linhas envoltórias concêntricas e orientadas, como mostra a figura 3.3. O sentido das linhas de campo magnético produzido pela corrente no condutor é dada pela Regra de Ampère.

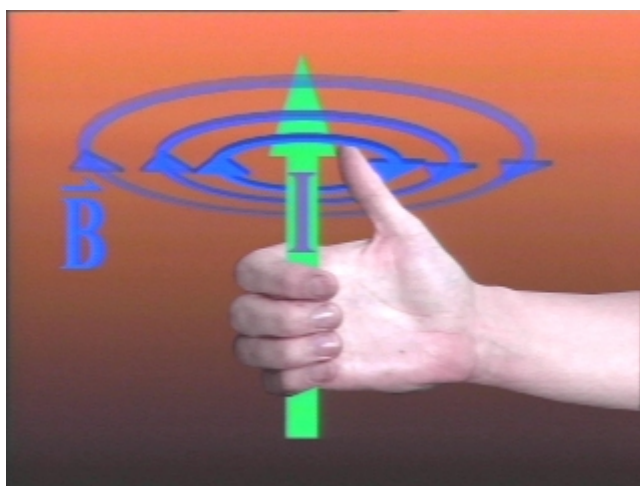
A *Regra de Ampère*, também chamada de *Regra da Mão Direita* é usada para determinar o **sentido das linhas do campo magnético** considerando-se o **sentido convencional da corrente elétrica**. Com a mão direita envolvendo o condutor e o polegar apontando para o sentido convencional da corrente elétrica, os demais dedos indicam o sentido das linhas de campo que envolvem o condutor, como mostra a figura 3.4.

---

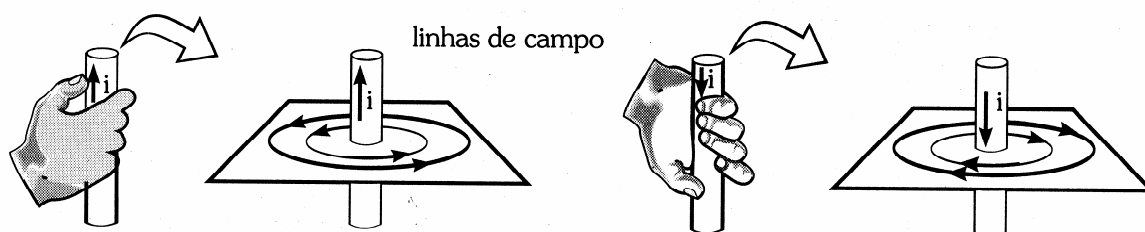
<sup>6</sup> Por simplicidade, usaremos apenas "campo magnético".



**Figura 3.2** - Visualização das linhas de campo produzidas por um condutor percorrido por corrente (Fonte: Giancoli, Physics for engineers and scientists)



**Figura 3.3** - As linhas de campo magnético criado por uma corrente elétrica são concêntricas.



**Figura 3.4** - Lei de Ampère e regra da mão direita (Fonte: Chiquetto e Parada; Física Eletricidade vol.3 ed. Scipione, 1992).

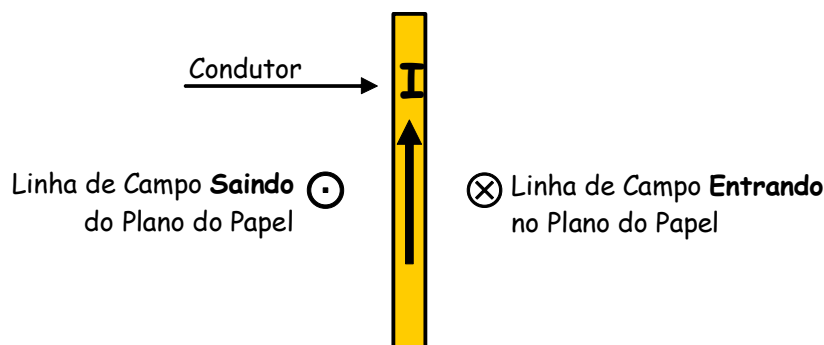
#### Regra de Ampère - Regra da Mão Direita

Mão direita envolvendo o condutor com o polegar apontando para o sentido convencional da corrente elétrica, os demais dedos indicam o sentido das linhas de campo que envolvem o condutor.

Para a representação do sentido das linhas de campo ou de um vetor qualquer perpendicular a um plano (como o plano do papel) podemos usar a seguinte simbologia:

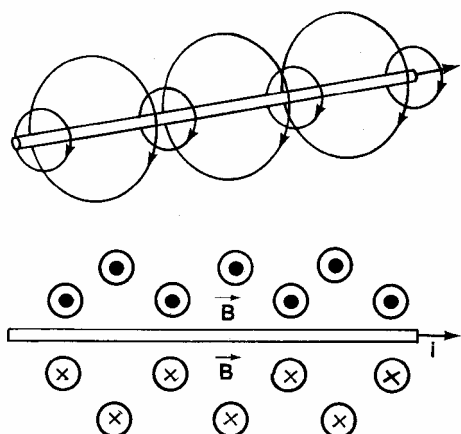
⊙ - Representa um fio, uma linha de campo ou um vetor com **direção perpendicular** ao plano da figura (papel) e com **sentido de saída** deste plano.

⊗ - Representa um fio, uma linha de campo ou um vetor com **direção perpendicular** ao plano da figura (papel) e com **sentido de entrada** neste plano.



*Figura 3.5 - Simbologia para representação do sentido das linhas de campo no plano.*

O campo magnético gerado por um condutor percorrido por corrente pode ser representado por suas linhas desenhadas em perspectiva, ou então com a simbologia estudada, como ilustram as figuras 3.5 e 3.6.



*Figura 3.6 - Campo Eletromagnético produzido por um condutor; a) em perspectiva; b) indicado no plano.*

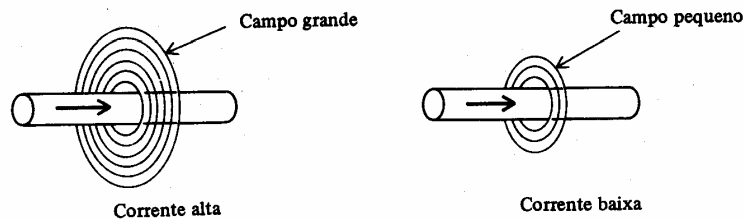
## 4. Fontes do Campo Eletromagnético

Além dos ímãs naturais (magnetita) e os ímãs permanentes feitos de materiais magnetizados, podemos gerar campos magnéticos através da corrente elétrica em condutores. Se estes condutores tiverem a forma de espiras ou bobinas podemos gerar campos magnéticos muito intensos.

### 4.1. Campo Eletromagnético gerado em torno de um Condutor Retilíneo

A intensidade do campo magnético gerado em torno de um condutor retilíneo percorrido por corrente elétrica depende da intensidade dessa corrente. Uma corrente intensa produzirá um campo intenso, com inúmeras linhas de campo que se distribuem até regiões bem distantes do condutor. Desta forma, a densidade de campo magnético é alta na região próxima ao condutor. Uma corrente menos intensa

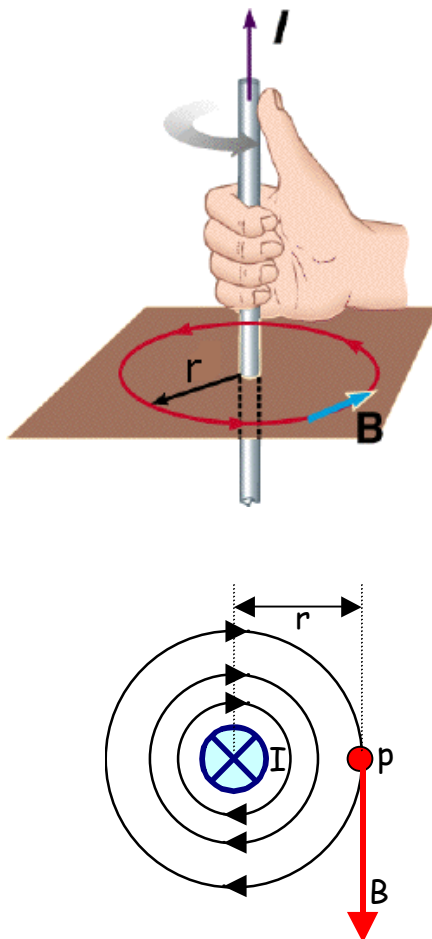
produzirá poucas linhas numa região próxima ao condutor e densidade de campo será menor na região próxima ao condutor. A figura 4.1 ilustra essas duas situações.



**Figura 4.1 - Representação do campo magnético em função da intensidade da corrente**

O **vetor B** representa a **Densidade de Campo Magnético** ou **Densidade de Fluxo**. A figura 4.2 mostra a orientação desse vetor para o campo magnético gerado por um condutor retilíneo percorrido por corrente. Em qualquer ponto este vetor apresenta **direção** sempre **tangente** às linhas de campo no ponto considerado. O **sentido** do vetor é dado pelo sentido das linhas de campo. Isso pode ser comprovado pela observação da orientação da agulha de uma bússola em torno de um condutor percorrido por corrente elétrica, como mostra a figura 3.1, visto no ítem anterior.

O Vetor Densidade de Campo Magnético  $B$  é sempre tangente às linhas de campo.



**Figura 4.2 - Vetor Campo magnético tangente às linhas de campo.**

A Densidade de campo magnético  $B$  num ponto  $p$  considerado, é diretamente proporcional à corrente no condutor, inversamente proporcional à distância entre o centro do condutor e o ponto e depende do meio. Matematicamente:



$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

onde:

B = Densidade de campo Magnético (ou Densidade de Fluxo Magnético) num ponto p [T, Tesla];

r = distância entre o centro do condutor e o ponto p considerado [m];

I = intensidade de corrente no condutor [A].

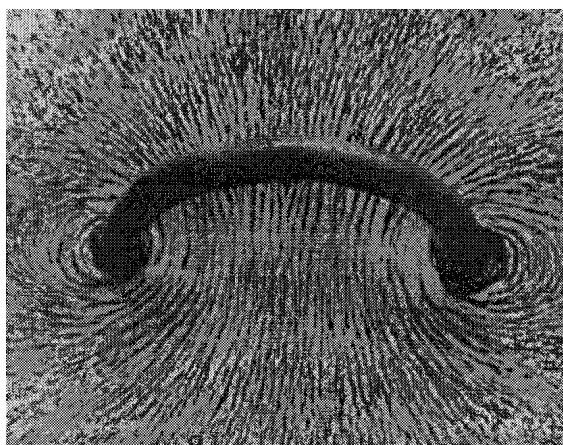
$\mu$  = permeabilidade magnética do meio [T.m/A]

$$\text{Permeabilidade Magnética do Vácuo: } \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ (T.m/A)}$$

Esta equação é válida para **condutores longos**, ou seja, quando a distância r for bem menor que o comprimento do condutor ( $r \ll \ell$ ).

## 4.2. Campo Eletromagnético gerado no centro de uma Espira Circular

Um condutor em forma de espira circular quando percorrido por corrente elétrica é capaz de concentrar as linhas de campo magnético no interior da espira, como mostra a figura 4.3. Isso significa que a densidade de campo magnético resultante no interior da espira é maior que a produzida pela mesma corrente num condutor retilíneo.



**Figura 4.3 – Visualização do Campo magnético no centro de uma espira circular** (Fonte: Gozzi, Giuseppe G. M., *Circuitos Magnéticos, Coleção Estude e Use*, Ed. Érica, 1996).

Para a determinação do campo magnético no **centro** de uma espira circular, a regra da mão direita também é válida. O polegar indica o sentido da corrente elétrica na espira e os demais dedos da mão direita, o sentido das linhas de campo magnético que envolvem o condutor da espira circular.

Na figura 4.4(a) e 4.4(b) podemos verificar que as linhas de campo geradas no condutor são concentradas no interior da espira. A figura 4.4(c) mostra que a regra da mão direita também serve para determinar o sentido resultante das linhas de campo no centro da espira. A figura 4.4(d) mostra as linhas de campo concentradas no interior da espira através de outro ângulo de visão.

A densidade de campo magnético no centro de uma espira circular pode ser calculado por:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot R}$$

Onde:

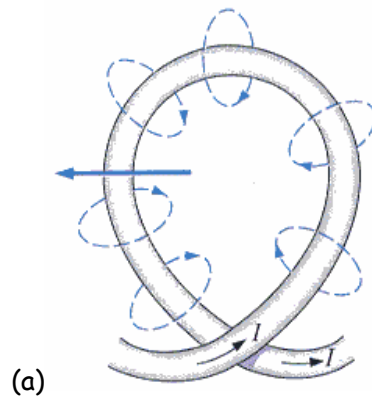
B = é a densidade de campo magnético no centro da espira circular [T, Tesla];

R = raio da espira [m];

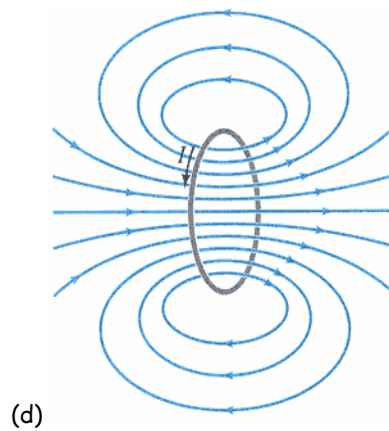
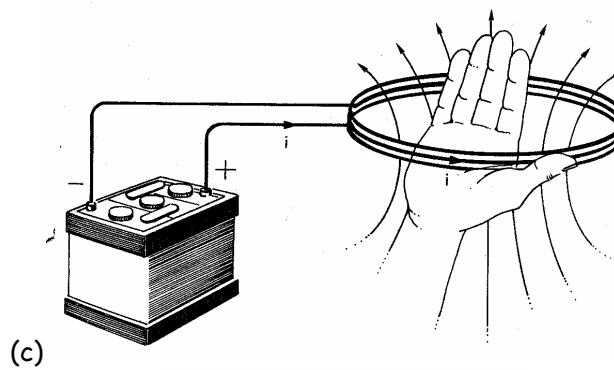
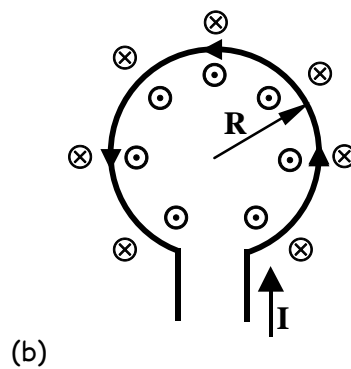
I = intensidade de corrente na espira circular [A].

$\mu$  = permeabilidade magnética do meio [T.m/A]





Fonte: Boylestad, R.L., *Introductory Circuit Analysis*, Prentice Hall, 2003.



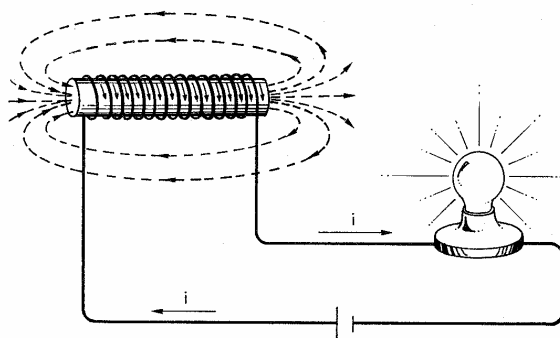
Giancoli. *Physics for engineers and scientists*

Figura 4.4 - Representação do Campo Magnético gerado por uma espira circular percorrida por corrente.

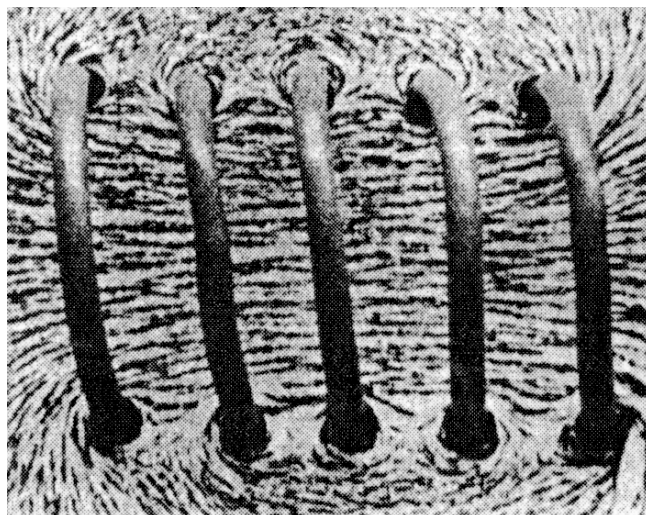
### 4.3. Campo Eletromagnético gerado no centro de uma Bobina Longa ou Solenóide<sup>7</sup>

Um Solenóide é uma bobina longa obtida por um fio condutor isolado e enrolado em espiras iguais, lado a lado, e igualmente espaçadas entre si, como mostra a figura 4.5.

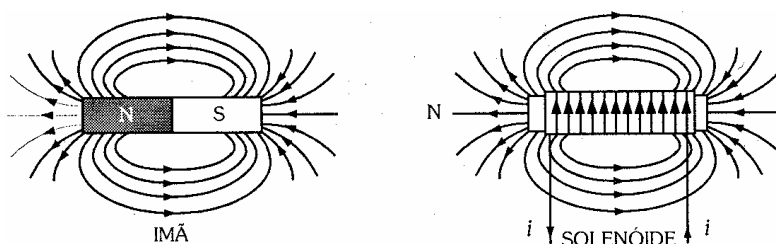
Quando a bobina é percorrida por corrente, os campos magnéticos criados em cada uma das espiras que formam o solenóide somam-se e o resultado final, é idêntico a um campo magnético de um ímã permanente em forma de barra, como apresentado nas figuras 4.6 e 4.7. Podemos observar que as linhas de campo são concentradas no interior do solenóide.



*Figura 4.5 - Linhas do Campo Eletromagnético criado por uma bobina percorrida por corrente*



*Figura 4.6 - Concentração das Linhas Campo Magnético no interior de uma bobina percorrida por corrente (Fonte: Gozzi, Giuseppe G. M., Circuitos Magnéticos, Coleção Estude e Use, Ed. Érica, 1996).*

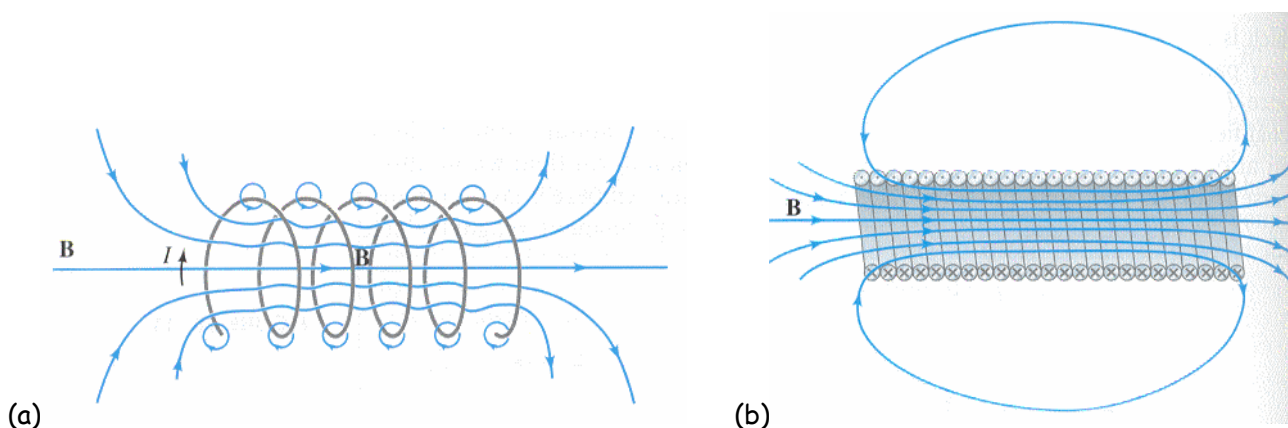


*Figura 4.7. Campo Magnético de um ímã em barra e de um solenóide são semelhantes (Fonte: Gozzi, Giuseppe G. M., Circuitos Magnéticos, Coleção Estude e Use, Ed. Érica, 1996).*

Na figura 4.8(a) podemos observar uma bobina em que suas espiras estão afastadas umas das outras. Entre duas espiras os campos anulam-se pois têm sentidos opostos. No centro do solenóide os campos somam-se. Podemos observar que, no interior do solenóide, as linhas de campo estão concentradas e praticamente paralelas. Isso caracteriza um campo magnético praticamente uniforme. Quanto mais

<sup>7</sup> do grego "sólén": tubo.

próximas estiverem as espiras umas das outras, mais intenso e mais uniforme será o campo magnético, como mostra a figura 4.8(b).



**Figura 4.8 - Campo magnético no solenóide: (a) espiras separadas; (b) espiras justapostas** (Fonte: Giancoli).

Para solenóides suficientemente longos (onde o comprimento longitudinal é bem maior que o diâmetro das suas espiras), pode-se considerar o campo magnético constante e uniforme em praticamente toda a extensão do interior do solenóide. Portanto, a densidade do campo magnético (densidade de fluxo magnético) no **centro** de um solenóide é expresso por:

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{\ell}$$

onde:

$B$  = é a densidade de campo magnético no centro do solenóide [T, Tesla];

$N$  = número de espiras do solenóide;

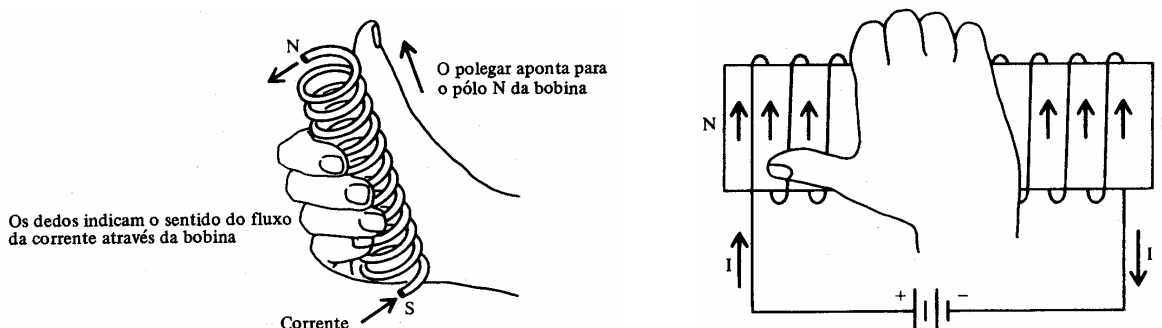
$I$  = é a intensidade de corrente elétrica que percorre o solenóide [A];

$\ell$  = comprimento longitudinal do solenóide [m].

$\mu$  = permeabilidade magnética do meio (núcleo do solenóide) [T.m/A]

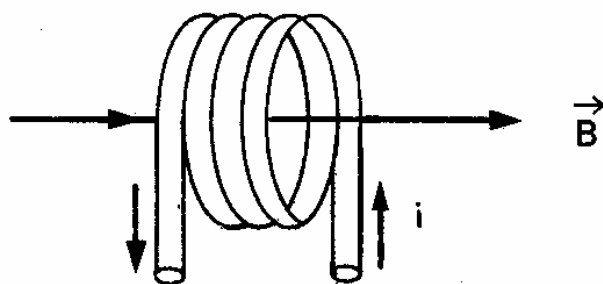
**Observação:** O comprimento  $\ell$  é o comprimento longitudinal do solenóide e não deve ser confundido com o comprimento do condutor do solenóide.

O sentido das linhas de campo pode ser determinado por uma adaptação da regra da mão direita, como ilustram as figuras 4.9 e 4.10.



**Figura 4.9 - Regra da mão direita aplicada a uma bobina.**

A figura 4.7 mostra a semelhança entre os campos magnéticos produzidos por um solenóide e por um ímã permanente em forma de barra. A principal diferença entre eles é que a densidade de fluxo é maior no ímã permanente que no solenóide. A densidade de fluxo no solenóide pode ser sensivelmente aumentada pela inclusão de materiais ferromagnéticos no núcleo da bobina.

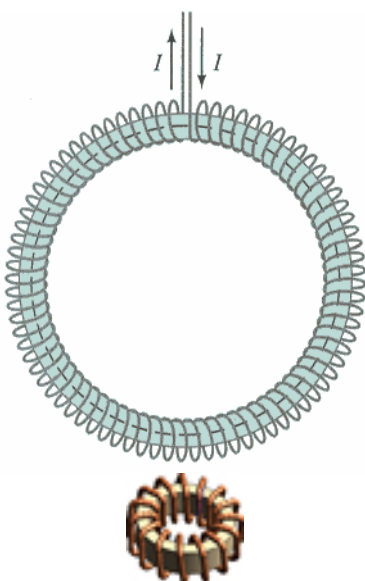


**Figura 4.10 - Sentido do Campo Eletromagnético criado por uma bobina percorrida por corrente** (Fonte: Arcipreste e Granado, Física 3, Ed. Ática, 1983).

Um **Eletroímã** consiste de uma bobina enrolada em torno de um núcleo de material ferromagnético de alta permeabilidade (ferro doce, por exemplo) para concentrar o campo magnético. Cessada a corrente ele perde a magnetização, pois o magnetismo residual é muito baixo. Se o material for magneticamente duro, quando cessada a corrente o núcleo permanecerá magnetizado. Esse é uma forma de criar ímãs permanentes artificiais.

#### 4.4. Campo Eletromagnético gerado por um toróide

Uma bobina toroidal (ou simplesmente, toróide) é um solenóide em forma de anel, como mostra a figura 4.11. Seu núcleo pode ser de ar ou de material ferromagnético. Geralmente as bobinas toroidais são feitas com núcleos de ferrite.



**Figura 4.11 - Aspecto de um Toróide** (Fonte: Giancoli).

Os toróides são o tipo de bobinas capazes de proporcionar a maior concentração das linhas de campo magnético no seu núcleo, que é um caminho fechado para as linhas. Pode ser provado matematicamente que a densidade de campo magnético no interior das espiras (no núcleo) do toróide é dada por:

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

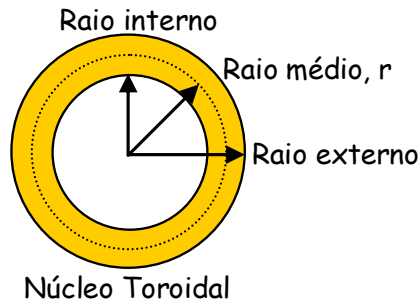
Onde:

B - densidade de campo magnético no interior do núcleo do toróide, [T];

$\mu$  - permeabilidade magnética do meio no interior das espiras do toróide (núcleo);

N - número de espiras da bobina toroidal;  
 I - intensidade de corrente no condutor da bobina, [A];  
 r - raio médio do toróide, [m].

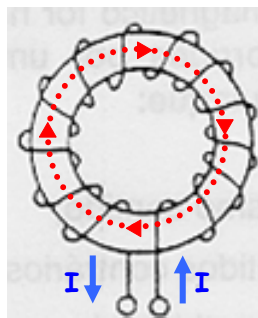
**Observação:** o raio médio do toróide é o raio da circunferência no centro do núcleo do toróide, como mostra a figura 4.12. Não confundir com o raio externo ou interno e nem com o raio das espiras.



*Figura 4.12 - Identificação do raio médio de um toróide.*

Também pode ser demonstrado matematicamente [Giancoli] que a densidade de campo magnético fora do núcleo de um toróide ideal, tanto na região externa como interna é NULO, pois como o núcleo tem forma circular ele é capaz de produzir um caminho magnético enlaçando todas as linhas de campo.

Usando a regra da mão direita aplicada à bobina toroidal podemos determinar o sentido das linhas de campo confinadas no núcleo do toróide, como mostra a figura 4.13.



*Figura 4.13 - Sentido das linhas de campo no núcleo da bobina toroidal.*

Medições de características de comportamento de materiais magnéticos são, geralmente, feitas usando-se núcleos toroidais (toróide) pois eles são capazes de concentrar praticamente todas as linhas de campo.

#### 4.5. Vetor Campo Magnético Indutor - Força Magnetizante

Se, para uma dada bobina mantivermos a corrente constante e mudarmos o material do núcleo (permeabilidade  $\mu$  do meio), a densidade de fluxo magnético no interior da bobina será alterada em função da permeabilidade magnética do meio.

Chamamos de **Vetor Campo Magnético Indutor** ou **Vetor Força Magnetizante (H)** ao campo magnético induzido (gerado) pela corrente elétrica na bobina, independentemente da permeabilidade magnética do material do núcleo (meio).

O vetor densidade de campo magnético na bobina pode ser dado por:

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{\ell}$$

onde  $\ell$  é comprimento do caminho magnético médio. Resolvendo,

$$\frac{B}{\mu} = \frac{N \cdot I}{\ell}$$

definindo:

$$H = \frac{B}{\mu}$$

O módulo do vetor campo magnético indutor ou vetor força magnetizante  $H$  numa bobina pode ser dado por:

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell}$$

O Vetor  $H$  tem as mesmas características de orientação do Vetor Densidade de Campo Magnético (Densidade de Fluxo)  $B$ , porém independe do tipo de material do núcleo da bobina. A unidade do Vetor Campo Magnético Indutor é Ampère-espira por metro, **Ae/m**.

Podemos, portanto, concluir que os vetores Densidade de Campo Magnético e Campo Magnético Indutor se relacionam pela equação:

$$B = \mu \cdot H$$

Isso significa que uma dada bobina percorrida por uma dada corrente produz uma dada Força Magnetizante ou Campo Magnético Indutor. Se variarmos o valor da permeabilidade magnética do meio (alterando o material do núcleo da bobina, por exemplo) a Densidade de Campo Magnético varia para esta mesma bobina. Quanto maior a permeabilidade magnética  $\mu$  do meio, o efeito da Força Magnetizante (Campo Magnético Indutor)  $H$  no núcleo será tanto maior, ou seja, maior a Densidade de Campo Magnético induzida no núcleo. Podemos, portanto, entender a Densidade de Campo Magnético (Densidade de Fluxo Magnético) como o efeito de uma determinada Força Magnetizante (de um Campo Magnético Indutor) num determinado meio de permeabilidade magnética  $\mu$ .

**A Densidade de Fluxo Magnético  $B$  é o efeito da Força Magnetizante  $H$  num dado meio  $\mu$ .**

Analogamente, podemos determinar a Força Magnetizante  $H$  produzida por um condutor retilíneo, para uma espira circular e para uma bobina toroidal:

- Para um condutor retilíneo:  $H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$
- Para uma espira circular:  $H = \frac{I}{2 \cdot R}$
- Para uma bobina toroidal:  $H = \frac{N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$

Devemos ter em mente que **a permeabilidade magnética de um material ferromagnético não é constante**. É uma relação entre a Força Magnetizante e a Densidade de Fluxo Magnético resultante. Essa relação é dada por

$$\mu = \frac{B}{H}$$

Esse comportamento é descrito pela **Curva de Magnetização** do material. Esse assunto será estudado em item posterior.

**Conclusão:** genericamente falando, o campo eletromagnético resultante num dado ponto depende:

- ✓ Da intensidade da corrente;
- ✓ Da forma do condutor (reto, espira ou solenóide)
- ✓ Do meio (permeabilidade magnética)
- ✓ Das dimensões
- ✓ Do número de espiras

#### 4.6. Força Magneto-Motriz

A intensidade de um Campo Magnético Indutor (Força Magnetizante)  $H$  numa bobina depende da intensidade da corrente que flui numa dada quantidade de espiras. Quanto maior a corrente, mais intenso o campo magnético. Além disso, quanto mais espiras, mais concentradas estarão as linhas de campo.

Podemos entender Força Magneto-motriz como a capacidade que uma bobina tem de estabelecer um fluxo magnético no seu núcleo. Esta Força Magneto-motriz depende da corrente que atravessa um determinado número de espiras.

A Força Magneto-motriz produzida por uma bobina é dada pelo produto:

$$FMM = N \cdot I$$

onde:

FMM - Força Magneto-Motriz, em Ampère-espira [Ae]

N - Número de espiras;

I - Intensidade da corrente elétrica, em Ampères [A].

A Força Magneto-motriz é a causa da produção do fluxo no núcleo de um circuito magnético, analogamente à força eletro-motriz que produz o fluxo de cargas elétricas (corrente) em um circuito elétrico.

Sabemos que a densidade de fluxo numa bobina é dada por

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{\ell}$$

e a força magnetizante dessa bobina é

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell}$$

como  $FMM = N \cdot I$ , então

$$H = \frac{FMM}{\ell}$$

assim, a Força Magneto-motriz pode ser dada pelo produto entre a força magnetizante  $H$  e o comprimento do caminho magnético:

$$FMM = H \cdot \ell$$

onde:

FMM - Força Magneto-Motriz, [Ae]

H - Força Magnetizante ou Campo Magnético Indutor, [Ae/m];

$\ell$  - Comprimento médio do caminho do circuito magnético, [m].

**Observação:** O comprimento médio do caminho do circuito magnético é o comprimento total de uma linha de campo posicionada no centro do núcleo, como mostra a linha de campo grifada na figura 4.14.

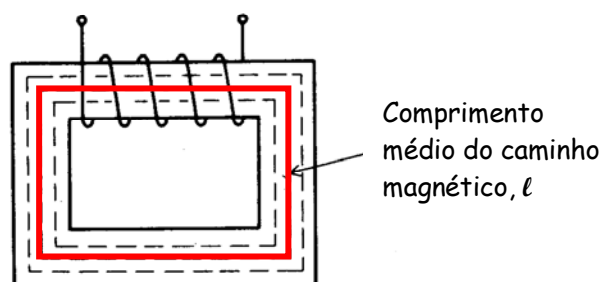


Figura 4.14 - Comprimento médio do caminho do circuito magnético.

Sabemos que a Relutância Magnética é dada por:



$$\Re = \frac{\ell}{\mu \cdot A}$$

e que

$$\mu = \frac{B}{H}$$

substituindo uma na outra, temos

$$\Re = \frac{H \cdot \ell}{B \cdot A}$$

como o Fluxo Magnético é dado por

$$\phi = B \cdot A$$

temos, portanto:

$$\Re = \frac{\text{FMM}}{\phi}$$

ou ainda,

$$\phi = \frac{\text{FMM}}{\Re}$$

Esta equação é análoga à Lei de Ohm, onde a relação entre a tensão elétrica e a resistência determina a corrente num circuito, ou seja:

$$I = \frac{V}{R}$$

esta é a relação entre causa e efeito:

$$\text{Efeito} = \frac{\text{Causa}}{\text{Oposição}}$$

A causa é a Força Magneto-Motriz (análoga à Tensão Elétrica); o efeito que ela provoca é o Fluxo Magnético (análogo ao Fluxo de Cargas, corrente elétrica) e a oposição ao efeito é a Relutância Magnética (análoga à Resistência Elétrica).

Através desse entendimento, os circuitos magnéticos (ou caminhos magnéticos) podem ser analisados como circuitos elétricos, como mostra a analogia da figura 4.15. Esse estudo será abordado posteriormente.

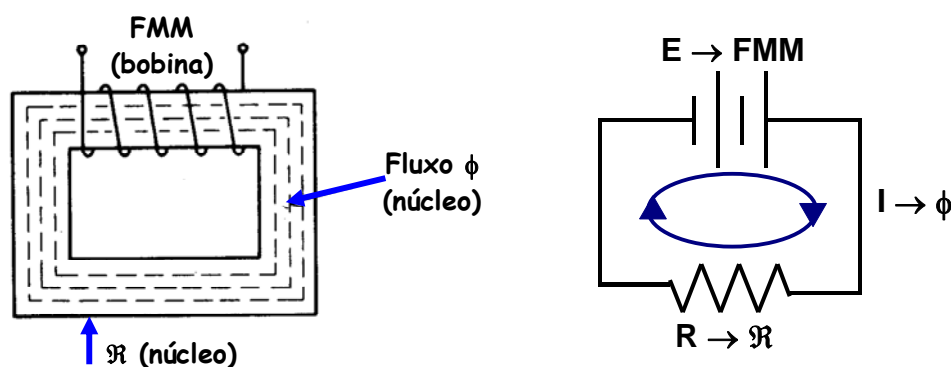


Figura 4.15 - Circuito magnético fechado com núcleo de ferromagnético e seu equivalente elétrico.

#### Observação:

Apesar da analogia entre circuitos elétricos e magnéticos, devemos ter em mente que o fluxo magnético  $\phi$  é estabelecido no núcleo através da alteração da estrutura atômica do núcleo devido à pressão externa da força magneto-motriz (FMM) e não é uma medida do fluxo de partículas carregadas, como a corrente elétrica.

#### Exemplo 4.4.1

Na figura 4.15 considere que a bobina possui 120 espiras percorridas por uma corrente de 500mA e que o comprimento médio do circuito magnético é  $\ell = 0,15\text{m}$  e cuja área da seção transversal do núcleo é  $2\text{ cm}^2$ .

- a) Determine o campo magnético indutor e a força magneto-motriz;

$$H = \frac{N \cdot I}{\ell} = \frac{120 \cdot 0,5}{0,15} = 400\text{Ae/m}$$

$$\text{FMM} = H \cdot \ell = 400 \cdot 0,15 = 60\text{Ae}$$

- b) Considerando a permeabilidade do material sendo  $\mu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ (Tm/A)}$ , determine a relutância magnética do núcleo;

$$\mathfrak{R} = \frac{\ell}{\mu \cdot A} = \frac{0,15}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = \frac{0,15}{10 \cdot 10^{-8}} = 0,15 \cdot 10^7 \text{ Ae/Wb}$$

- c) Determine a densidade de fluxo magnético no núcleo;

$$B = \mu \cdot H = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 400 = 0,2 \text{ T}$$

- d) Calcule o fluxo magnético no núcleo;

$$\phi = \frac{\text{FMM}}{\mathfrak{R}} = \frac{60}{0,15 \cdot 10^7} = 400 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$$

#### 4.7. Lei de Ampère

A Lei de Ampère<sup>8</sup> dá uma relação geral entre uma corrente elétrica em um condutor de qualquer forma e o campo magnético por ele produzido. Esta lei foi proposta logo após a descoberta de Oersted.

Seja um condutor percorrido por uma dada corrente através de uma área relativa a uma linha de campo, como mostra a figura 4.16. Se considerarmos um vetor da linha de campo de **comprimento infinitesimal**<sup>9</sup>  $d\ell$ , este será paralelo ao vetor densidade de campo magnético  $\mathbf{B}$ . A relação da Lei de Ampère é dada por:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \cdot I_{\text{env}}$$

onde:

$\mathbf{B}$  - vetor densidade de campo magnético, [T];

$d\ell$  - vetor de comprimento infinitesimal paralelo ao vetor  $\mathbf{B}$ , [m];

$I_{\text{env}}$  - corrente passando na área do condutor envolvida pela linha de campo magnético em análise, [A].

É válida para qualquer situação onde os condutores e os campos magnéticos são constantes e invariantes no tempo e sem a presença de materiais magnéticos.

Se considerarmos um condutor retilíneo, como o da figura 4.11, podemos aplicar a Lei de Ampère:

$$\mu_0 \cdot I = \oint \mathbf{B} \cdot d\ell = \mathbf{B} \cdot \oint d\ell = B \cdot (2 \cdot \pi \cdot r)$$

assim,

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

que é a mesma equação que determina a densidade de campo magnético em um dado ponto p em torno de um condutor retilíneo.

<sup>8</sup> André Marie Ampère (1775-1836), cientista francês.

<sup>9</sup> Quando o comprimento é muito pequeno e tende a zero, ou seja,  $\Delta\ell \rightarrow 0$

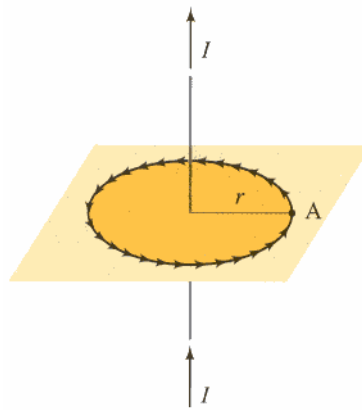


Figura 4.16 - Linha de campo em torno de um condutor percorrido por corrente.

## 5. Força Eletromagnética

Cargas elétricas em movimento (corrente elétrica) criam um campo eletromagnético. Vimos que este campo exerce uma força magnética na agulha de uma bússola, por exemplo. Pela terceira lei de Newton (ação e reação), podemos esperar que o reverso seja verdadeiro, ou seja, que um campo magnético de um ímã exerça uma força em um condutor conduzindo corrente. Isto foi confirmado por Oersted. Estando as cargas elétricas em movimento e inseridas em um campo magnético, há uma interação entre esse campo e o campo originado pelas cargas em movimento. Essa interação manifesta-se por forças que agem na carga elétrica. Estas forças são denominadas **forças eletromagnéticas**.

Desta forma:

**Um condutor percorrido por corrente elétrica, imerso em um campo magnético, sofre a ação de uma força eletromagnética.**

Este é o segundo fenômeno eletromagnético.

### 5.1. Força Eletromagnética sobre um Condutor Retilíneo

Seja, por exemplo, um condutor retilíneo colocado entre os pólos de um ímã em forma de ferradura, como mostra a figura 5.1. Quando este condutor for percorrido por corrente uma força é exercida sobre ele. Esta força não age na direção dos pólos do ímã mas na direção perpendicular às linhas do campo magnético, como mostra a figura 5.2. Se o sentido da corrente for invertido, a direção da força continua a mesma, mas há uma inversão no sentido da força exercida sobre o condutor.

**A força age na direção perpendicular às linhas de campo.**

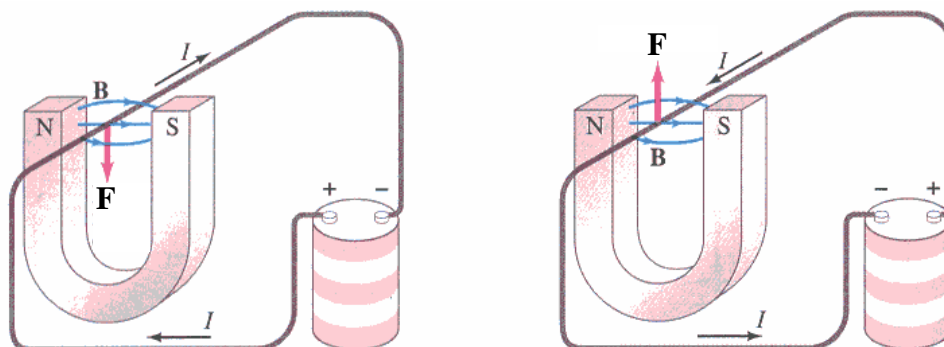


Figura 5.1 - Sentido da força sobre o condutor.

Um condutor percorrido por corrente elétrica submetido a um campo magnético sofre a ação de uma força eletromagnética. Experimentalmente podemos conferir que, se aumentarmos a intensidade da corrente  $I$ , aumentaremos a intensidade da força  $F$  exercida sobre o condutor. Da mesma forma, um campo magnético mais intenso (maior densidade  $B$ ) provoca uma intensidade de força maior devido à maior interação entre os campos magnéticos. Também pode ser comprovado que, se o comprimento  $\ell$  ativo do condutor sob a ação do campo (atingido pelas linhas de campo) for maior, a intensidade da força sobre ele será maior.

A intensidade da força eletromagnética exercida sobre o condutor também depende do ângulo entre a direção da corrente e a direção do vetor densidade de campo magnético, como mostra a figura 5.3. Quando o campo for perpendicular à direção da corrente, a força exercida sobre o condutor será máxima. Quando o campo e a corrente tiverem a mesma direção a força sobre o condutor será nula.

Isso significa que a intensidade da força eletromagnética  $F$  exercida sobre o condutor é diretamente proporcional à densidade do campo magnético  $B$  que atinge o condutor, à intensidade de corrente elétrica que percorre o condutor, ao comprimento longitudinal do condutor atingido pelas linhas do campo e ao ângulo de incidência dessas linhas na superfície longitudinal do condutor.

Portanto, na figura 5.3(c), considerando-se um condutor retilíneo de comprimento  $\ell$  sob a ação de um campo magnético uniforme  $B$ , percorrido por uma corrente elétrica de intensidade  $I$  e sendo  $\theta$  o ângulo entre  $B$  e a direção do condutor, o **módulo do vetor força magnética** que age sobre o condutor pode ser dado por:

$$F = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\theta$$

onde:

$F$  - intensidade do vetor força eletromagnética [N];

$B$  - densidade de campo magnético ou densidade de fluxo magnético [T];

$\ell$  - comprimento ativo do condutor sob efeito do campo magnético [m];

$\theta$  - ângulo entre as linhas de campo e a superfície longitudinal do condutor [ $^\circ$  ou rad]

**Observação:** devemos lembrar que o comprimento  $\ell$  não é necessariamente o comprimento total do condutor, mas apenas a parte ativa, ou seja, o comprimento que está sob a ação do campo magnético uniforme.

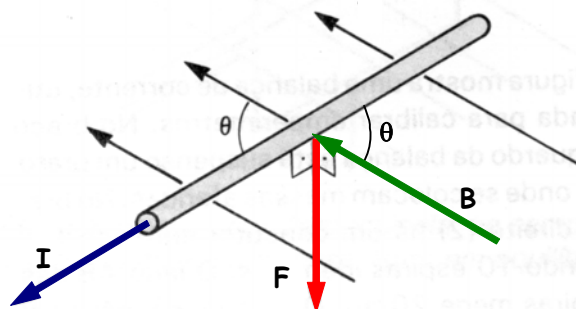
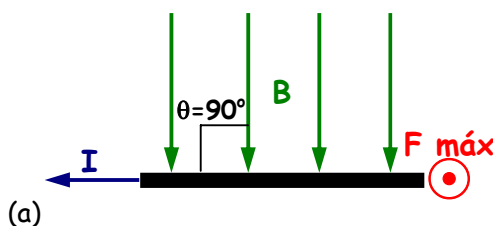


Figura 5.2 - Força magnética sobre um condutor retilíneo.



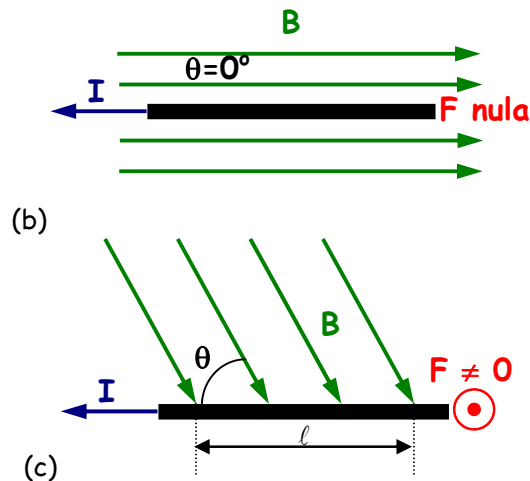


Figura 5.3 - Força magnética depende do ângulo de incidência do campo magnético.

Se a direção da corrente é perpendicular à direção das linhas do campo ( $\theta = 90^\circ$ ) a força é máxima, como mostra a figura 5.3(a). Se a direção da corrente e do campo forem paralelas ( $\theta = 0^\circ$ ) a força será nula, como mostra a figura 5.3(b).

**A direção da força é sempre perpendicular à direção da corrente e também perpendicular à direção do campo magnético.**

A direção e o sentido da força que o condutor sofre, são determinados pela **Regra de Fleming para a Mão Esquerda - Ação Motriz**, pois o resultado é uma força que tende a provocar movimento.

**Regra da Mão Esquerda - Ação Motriz:**

- o dedo polegar indica o sentido da força magnética,  $F$ .
- o dedo indicador representa o sentido do vetor campo magnético,  $B$ .
- o dedo médio indica o sentido da corrente,  $I$ .

Esta relação de sentidos está demonstrada na figura 5.5(a).

Se o campo magnético não for uniforme ou se o condutor não for retilíneo (ou seja,  $\theta$  variável), temos:

$$d\vec{F} = I \cdot d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

onde:

$dF$  - força infinitesimal atuando no comprimento diferencial  $d\ell$  do condutor, [N];

$d\ell$  - comprimento diferencial, [m];

$B$  - vetor densidade de campo magnético, [T].

A força total que age sobre o condutor deverá, neste caso, ser determinada por integração.

#### Exemplo 5.1.1.

Um condutor retilíneo é percorrido por uma corrente elétrica de 5A e está com 20cm de seu comprimento longitudinal imerso em um campo magnético uniforme de 3T que o atinge fazendo um ângulo de  $30^\circ$ , como mostra a figura 5.4. Determine o vetor força eletromagnética resultante (módulo, direção e sentido).

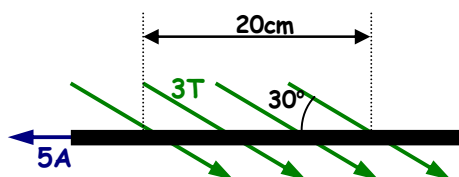


Figura 5.4 - Figura para o exemplo 5.1.1.

O módulo da força eletromagnética sobre o condutor é dado por:

$$F = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\theta = 3 \cdot 5 \cdot 0,2 \cdot \sin(30^\circ) = 1,5\text{N}$$

A direção deve ser perpendicular à corrente e ao plano do papel. O sentido é determinado pela Regra de Fleming para a mão esquerda, indicando sentido para fora do plano do papel (  $\odot$  ).

## 5.2. Regra de Fleming:

A Regra de Fleming é usada para determinar a relação entre os sentidos da Força Magnética, do Campo Magnético e da Corrente Elétrica, cujas **direções são ortogonais** (perpendiculares entre si), como mostra a figura 5.5. Para usarmos a Regra de Fleming devemos posicionar os dedos polegar, indicador e médio de tal forma que fiquem ortogonais entre si.

Quando um condutor percorrido por corrente é submetido a um campo magnético surge uma **ação motriz** devido à força magnética resultante. Por outro lado, quando um condutor em movimento é submetido a um campo magnético surge nesse condutor uma **ação geradora** devido à indução magnética (esse fenômeno será estudado posteriormente).

- **Ação Motriz – Regra da Mão Esquerda:** quando resulta uma força:
  - o dedo polegar indica o sentido da força magnética, F.
  - o dedo indicador representa o sentido do vetor campo magnético, B.
  - o dedo médio indica o sentido do corrente, I.
- **Ação Geradora – Regra da Mão Direita:** quando resulta uma corrente gerada:
  - o dedo polegar indica o sentido da força magnética, F.
  - o dedo indicador representa o sentido do vetor campo magnético, B.
  - o dedo médio indica o sentido do corrente, I.

As figuras 5.1, 5.2 e 5.3 mostram a aplicação da regra de Fleming para ação motriz.

**Observação:** se quisermos analisar o comportamento de cargas elétricas em particular (e não a corrente) devemos lembrar que as cargas elétricas negativas têm movimento real contrário ao sentido convencional para a corrente elétrica.

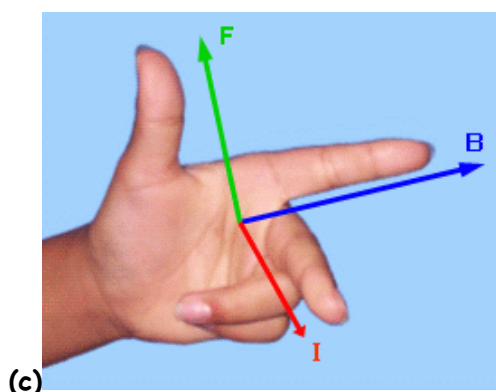
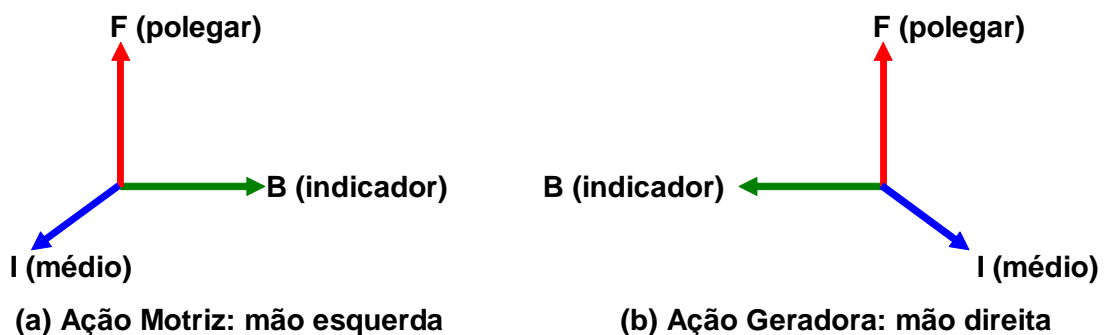


Figura 5.5 – Regra de Fleming.



### 5.3. Força Eletromagnética sobre uma partícula carregada:

No estudo anterior vimos que um condutor percorrido por corrente elétrica e inserido num campo magnético sofre a ação de uma força eletromagnética. Como a corrente é provocada pelo movimento de cargas elétricas, podemos verificar que um movimento livre de partículas carregadas eletrostaticamente também sofrem a ação de forças eletromagnéticas quando atravessam um campo magnético.

**Uma partícula carregada eletrostaticamente e em movimento dentro de um campo magnético sofre a ação de uma força eletromagnética.**

Dependendo da situação, essa força pode desviar a trajetória da partícula carregada, como mostra a figura 5.6.

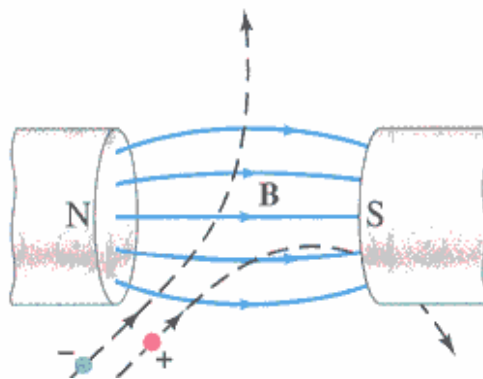


Figura 5.6 - Desvio de trajetória de partículas em movimento na direção transversal à do campo (fonte: Giancoli)

Sabemos que a corrente elétrica pode ser dada pela relação entre quantidade de carga e tempo:

$$I = \frac{q}{t}$$

e que a distância percorrida é dada pela relação  $\ell = v \cdot t$ . Como:

$$F = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\theta$$

substituindo:

$$F = B \cdot \frac{q}{t} \cdot v \cdot t \cdot \sin\theta$$

Assim, a intensidade da força magnética sobre uma partícula carregada em movimento dentro de um campo magnético pode ser dada pela expressão:

$F = B \cdot q \cdot v \cdot \sin\theta$
--

onde:

F - módulo do vetor força magnética resultante sobre a partícula carregada [N];

B - módulo da densidade de campo magnético ou densidade de fluxo [T];

q - quantidade de carga elétrica da partícula [C];

v - velocidade de deslocamento [m/s]

$\theta$  - ângulo entre a direção de deslocamento e as linhas de campo [° ou rad]

Desta equação podemos depreender que a força eletromagnética será máxima quando as partículas incidirem perpendicularmente às linhas de campo (deslocamento perpendicular às linhas de campo). Quando as partículas se deslocam na mesma direção das linhas de campo a força eletromagnética será nula ( $\theta=0^\circ$  ou  $\theta=180^\circ$ ).

Considerando-se uma partícula carregada **positivamente**, são três as possíveis situações:

- a) **Partícula com carga positiva em deslocamento constante na direção do campo:** nesse caso, como a partícula se desloca na mesma direção do campo magnético, não há interação entre os campos e conseqüentemente a trajetória da partícula não sofre alterações, mesmo que a partícula

esteja se deslocando em sentido contrário ao do campo. O movimento será **retilíneo uniforme (MRU)**. A figura 5.7 mostra essa situação.

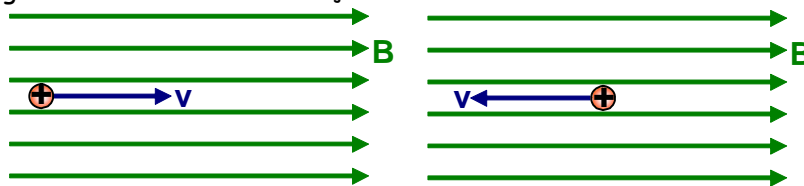


Figura 5.7 - partícula positiva em movimento retilíneo uniforme na mesma direção do campo.

- b) **Partícula com carga positiva em deslocamento constante e perpendicular à direção do campo:** ao entrar perpendicularmente à direção do campo B, o campo criado pela própria partícula em movimento faz com que do lado de cima da mesma o campo resultante fique enfraquecido; ao mesmo tempo no lado de baixo o campo é reforçado devido à coincidência do sentido das linhas de força. Isso resulta em uma força magnética no sentido do campo mais fraco (um empuxo para cima, no caso). Como a partícula continua se deslocando, o fenômeno continua ocorrendo e a força atuante sobre ele provoca uma alteração constante de trajetória, caracterizando um movimento circular uniforme (MCU). Como a força é sempre perpendicular ao deslocamento e a velocidade não varia, a partícula muda a direção do deslocamento caracterizando um movimento circular com aceleração centrípeta constante pois a força aponta sempre para o centro do movimento. As figuras 5.8 e 5.9 ilustram essa situação.

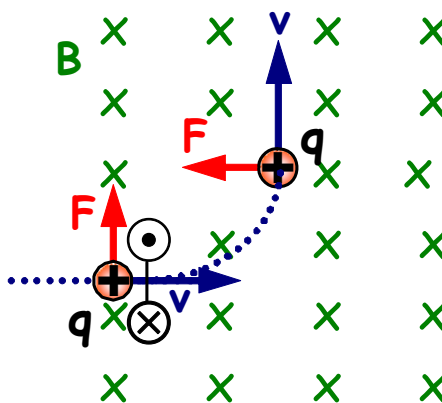


Figura 5.8 - Força exercida sobre uma partícula em deslocamento transversal à direção do campo.

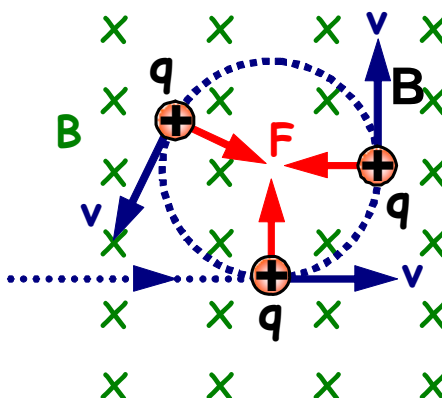
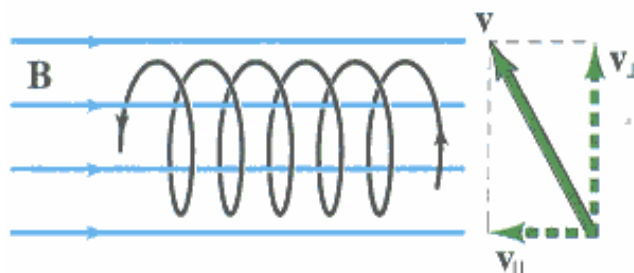


Figura 5.9 - Partícula em Movimento Circular Uniforme (MCU)

- c) **Partícula com carga positiva em deslocamento constante e oblíquo à direção do campo:** nesse caso a partícula executará um MRU devido à componente da velocidade na mesma direção do campo

e um MCU devido à componente da velocidade transversal ao campo. O resultado será um movimento **helicoidal**<sup>10</sup>. A figura 5.10 ilustra essa situação.



**Figura 5.10 - Partícula em movimento helicoidal** (fonte: Giancoli)

**Importante:** Se a partícula for carregada **negativamente**, as forças serão de sentidos opostos e a trajetória será oposta nos casos analisados para uma carga positiva. A Regra de Fleming para a mão esquerda (efeito motriz) auxilia na determinação do sentido da força e da trajetória das partículas.

#### 5.4. Força Magnética entre Condutores Paralelos

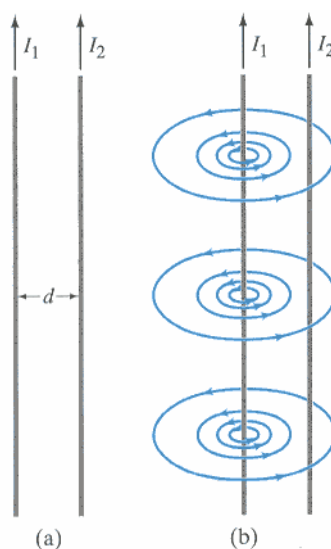
Quando dois condutores próximos e paralelos são percorridos por corrente elétrica, há interação entre os campos eletromagnéticos por eles gerados, como mostra a figura 5.11.

Sabemos que um condutor percorrido por corrente elétrica cria um campo magnético de intensidade dada por:

$$B = \frac{\mu \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Observando a figura 5.12, no condutor 1 a corrente  $I_1$  cria um campo magnético  $B_1$  que atua no condutor 2 que está a uma distância  $d_{12}$  do primeiro e pode dado por

$$B_1 = \frac{\mu \cdot I_1}{2 \cdot \pi \cdot d_{12}}$$



**Figura 5.11 - Dois condutores paralelos percorridos por corrente sofrem interação entre seus campos magnéticos.**

<sup>10</sup> Helicoidal: em forma de hélice, espiral.

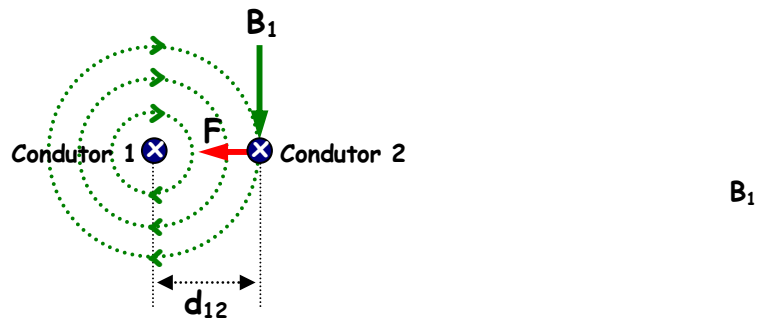


Figura 5.12 - O vetor densidade de campo é perpendicular à superfície do condutor.

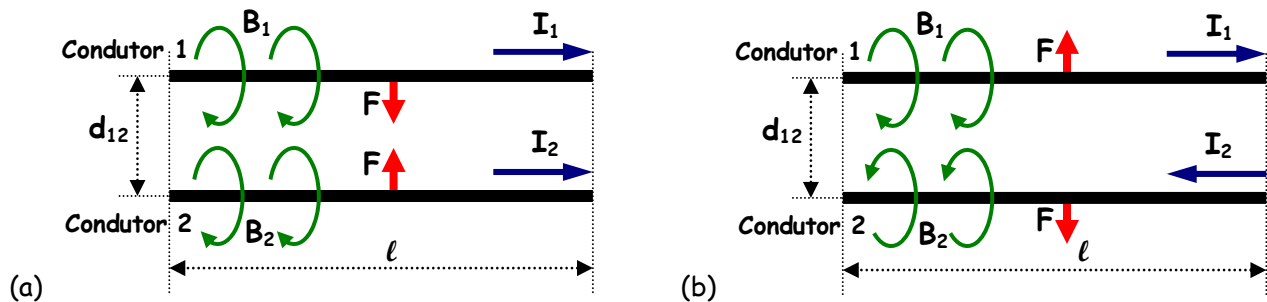


Figura 5.13 - Força eletromagnética entre condutores paralelos: (a) atração; (b) repulsão.

Na figura 5.12 podemos verificar que as linhas de campo geradas por um condutor atingem o outro condutor. Como o vetor densidade de campo é sempre tangente às linhas de campo, este vetor é perpendicular à superfície longitudinal do condutor. Desta forma, a força elétrica que atua no condutor 2 devido ao campo gerado pelo condutor 1, é dada por

$$F_{12} = B_1 \cdot I_2 \cdot \ell_2 \cdot \sin 90^\circ$$

Substituindo o valor de  $B_1$  na equação da força temos

$$F_{12} = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \ell_2}{2 \cdot \pi \cdot d_{12}}$$

A força que age no condutor 1 devido ao campo gerado pelo condutor 2 é análoga, devido à lei da ação e da reação de Newton. Assim:

$$F_{12} = F_{21} = F$$

Genericamente:

$$F = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \ell_2}{2 \cdot \pi \cdot d_{12}}$$

onde:

$F$  - Força elétrica mútua de interação entre condutores paralelos [N];

$\mu$  - Permeabilidade magnética do meio;

$I_1, I_2$  - corrente elétrica nos condutores [A];

$\ell$  - comprimento dos condutores [m];

$d_{12}$  - distância entre os centros dos condutores [m]

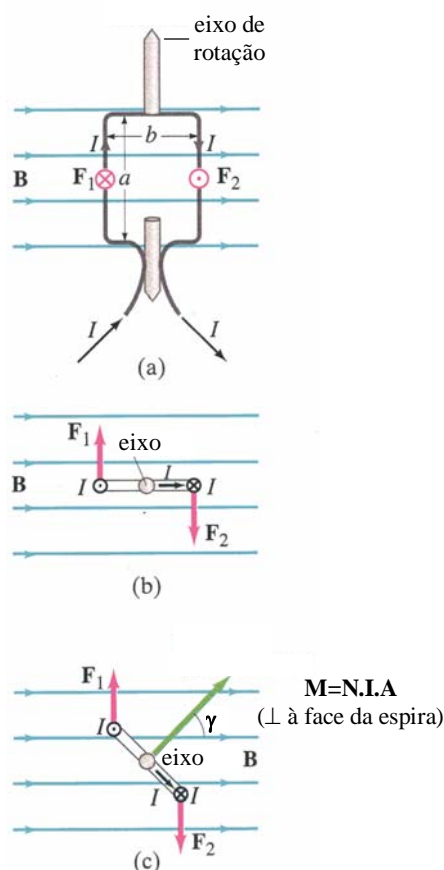
Essa força poderá ser de atração ou de repulsão conforme os sentidos das correntes nos condutores. Aplicando a Regra de Fleming para ação motriz (Regra da Mão Esquerda) podemos verificar que a força é de atração quando os condutores são percorridos por correntes de mesmo sentido e de repulsão quando percorridos por correntes de sentidos contrários. A figura 5.13 ilustra essas situações.

Da equação acima também podemos expressar a intensidade da **força por unidade de comprimento** em newton por metro (N/m):

$$\frac{F}{\ell} = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2 \cdot \pi \cdot d_{12}}$$

## 5.5. Torque de Giro numa Espira

Uma espira condutora fixada por um eixo que a permita girar (pivot), quando submetida a um campo magnético e percorrida por corrente elétrica sofre um torque de giro.



**Figura 5.14 - Torque de giro numa espira percorrida por corrente e dentro de um campo magnético: (a) vista lateral; (b) vista superior; (c) composição vetorial (Fonte: Giancoli, 2000)**

Na figura 5.14(a) e 5.14(b) podemos observar que os condutores da espira percorridos por corrente  $I$  (no sentido horário na espira) e submetidos a uma densidade de campo magnético  $B$  (no sentido indicado, para a direita) sofrem a ação de forças magnéticas cujos sentidos são dados pela regra de Fleming (mão esquerda - ação motriz). A composição dos vetores produz um torque girante. Na figura 5.14(c) verificamos a composição vetorial em função do ângulo  $\gamma$  da posição normal (perpendicular) à face da espira com relação à direção do campo magnético.

Do estudo da mecânica, sabemos que torque é dado pela equação:

$$\tau = F \cdot d$$

onde  $d$  é o chamado "braço de torque", distância do eixo (pivot) até a borda da espira.

A força eletromagnética sobre um condutor pode ser calculada por:

$$F = B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\theta$$

No caso da bobina da figura 5.14,  $\ell = a$  e  $\sin\theta = \sin 90^\circ = 1$

Como a força eletromagnética sobre o segmento 1 da espira é a mesma sobre o segmento 2. Assim:

$$F_1 = F_2 = B \cdot I \cdot a$$

O torque total é a soma dos torques nos dois segmentos:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 \cdot d_1 + F_2 \cdot d_2 = F_1 \cdot \frac{b}{2} + F_2 \cdot \frac{b}{2}$$

pois  $d_1=d_2=b/2$ .

Substituindo a equação da força:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = (B \cdot I \cdot a) \cdot \frac{b}{2} + (B \cdot I \cdot a) \cdot \frac{b}{2}$$

Assim:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = B \cdot I \cdot a \cdot b$$

A área da espira pode ser dada pelo produto  $A = a \cdot b$ , assim o torque em uma espira fica sendo:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = B \cdot I \cdot A$$

O torque total em N espiras pode ser dado pela equação:

$$\tau = N \cdot B \cdot I \cdot A$$

Se a normal (perpendicular) à superfície da espira faz um ângulo  $\gamma$  com o campo magnético, a força não varia, mas o braço do torque varia para:

$$d = \frac{b}{2} \cdot \text{sen}\gamma$$

Então, o torque total para uma bobina de N espiras percorrida por corrente e girando em um campo magnético é dado por:

$\tau = N \cdot B \cdot I \cdot A \cdot \text{sen}\gamma$
---

onde:

$\tau$  - torque de giro [N.m];

N - número de espiras;

B - densidade de campo magnético [T];

I - corrente elétrica na(s) espira(s) [A];

A - área das espiras ( $a \times b$ ) [m<sup>2</sup>];

$\gamma$  - ângulo da normal (perpendicular) à face da espira com a direção das linhas de campo [° ou rad].

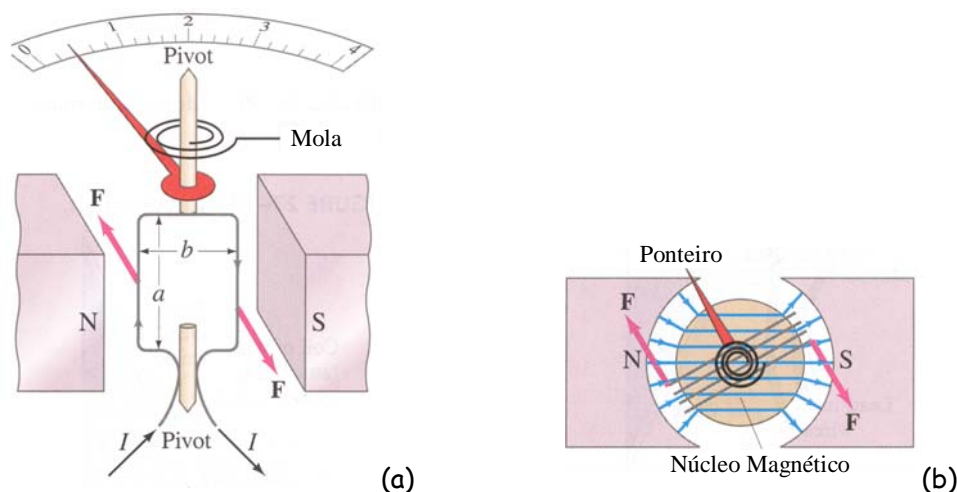
**Observação:** esta equação obtida de uma espira retangular serve para qualquer forma de espira plana, como pode ser comprovado matematicamente [Giancoli].

Fazendo  $M = N \cdot I \cdot A$ , determinamos o *Momento do Dipolo Magnético* da espira, que é considerado um vetor com direção perpendicular à área A, como mostra a figura 5.14(c). Assim, temos o produto vetorial:

$$\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$$

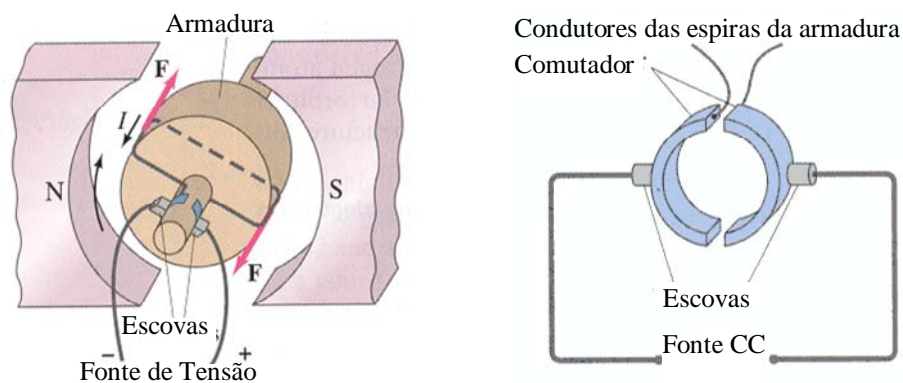
O princípio do torque de giro em uma espira tem várias aplicações práticas como: motores elétricos, instrumentos de medição analógicos (voltímetros, amperímetros, ohmímetros, etc.) entre outros dispositivos. A figura 5.15 mostra o princípio de funcionamento de um amperímetro (medidor de corrente elétrica) baseado no torque girante sobre uma bobina. Quanto maior a corrente, maior o torque girante capaz de vencer o contra-torque da mola, indicando assim uma dada escala pré-calibrada para a intensidade da corrente.





**Figura 5.15 - Amperímetro básico: (a) vista lateral; (b) vista superior.** (Fonte: Giancoli, 2000)

**Pesquisa:** para desenvolver o aprendizado, a figura 5.16(a) apresenta o esquema básico de todo motor de corrente contínua. Na figura 5.16(b) há um detalhamento do chamado comutador. Pesquise e utilize seus conhecimentos para explicar o funcionamento de um motor de corrente contínua básico.



**Figura 5.16 - Motor de Corrente Contínua: (a) estrutura básica; (b) detalhe do comutador** (Fonte: Giancoli)

## 6. Variação do Fluxo Magnético

De maneira simples, podemos dizer que o Fluxo Magnético é quantificado pelo número de linhas de campo que atravessam a área de uma superfície. Quanto mais linhas, maior o Fluxo Magnético, como mostra a figura 6.1. O fluxo magnético é, genericamente, dado pela equação:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Consideremos uma superfície plana de área  $A$ , num local onde há um campo magnético uniforme (linhas de campo paralelas), como indica a figura 6.2. As linhas de campo incidem nesta área fazendo um ângulo  $\theta$  com o plano. A componente vertical do campo magnético  $B_{\perp}$  é o cateto oposto ao ângulo de incidência  $\theta$ , ou seja,

$$B_{\perp} = B \cdot \sin\theta$$

O Fluxo Magnético  $\phi$ , como sabemos, é dado pelo produto da componente vertical do campo magnético  $B_{\perp}$  pela área de incidência das linhas de campo. Matematicamente,

$$\phi = B \cdot A \cdot \sin\theta$$

Onde:

$B$  - vetor densidade de campo magnético [T]

A - área de incidência das linhas [ $m^2$ ]

$\theta$  - ângulo de incidência das linhas de campo com a superfície [ $^\circ$  ou rad]

$\phi$  - Fluxo Magnético [Wb]

A unidade do Fluxo Magnético é o **Weber (Wb)**. Um Weber é equivalente a um campo magnético de intensidade de um Tesla (T) incidindo em uma área de um metro quadrado ( $m^2$ ). Assim:

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot m^2$$

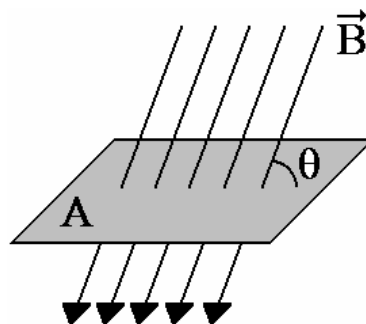


Figura 6.1 - Linhas de Campo Magnético atingindo uma superfície produzem fluxo magnético

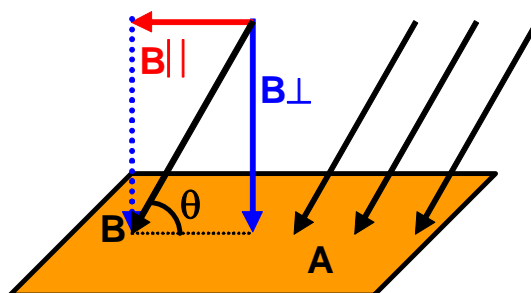


Figura 6.2 - Componentes vertical e paralela das linhas de campo atingindo uma superfície.

#### Casos Limites:

- ✓ Se as linhas de campo incidirem **perpendicularmente** à superfície, o ângulo de incidência será de  $90^\circ$  ( $\sin 90^\circ = 1$ ) e o **Fluxo Magnético será máximo**; A figura 6.3 mostra essa situação.

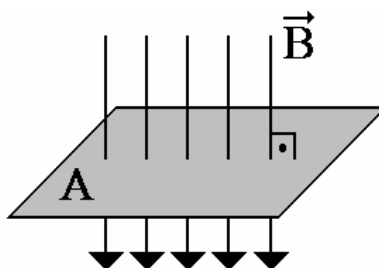
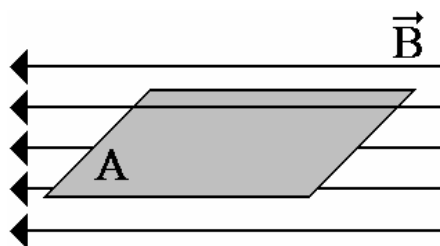


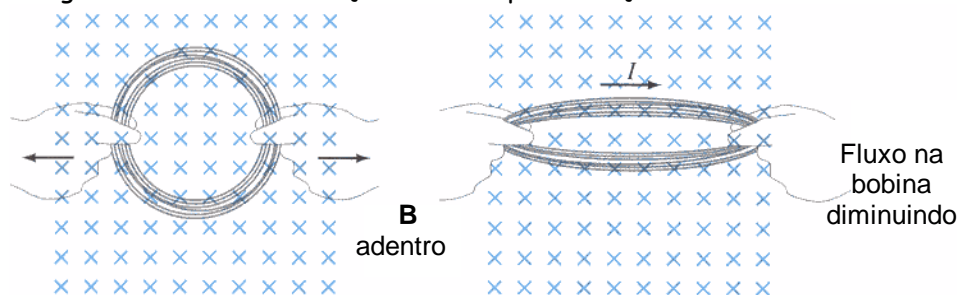
Figura 6.3 - Fluxo Máximo: Linhas de Campo Magnético incidindo perpendicularmente à superfície.

- ✓ Se as linhas de campo incidirem **paralelamente** à superfície, o ângulo de incidência será  $0^\circ$  ( $\sin 0^\circ = 0$ ) e o **Fluxo Magnético será nulo**. A figura 6.4 mostra essa situação.



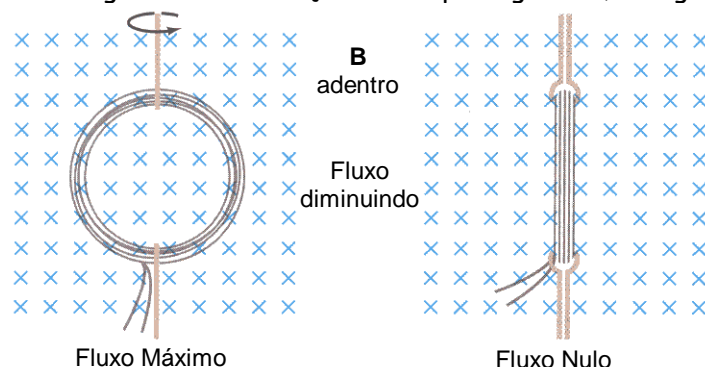
**Figura 6.4 - Fluxo Nulo:** Linhas de Campo Magnético incidindo paralelamente à superfície.

Como o Fluxo Magnético é diretamente proporcional ao campo magnético  $B$ , à área da superfície  $A$ , e ao ângulo de incidência das linhas de campo  $\theta$ , se um ou mais destes valores variar, o Fluxo Magnético também varia. A figura 6.5 mostra a variação do fluxo pela redução da área da bobina.



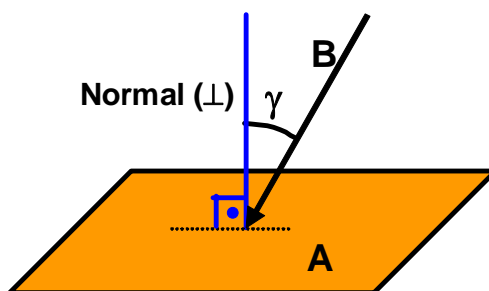
**Figura 6.5 - variação de fluxo magnético pela redução da área** (Fonte: Giancoli, 3ed.)

O fluxo magnético também pode variar devido a um movimento relativo entre a superfície e as linhas de campo, como na bobina girando com relação ao campo magnético, na figura 6.6.



**Figura 6.6 - variação do fluxo magnético numa bobina girando** (Fonte: Giancoli, 3ed.)

A variação do Fluxo Magnético na área de uma bobina é importante para o estudo da Indução Magnética. A experiência mostra que, variando-se o fluxo magnético  $\phi$  próximo a uma bobina surge corrente elétrica induzida devido a uma tensão elétrica induzida. A esse fenômeno chamamos de indução eletromagnética. Este fenômeno será estudado em detalhes no item a seguir.



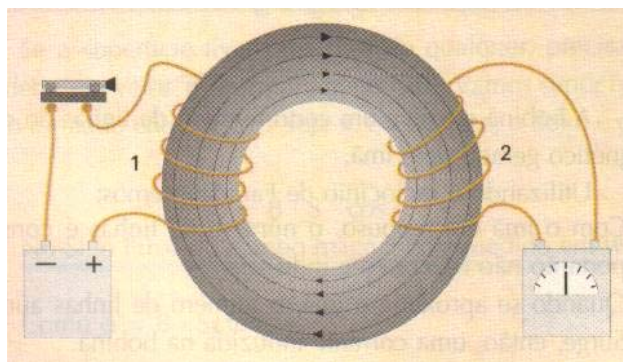
**Figura 6.7 - Ângulo  $\gamma$  entre a normal ao plano e as linhas de campo.**

**Observação:** Muitas bibliografias assumem o ângulo  $\gamma$  da normal ao plano (linha perpendicular) com as linhas de campo magnético, como mostra a figura 6.7. Com essa consideração, o fluxo magnético é dado por:

$$\phi = B \cdot A \cdot \cos \gamma$$

## 7. Indução Eletromagnética

Em 1819 Oersted descobriu que uma corrente elétrica produz campo magnético. A partir dessa descoberta, o inglês Michael Faraday e o americano Joseph Henry dedicaram-se a obter o efeito inverso, ou seja, obter corrente elétrica a partir do campo magnético.



*Figura 7.1 – Circuito para o Experimento de Faraday (Fonte: Chiquetto, 1996).*

A figura 7.1 mostra um dos dispositivos usados por Faraday. O enrolamento 1, chamado de primário, é uma bobina com  $N_1$  espiras de condutor isolado e está conectada, através de uma chave interruptora, à bateria (fonte de tensão contínua). Esta bateria faz circular uma corrente contínua na bobina gerando um campo magnético. Este campo magnético é intensificado pois as linhas de campo são concentradas pelo efeito do caminho magnético do núcleo de material ferromagnético de alta permeabilidade. As linhas de campo geradas pelo enrolamento 1 passam por dentro do enrolamento 2, chamado de secundário, que é uma bobina com  $N_2$  espiras de condutor isolado. O secundário está monitorado por um galvanômetro<sup>11</sup> que detectará qualquer corrente que circular no enrolamento. É importante salientar que não há contato elétrico entre os enrolamentos primário e secundário e nem destes com o material do núcleo, pois são bobinas feitas com condutores isolados.

Durante 10 anos, Faraday tentou detectar corrente desta forma utilizando campos cada vez mais intensos e galvanômetros mais sensíveis, porém, não obteve sucesso. Em 1831, ao acionar sucessivas vezes a chave interruptora no circuito do enrolamento primário, Faraday resolveu o problema e fez as seguintes observações:

- No momento em que a chave é fechada, o galvanômetro acusa uma pequena corrente de curta duração, como indica a figura 7.2(a);
- Após a corrente cessar e durante o tempo em que a chave ainda permanecer fechada, o galvanômetro não mais acusa corrente;
- Ao abrir-se a chave, o galvanômetro volta a indicar uma corrente de curta duração, em sentido oposto, como indica a figura 7.2(b).

<sup>11</sup> Galvanômetro é um instrumento capaz de detectar e medir pequenas correntes e apresenta ponteiro centralizado para indicar o sentido da corrente.

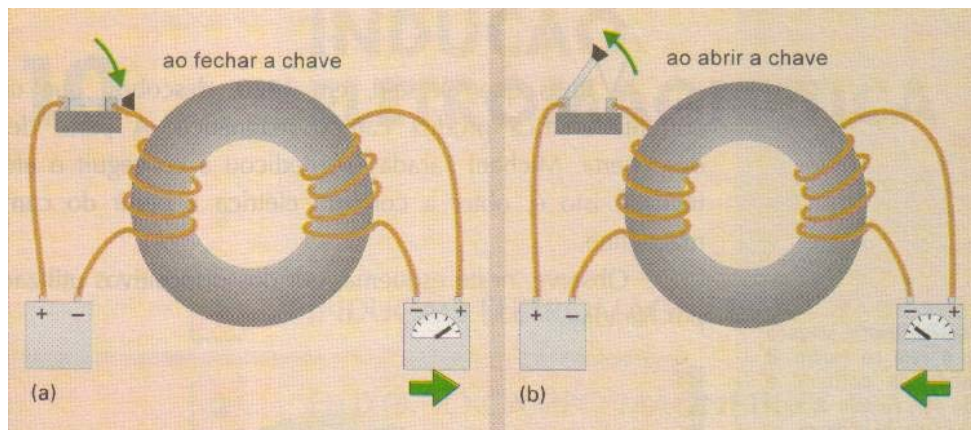


Figura 7.2 - Experimento de Faraday; a) ao fechar a chave; b) ao abrir a chave (Fonte: Chiquetto, 1996).

Esses três momentos podem ser explicados da seguinte maneira:

- Enquanto o campo magnético criado pela corrente no enrolamento primário cresce é gerada uma corrente no enrolamento secundário. Isso ocorre logo após a chave ser fechada pois a corrente é crescente. Quando o campo no enrolamento primário se estabiliza (se torna constante) a corrente cessa no enrolamento secundário.
- Enquanto o campo magnético permanece constante no enrolamento primário, não há corrente no enrolamento secundário.
- Enquanto o campo magnético diminui no enrolamento primário, é gerada uma corrente no enrolamento secundário, com sentido oposto à anterior. Isso ocorre logo após a chave ser aberta e cessa logo após o campo magnético se anular no enrolamento primário.

Disso, Faraday concluiu:

**A simples presença do campo magnético não gera corrente elétrica.  
Para gerar corrente é necessário variar fluxo magnético.**

A este fenômeno chamamos de **Indução Eletromagnética**. A indução eletromagnética é o **terceiro fenômeno eletromagnético**.

O experimento de Faraday mostra que se numa região próxima a um condutor, bobina ou circuito elétrico houver uma variação de fluxo magnético, aparecerá nos seus terminais uma diferença de potencial (ddp), chamada de **força eletromotriz induzida (fem)**, ou simplesmente, **tensão induzida**. Caso o circuito elétrico esteja fechado, esta força eletromotriz induzida fará circular uma **corrente elétrica induzida**. Michael Faraday enunciou a lei que rege este fenômeno, chamado de **Indução Eletromagnética** e que relaciona a tensão elétrica induzida (fem) devida à variação do fluxo magnético num circuito elétrico. A **Lei de Faraday** diz o seguinte:

**Em todo condutor enquanto sujeito a uma variação de fluxo magnético é estabelecida uma força eletromotriz (tensão) induzida.**

A **Lei de Faraday** diz que a tensão induzida em um circuito é resultante da taxa de variação do fluxo magnético no tempo e é dada pela divisão da variação do fluxo magnético pelo intervalo de tempo em que ocorre, **com sinal trocado**. Ou seja, quanto mais o fluxo variar num intervalo de tempo, tanto maior será a tensão induzida:

$$e = - \frac{d\phi}{dt}$$

Numa bobina, a tensão induzida é diretamente proporcional ao número de espiras.

$$e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

onde:

$e$  - força eletromotriz induzida (tensão induzida) [V]

$d\phi/dt$  - taxa de variação do fluxo magnético no tempo [Wb/s]

$N$  - número de espiras.

**Observação:** Para os pequenos intervalos de variações lineares do fluxo magnético, teremos uma **força eletromotriz induzida média**  $\bar{e}$ , dada por:

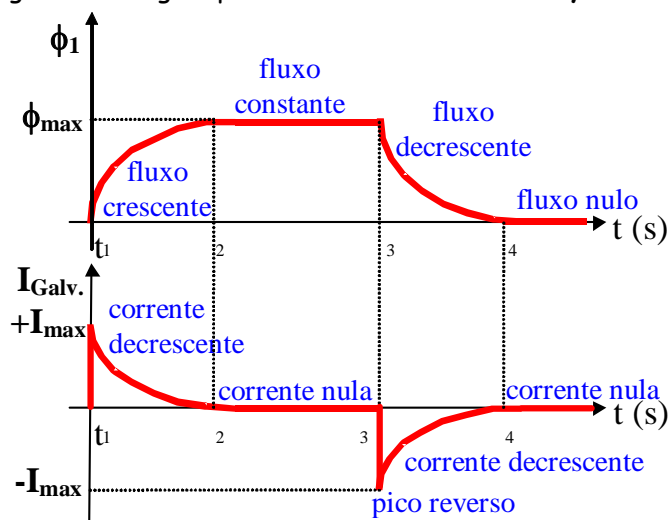
$$\bar{e} = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Com essa conclusão, podemos entender o que ocorre no circuito do experimento de Faraday, apresentado nas figuras 7.1 e 7.2, e transpor o comportamento para os gráficos da figura 7.3. O enrolamento secundário envolve linhas do campo magnético produzido pela corrente no enrolamento primário. Assim:

- Mantendo a chave interruptora aberta, não há corrente nem campo magnético e, portanto, não existem linhas de campo. O fluxo magnético no núcleo é nulo. Sem variação de fluxo no enrolamento secundário não há força eletromotriz induzida  $e$ , portanto, o galvanômetro não indica corrente.
- Quando a chave interruptora é fechada (no instante  $t_1$  do gráfico da figura 7.3), a fonte de tensão (bateria) faz circular corrente no enrolamento primário. O número de linhas de campo magnético no núcleo passa a crescer exponencialmente num curto intervalo de tempo, pois a intensidade do campo vai aumentando, em função da corrente imposta ao enrolamento primário. Nesse intervalo de tempo há, portanto, variação do fluxo magnético no núcleo. Essa variação de fluxo magnético atinge o enrolamento secundário produzindo uma força eletromotriz induzida no enrolamento secundário. Há, portanto, corrente induzida no enrolamento secundário e o galvanômetro indica corrente, como mostra a figura 7.2(a). Como a taxa de variação do fluxo é máxima nos instantes iniciais, a corrente induzida no enrolamento secundário é máxima nesses instantes, como mostra o gráfico da figura 7.3. A corrente induzida observada no galvanômetro tem um pico inicial. À medida que a variação do fluxo diminui, com a estabilização da corrente no enrolamento primário, a corrente induzida no secundário diminui.
- Após o instante  $t_2$  (figura 7.3), a corrente imposta pela fonte de tensão contínua (bateria) está estabilizada. O campo magnético produzido pelo enrolamento primário torna-se constante e não há variação de fluxo magnético no núcleo. Como não há variação de fluxo magnético no núcleo e no enrolamento secundário, não há força eletromotriz induzida. O galvanômetro não indica corrente induzida no enrolamento secundário. No gráfico da figura 7.3 observamos que, a partir do instante  $t_2$ , há fluxo magnético constante no núcleo e a corrente indicada no galvanômetro é nula.
- No instante  $t_3$  (figura 7.3), quando a chave interruptora é novamente aberta, a corrente no enrolamento primário, que estava estabilizada, começa a diminuir exponencialmente provocando a diminuição do campo e do fluxo magnético no núcleo. O fluxo magnético varia no enrolamento secundário. Esta variação produz uma força eletromotriz induzida no enrolamento secundário e, portanto, o galvanômetro indica corrente induzida. Uma observação importante é que o galvanômetro indica uma corrente com sentido contrário ao anterior, como mostra a figura 7.2(b). Este fenômeno é conhecido como Lei de Lenz e será explicado a seguir. Logo após o instante  $t_3$  a variação do fluxo magnético no enrolamento secundário é máxima e a corrente induzida tem um pico. No gráfico da figura 7.3 este pico é negativo pois o sentido da corrente é contrário ao anterior. À medida que o fluxo magnético vai-se anulando, a corrente induzida no enrolamento secundário vai diminuindo.
- Após o instante  $t_4$ , o fluxo magnético anulou-se e não há mais corrente induzida no enrolamento secundário, como pode ser observado no gráfico da figura 7.3.



A indução eletromagnética é regida por duas leis: **Lei de Faraday** e **Lei de Lenz**.



**Figura 7.3 - Comportamento do Fluxo Magnético e da Corrente no Galvanômetro para o Experimento de Faraday.**

Pela análise do experimento de Faraday observamos que quando o fluxo magnético variante era crescente, a corrente induzida tinha um dado sentido. Quando o fluxo magnético variante era decrescente a corrente induzida assumiu um sentido contrário, como indicado na figura 7.2 e no gráfico da figura 7.3. Esse fenômeno observado é explicado pela Lei de Lenz.

Devemos lembrar que a corrente induzida circula num determinado sentido devido à polaridade da força eletromotriz induzida (tensão induzida).

Em um condutor imerso em um fluxo magnético variável, chamado de fluxo magnético indutor, é induzida uma força eletromotriz. A polaridade da força eletromotriz induzida será tal que, se o circuito elétrico for fechado, circulará uma corrente que, ela própria criará um fluxo magnético, chamado de fluxo magnético induzido, que se oporá à variação do fluxo magnético indutor causador da tensão (fem) induzida.

#### Lei de Lenz:

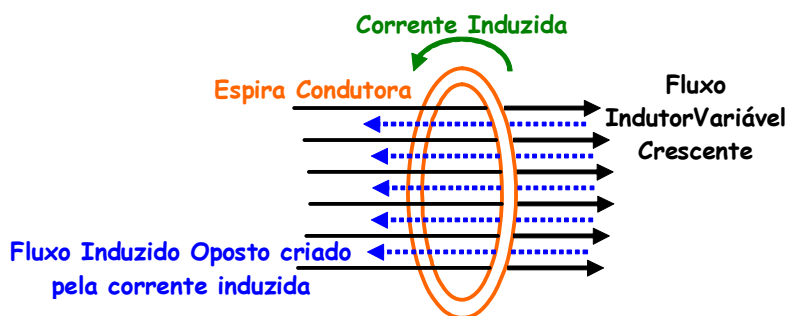
**O sentido da corrente induzida é tal que origina um fluxo magnético induzido, que se opõe à variação do fluxo magnético indutor.**

**A Lei de Lenz é expressa pelo sinal negativo na equação da Lei de Faraday.**

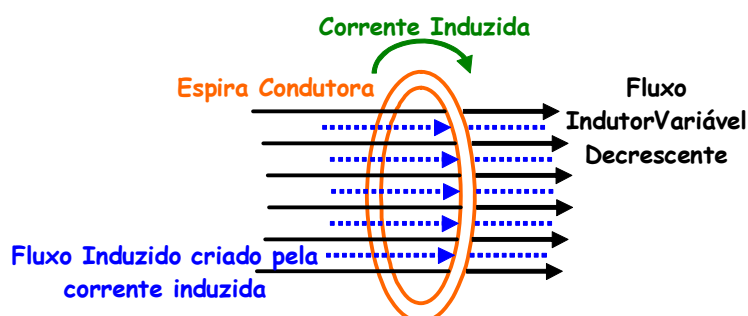
Na figura 7.4, um campo magnético de intensidade **crescente** atinge uma espira circular condutora. O fluxo magnético que a atinge é, portanto, variável e crescente. Como esse fluxo magnético é variável ocorre uma indução de força eletromotriz que proporciona a circulação de uma corrente elétrica na espira. Essa corrente induzida que circula na espira cria, por sua vez, um fluxo magnético induzido que deve **opor-se à variação** do fluxo magnético indutor. Como o fluxo magnético indutor está crescendo, a oposição dar-se-á através de um fluxo magnético induzido de **sentido contrário**, de tal forma que **enfraqueça** o fluxo magnético indutor, tentando impedir o seu crescimento (variação positiva). Para que haja este fluxo magnético induzido contrário, a corrente induzida deve ter, segundo a Regra da Mão Direita, o **sentido anti-horário**, como indicado na figura 7.4.

Na figura 7.5, o campo magnético que atinge a espira circular condutora é **decrescente**. O fluxo magnético que a atinge é, portanto, variável e decrescente e induz na espira uma força eletromotriz que proporciona a circulação de uma corrente elétrica induzida. Essa corrente induzida que circula na espira cria, por sua vez, um fluxo magnético induzido que deve **opor-se à variação** do fluxo magnético indutor. Como o fluxo magnético indutor está agora decrescendo, a oposição dar-se-á através de um fluxo magnético induzido de **mesmo sentido**, de tal forma que **reforce** o fluxo magnético indutor, tentando

impedir sua redução (variação negativa). Para que haja este fluxo magnético induzido de mesmo sentido, a corrente induzida deve ter, segundo a Regra da Mão Direita, o **sentido horário**, como indicado na figura 7.5.



*Figura 7.4 - Fluxo indutor variável crescente induz uma corrente que produz um fluxo induzido oposto.*

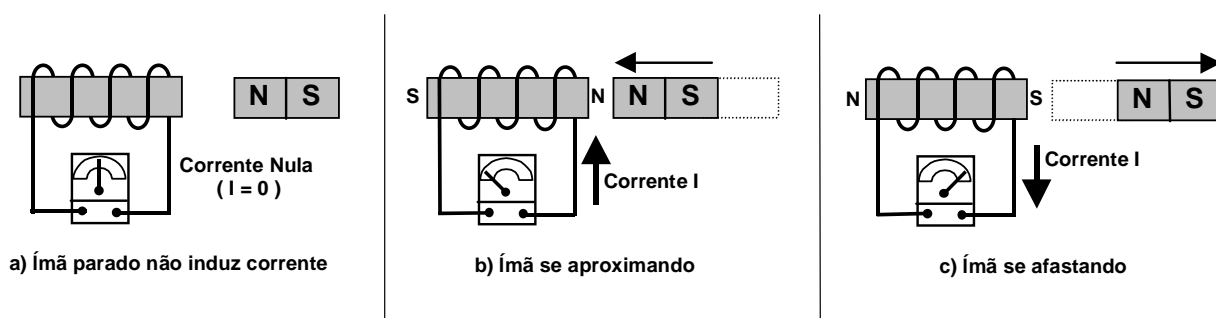


*Figura 7.5 - Fluxo indutor variável decrescente induz uma corrente que produz um fluxo induzido de mesmo sentido.*

O fenômeno da indução eletromagnética também pode ser verificado no experimento apresentado na figura 7.6.

Na figura 7.6 a aproximação do ímã provoca um aumento do fluxo magnético perto da bobina. Conseqüentemente começa a circular, na bobina, uma corrente que cria um campo magnético com polaridade inversa ao do ímã. O campo criado tenta impedir a aproximação do ímã, tenta parar o ímã, para manter o fluxo magnético constante (variação de fluxo nula). Quando o ímã se afasta, o efeito é contrário.

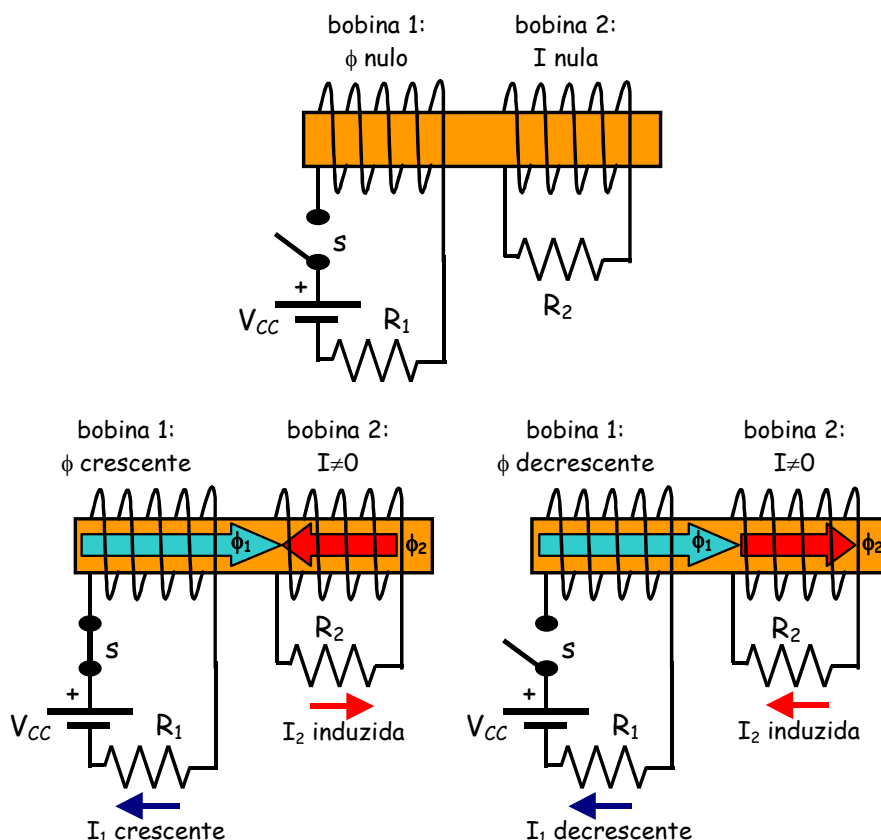
A figura 7.7 também mostra o comportamento da indução magnética segundo os experimentos de Faraday.



*Figura 7.6 - Indução Eletromagnética*

Em 7.7(a), enquanto a chave interruptora *s* estiver desligada não há corrente na bobina 1 e nem fluxo magnético no núcleo do sistema. Portanto não há força eletromotriz induzida e não circula corrente induzida na bobina 2. Em 7.7(b), quando a chave interruptora *s* for ligada, a corrente proporcionada pela fonte de tensão ( $V_{cc}$ ) passa a circular na bobina 1 criando um campo magnético crescente e portanto gerando uma variação de fluxo magnético crescente no núcleo do sistema. Essa variação de fluxo atinge a

bobina 2 induzindo uma força eletromotriz que proporciona a circulação de uma corrente induzida. Essa corrente tem um sentido tal que origina um fluxo magnético na bobina 2 que se opõe ao fluxo crescente gerado pela bobina 1. Circula na resistência  $R_2$  uma corrente com o sentido indicado em 7.7(b). Após certo tempo a corrente na bobina 1 se estabiliza devido à fonte de tensão contínua. O campo magnético torna-se constante e a variação de fluxo é nula. A corrente na bobina 2 se extingue. Quando, em 7.7(c), a chave for aberta, o campo magnético estabilizado devido à corrente constante na bobina 2 passa a decrescer, provocando novamente uma variação de fluxo magnético no núcleo do sistema. Uma força eletromotriz é induzida na bobina 2 e circula uma corrente induzida cujo sentido provoca a criação de um fluxo induzido na mesma direção do fluxo indutor, tentando impedir a sua variação. Após um certo tempo, a corrente se extingue juntamente com o campo magnético na bobina 1. A corrente na bobina 2 também se extingue.



**Figura 7.7 - Experimento de Faraday** (Fonte: Tipler, P.A.; Física volume 2. Ed. Guanabara Dois. 2 ed. Rio de Janeiro, 1984).

### Exemplo 7.1

Uma bobina magnética de 20 espiras é submetida a uma variação de fluxo magnético conforme o gráfico da figura 7.8. Determine o valor da força eletromotriz induzida (fem) nos terminais da bobina para esta variação de fluxo magnético.

Solução:

A força eletromotriz induzida média nos terminais da bobina, em cada intervalo de variação do fluxo magnético, pode ser dada por

$$\bar{\mathcal{E}} = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Pelo gráfico da figura 7.8 podemos identificar dois intervalos no comportamento do fluxo magnético. No primeiro intervalo, de 0 a 3 s, o fluxo magnético é crescente. No segundo intervalo, a partir de 3 s o fluxo magnético passa a manter-se constante.

A força eletromotriz induzida no primeiro intervalo é:

$$\bar{e}_1 = -N \cdot \frac{(\phi_f - \phi_i)}{(t_f - t_i)} = -20 \cdot \frac{(1,5 - 0)}{(3 - 0)} = -20 \cdot 0,5 = -10 \text{ V}$$

A força eletromotriz induzida no segundo intervalo é:

$$\bar{e}_2 = -N \cdot \frac{(\phi_f - \phi_i)}{(t_f - t_i)} = -20 \cdot \frac{(1,5 - 1,5)}{(5 - 3)} = -20 \cdot \frac{0}{2} = 0 \text{ V}$$

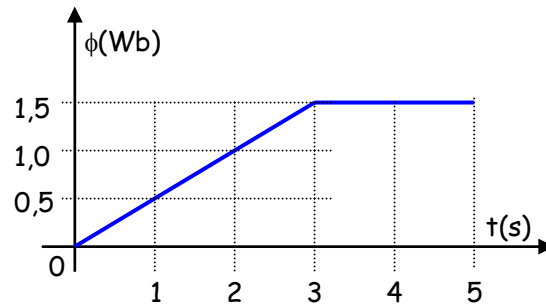


Figura 7.8 - Gráfico da variação do fluxo magnético no tempo para a bobina do exemplo 7.1.

### Exemplo 7.2:

Uma bobina quadrada de 4cm de lado contém 200 espiras e está posicionada perpendicular a um campo magnético uniforme de 0,8T, como mostra a figura 7.9. Esta bobina é rápida e uniformemente extraída em movimento perpendicular a B para uma região onde B cai abruptamente a zero. No instante  $t=0$  o lado direito da bobina está na borda do campo e a bobina leva 0,2s para sair totalmente da região do campo. A resistência elétrica da bobina é  $150\Omega$ . Determine:

- a taxa de variação do fluxo magnético na bobina;
- a força eletromotriz induzida e a corrente induzida que circula na bobina;
- o sentido da corrente induzida;
- a energia dissipada na bobina;
- a força média requerida para mover a bobina.

Solução:

A área da bobina é dada por:  $A = (4 \cdot 10^{-2})^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

O fluxo magnético no instante inicial  $t_i=0\text{s}$  é:

$$\phi_i = B \cdot A \cdot \sin\theta = 0,8 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot \sin 90^\circ = 1,28 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$$

O fluxo magnético no instante final  $t_f=0,2\text{s}$  é  $\phi_f = 0$ . Assim, a taxa de variação do fluxo no tempo pode ser dada por:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\phi_f - \phi_i}{t_f - t_i} = \frac{0 - 1,28 \cdot 10^{-3}}{0,2 - 0}$$

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -6,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

A variação é negativa porque há uma diminuição no fluxo magnético.

A tensão induzida média é dada pela lei de Faraday:

$$\bar{e} = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -200 \cdot (-6,4 \cdot 10^{-3}) = 1,28 \text{ V}$$

Pela lei de Ohm, podemos obter a corrente que circula na bobina (consideramos  $V=e$ ):

$$I = \frac{V}{R} = \frac{1,28}{150} = 8,53 \cdot 10^{-3} = 8,53 \text{ mA}$$

Segundo a Lei de Lenz, como o movimento provoca uma redução no fluxo (negativo), a corrente induzida produzirá um fluxo induzido que deverá opor-se a esta variação reforçando-o (no mesmo sentido). Usando a regra da mão esquerda determinamos que a corrente na bobina deverá ter o **sentido horário**.

A energia dissipada é calculada por:

$$E_n = P \cdot t = V \cdot I \cdot t = R \cdot I \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = 150 \cdot (8,53 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 0,2 = 2,18 \text{ J}$$

Como a bobina está sendo percorrida por corrente induzida e está imersa num campo magnético, seus condutores sofrem ação de forças magnéticas. Pela regra de Fleming podemos verificar que a força nos condutores superiores e inferiores têm mesmo módulo e sentidos opostos, anulando-se. Os condutores do lado direito da bobina estão fora do campo e a força é nula. Nos condutores do lado esquerdo, a regra de Fleming nos indica uma força magnética atuando no condutor para a esquerda, devido o sentido da corrente. O módulo é dado por:

$$F = N \cdot B \cdot I \cdot \ell \cdot \sin\theta = 200 \cdot 0,8 \cdot 8,53 \cdot 10^{-3} \cdot 0,04 \cdot \sin 90^\circ = 5,46 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Portanto, para que a espira seja movimentada para a direita a força mecânica externa aplicada deverá ser maior que este valor.

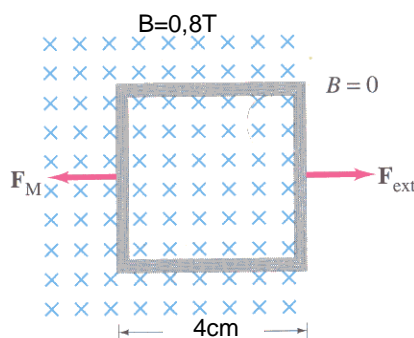


Figura 7.9 - Figura para o exemplo 7.1 (Fonte: Giancoli, 3ed.)

**Desafio Proposto:** a figura 7.10 apresenta um experimento de indução eletromagnética. Um ímã em forma de barra é movimentado para cima e para baixo nas proximidades de uma espira conectada a um galvanômetro. Na figura 7.109 está apresentado que quando o ímã se movimenta para cima há uma corrente na espira com o sentido indicado. Quando o ímã se movimenta para baixo há uma corrente circulando no sentido oposto. Quando o ímã está parado, não há corrente indicada no galvanômetro. Explique os fenômenos que ocorrem e o porquê do comportamento da corrente.

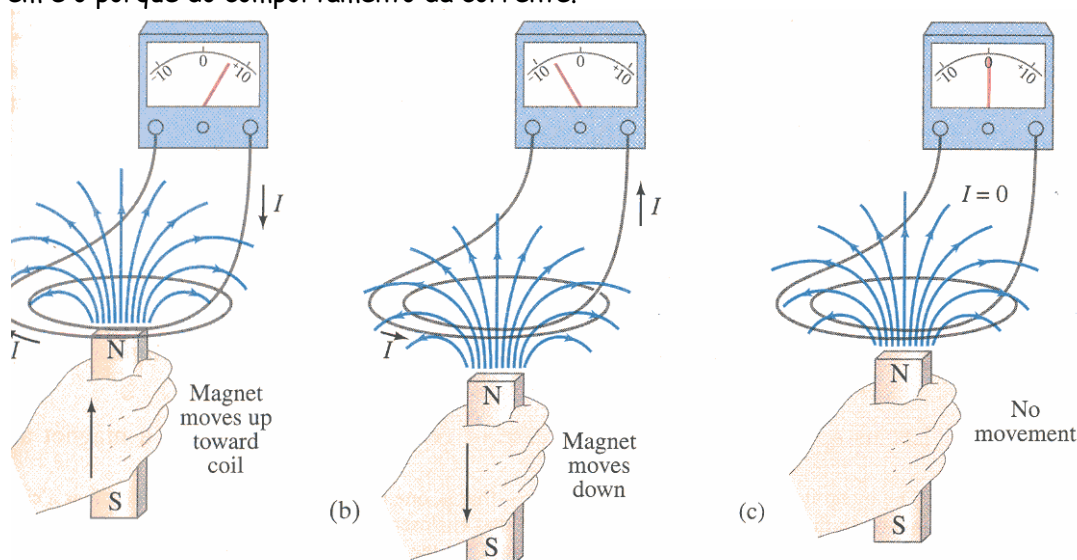


Figura 7.10 - experimento para o desafio proposto.

## 7.1 Tensão Induzida em Condutores que Cortam um Campo Magnético

Vimos que um ímã movimentando-se nas proximidades de um condutor ou bobina induz força eletromotriz (tensão). Consequentemente, um condutor se movimentando dentro de um campo provoca variação de fluxo magnético sobre sua superfície longitudinal (corta linhas de campo) e sofre, portanto,

indução de força eletromotriz (tensão), como mostra a figura 7.11. Se o circuito ao qual o condutor pertencer estiver fechado, circulará uma corrente induzida provocada pela força eletromotriz induzida.

Sabemos que:

$$\phi = B \cdot A \cdot \sin\theta$$

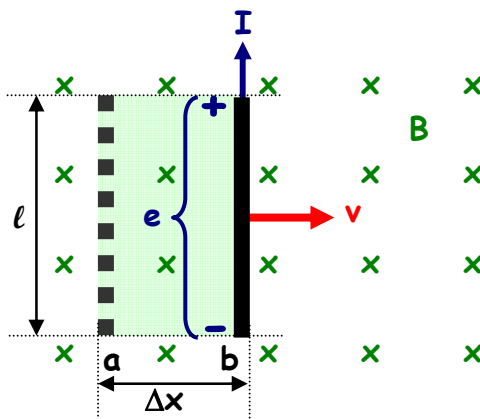
onde:

$\phi$  - fluxo magnético [Wb]

$B$  - densidade do campo magnético [T]

$A$  - área do condutor [ $m^2$ ]

$\theta$  - ângulo de incidência das linhas de campo na superfície longitudinal do condutor [ $^\circ$  ou rad]

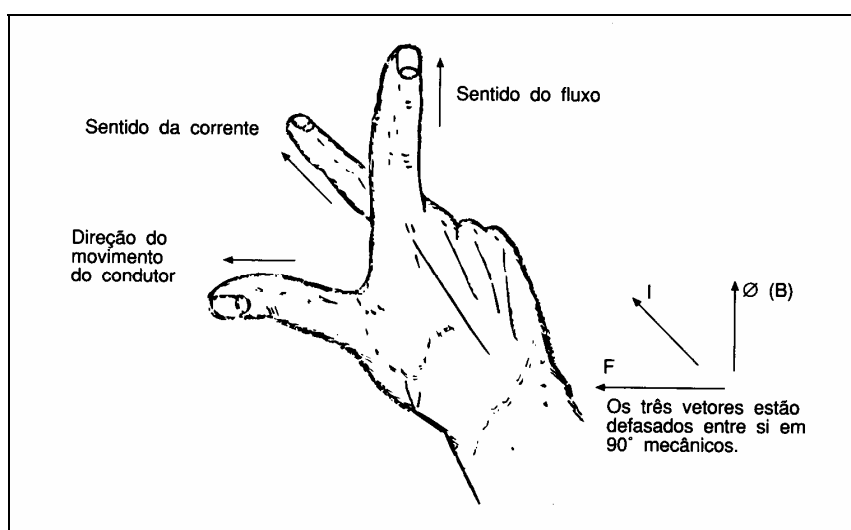


*Figura 7.11 - Condutor em movimento dentro de um campo magnético induz força eletromotriz.*

Portanto, o fluxo magnético depende da densidade do campo magnético, da área do condutor atingida pelas linhas do campo magnético e do ângulo em que estas linhas atingem o condutor.

Há uma **relação ortogonal** entre as direções do fluxo magnético, do movimento relativo do condutor (ou bobina) e da corrente induzida, como mostra a figura 7.11.

O sentido da corrente induzida num condutor em movimento dentro de um campo magnético pode ser dado pela **Regra de Fleming para ação geradora** (Regra da Mão Direita), como indica a figura 7.12, onde o dedo polegar indica o sentido do movimento, o dedo indicador o sentido do fluxo magnético e o dedo médio o sentido da corrente induzida.

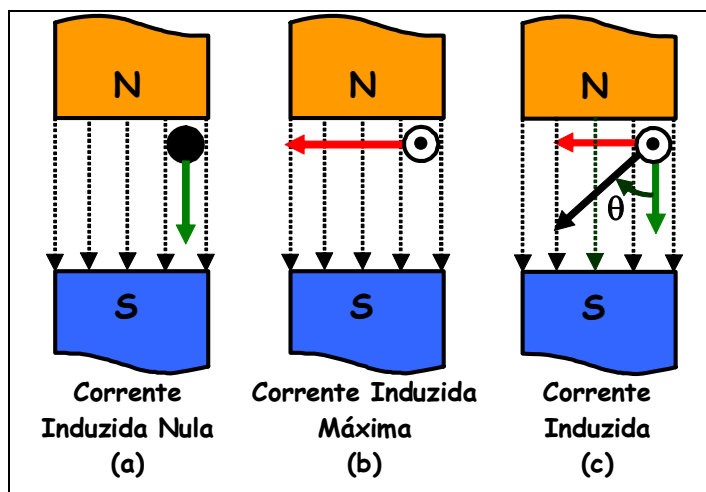


*Figura 7.12 - Determinação do sentido da corrente induzida com o uso da Regra de Fleming - Ação Geradora.*

A figura 7.13 indica o sentido da corrente induzida num condutor, em função da polaridade magnética e do sentido do movimento do condutor. Em 7.13(a) não há indução porque o condutor não corta



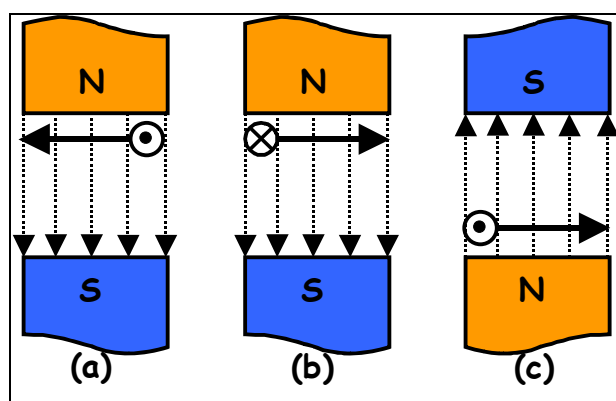
linhas de campo e, portanto, não há variação de fluxo magnético sobre a sua superfície longitudinal, ou seja, não há componente do deslocamento ortogonal às linhas de campo e, portanto,  $\theta = 0^\circ$ . Em 7.13(b) a indução é máxima, pois o ângulo do deslocamento do condutor é ortogonal às linhas de campo e, portanto,  $\theta = 90^\circ$ . Em 7.13(c) temos uma situação intermediária, pois há uma componente de deslocamento ortogonal e alinhada à direção das linhas de campo pois  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ . Se o condutor estiver parado, não atravessa linhas de campo, não sofre variação de fluxo magnético e, portanto, não há corrente induzida.



**Figura 7.13** – Movimento de um condutor dentro de um campo magnético. A amplitude da corrente induzida depende do ângulo no qual o condutor corta as linhas de fluxo.

As figuras 7.14(a) e 7.14(b) mostram a inversão do sentido da corrente induzida em função do sentido de deslocamento do condutor. Em 7.14(c), a inversão do sentido das linhas de campo também provoca a inversão do sentido da corrente induzida.

Baseados na Lei de Faraday, podemos encontrar uma equação particular para determinar a tensão induzida em condutores que se movimentam no interior de um campo magnético. Na figura 7.11 supomos que o condutor de comprimento  $\ell$  se desloca do ponto (a) ao ponto (b) com velocidade constante  $v$ , no interior de um campo com densidade de fluxo  $B$ , percorrendo uma distância  $\Delta x$ .



**Figura 7.13** – Mudar a direção do movimento ou a polaridade do campo muda o sentido da corrente induzida.

Pela Lei de Faraday:

$$\bar{e} = - \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

A variação do fluxo magnético pode ser dada por,  

$$\Delta\phi = B \cdot \Delta A$$

$$B = \frac{\Delta\phi}{\Delta A}$$

Esta equação nos remete à definição de densidade de campo magnético. Então substituindo a variação do fluxo na equação da força eletromotriz induzida temos,

$$\bar{e} = -\frac{B \cdot \Delta A}{\Delta t}$$

A área percorrida pelo condutor  $\Delta A$  é função da componente do deslocamento  $\Delta x$  ortogonal às linhas de campo e do comprimento do condutor  $\ell$ , assim:

$$\bar{e} = -\frac{B \cdot [(\Delta x \cdot \sin\theta) \cdot \ell]}{\Delta t}$$

Sabemos que a velocidade média é dada pela relação entre o deslocamento e o intervalo de tempo:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Então:

$$\bar{e} = -B \cdot \ell \cdot v \cdot \sin\theta$$

onde:

$\bar{e}$  - Força Eletromotriz induzida média num condutor que corta um campo magnético [V];

$B$  - Densidade de Fluxo Magnético [T];

$\ell$  - comprimento ativo do condutor no campo magnético [m];

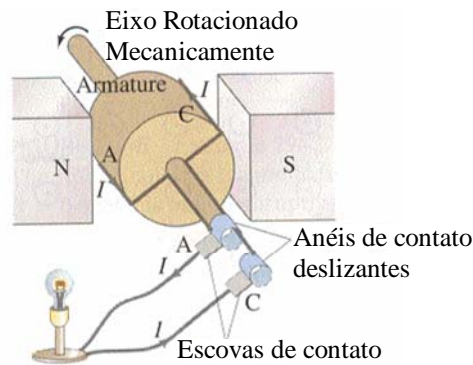
$v$  - velocidade média do condutor [m/s];

$\theta$  - ângulo do deslocamento com as linhas de campo.

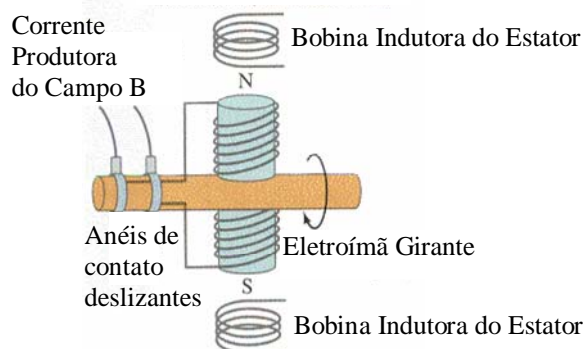
Dessa forma podemos concluir que a corrente pode ser induzida em um condutor através de três maneiras:

- O condutor é movido através de um campo magnético estacionário. Este princípio se aplica nos geradores de corrente contínua, por exemplo.
- O condutor está estacionário e o campo magnético se movimenta. Este princípio se aplica nos geradores de corrente alternada, por exemplo.
- O condutor e o eletroímã que gera o campo magnético estão estacionários e a corrente alternando do estado ligado para desligado causa a pulsação do campo magnético. Este princípio se aplica nas bobinas das velas de ignição nos motores dos automóveis e também nos transformadores.

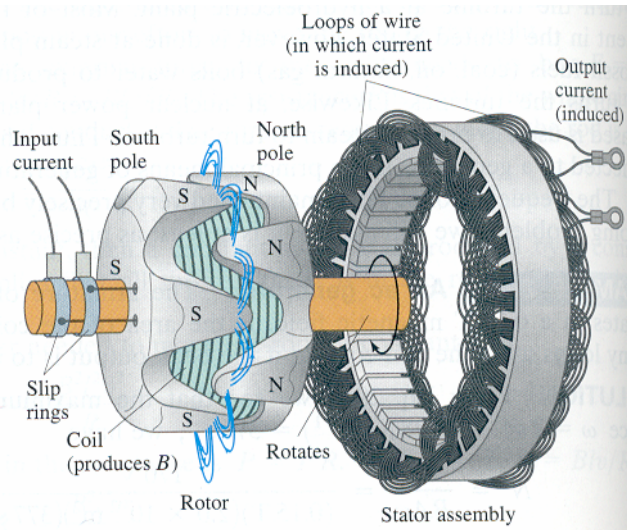
**Desafio Proposto:** para aprofundar os seus conhecimentos, pesquise sobre o funcionamento dos geradores de energia elétrica e elabore uma explicação para o seu funcionamento. Para tanto, a figura 7.15 apresenta o esquema simplificado de um gerador baseado no princípio da indução eletromagnética. Na figura 7.15 temos um gerador com o campo magnético fixo e produzido por ímãs permanentes na carcaça (estator) e uma bobina girante (armadura no rotor). Já na figura 7.16 temos uma configuração diferente, onde o campo magnético é produzido por uma bobina eletromagnética e é girante (no rotor) e as bobinas indutoras estão fixadas na carcaça (estator). O efeito produzido por ambos é o mesmo. Na figura 7.17 temos uma configuração mais elaborada para o gerador simplificado da figura 7.16.



*Figura 7.15 - Gerador Simplificado com campo magnético no estator e bobina indutora (armadura) no rotor.*



*Figura 7.16 - Gerador Simplificado com campo eletromagnético girante no rotor e bobina indutora no estator.*



*Figura 7.17 - Estrutura de um gerador comercial com campo girante no rotor e bobinas indutoras no estator.*

## 8. Auto-Indução Eletromagnética e Indutância

Pode ser comprovado experimentalmente que uma bobina condutora submetida a uma intensidade de corrente elétrica **variável** tem a propriedade de gerar uma força eletromotriz induzida (tensão induzida) entre seus terminais, como mostra a figura 8.1. Ou seja, a própria corrente variante que circula na bobina, cria um fluxo magnético que induz, nela mesma, uma força eletromotriz. A esta propriedade chamamos de Auto-Indução Eletromagnética.

Uma bobina induz força eletromotriz (tensão) entre seus terminais quando submetida a uma variação de corrente.

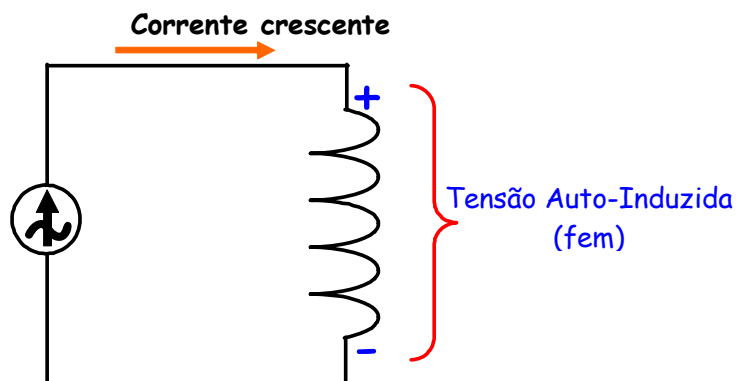


Figura 8.1 - Corrente variando numa bobina induz força eletromotriz.

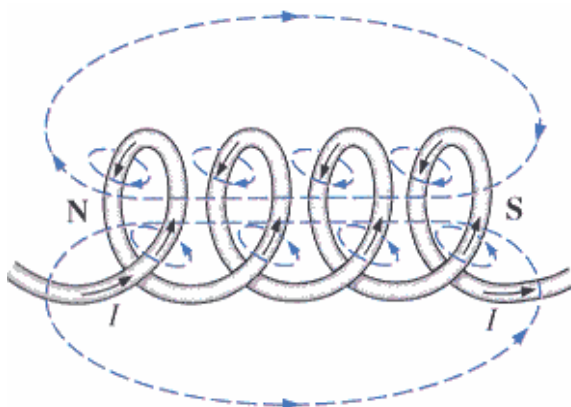


Figura 8.2 - Fluxo Concatenado produzido pela corrente numa bobina (fonte: Boylestad).

O fenômeno da auto-indução ocorre porque a corrente circulando através de cada espira de uma bobina produz um campo magnético que circunda cada espira. Com o crescimento da corrente, o campo magnético de cada espira se expande e as linhas de fluxo cortam todas as outras espiras, como mostra a figura 8.2. A este fluxo que atinge as espiras vizinhas chamamos de **fluxo concatenado**  $\phi_A$  e é determinado pelo produto do número de espiras pelo fluxo magnético produzido pela corrente em cada uma espira. Assim:

$$\phi_A = N \cdot \phi$$

A corrente em cada espira afeta todas as outras espiras. Se a corrente varia em uma espira, produz um fluxo magnético variante que atinge as espiras vizinhas. Nestas espiras, pela variação do fluxo, é induzida uma força eletromotriz, segundo a Lei de Faraday. Esta força eletromotriz provoca uma corrente que, por sua vez, gera um fluxo magnético induzido que se opõe à variação do fluxo magnético indutor provocado pela corrente variante em cada espira, segundo a Lei de Lenz. O fluxo magnético atingindo outras espiras tem o efeito de incrementar a oposição à variação da corrente (causa da variação do fluxo magnético na bobina). Ou seja, nos instantes em que a corrente varia, haverá um efeito de oposição tentando limitar e impedir a variação da corrente, pois esta provoca uma variação de fluxo. Esta oposição resulta numa força eletromotriz (tensão) induzida nos terminais da própria bobina que sofre a variação de corrente. Devemos ter em mente que estes efeitos ocorrem simultaneamente.

A tensão auto-induzida<sup>12</sup> se opõe (é contrária) à variação da corrente que proporciona a variação do fluxo magnético indutor, de acordo com a Lei de Lenz. Assim, a tensão auto-induzida cria, na própria

<sup>12</sup> A força eletromotriz (fem) auto-induzida (tensão auto-induzida) também é chamada de FORÇA CONTRA ELETROMOTRIZ (fcem).

bobina, um fluxo magnético auto-induzido oposto ao fluxo magnético indutor e que é proporcional à corrente.

A constante de proporcionalidade que relaciona o fluxo concatenado com a corrente numa bobina é chamada de **Coeficiente de Auto-Indutância**, ou simplesmente **Indutância L da Bobina**:

$$\phi_A = L \cdot I$$

Assim:

$$L = \frac{\phi_A}{I}$$

Onde:

L - Coeficiente de Auto Indutância ou Indutância da Bobina, [Henry, H].

$\phi_A$  - fluxo magnético concatenado, [Weber, Wb].

I - corrente elétrica, [Ampère, A].

Portanto, a capacidade que uma bobina tem de induzir tensão nela mesma, através de uma variação de corrente, é chamada de **Auto-Indutância** ou simplesmente **Indutância da Bobina**. A unidade de Indutância é o **Henry**<sup>13</sup> (**H**), dado pela relação Wb/A. Assim uma bobina que possui 1H de Indutância é capaz de criar um fluxo magnético auto-induzido de 1Wb se a corrente variar 1A.

Uma variação infinitesimal na corrente produz uma variação infinitesimal no fluxo concatenado da bobina, ou seja:

$$d\phi_A = L \cdot dI$$

E a constante de proporcionalidade se mantém:

$$L = \frac{d\phi_A}{dI}$$

Uma variação infinitesimal no fluxo concatenado é dado por  $d\phi_A = N \cdot d\phi$ . Portanto, a Indutância L de uma bobina pode ser dada pela equação:

$$L = N \cdot \frac{d\phi}{dI}$$

onde:

L - Indutância da bobina ou coeficiente de auto-indução, [Henry, H];

N - número de espiras da bobina;

$d\phi$  - variação infinitesimal no fluxo magnético, [Weber, Wb]

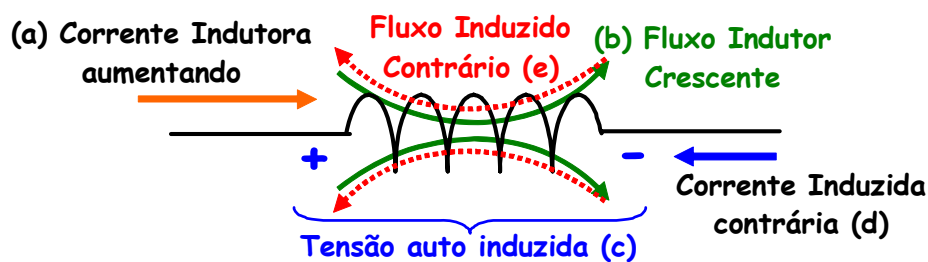
$dI$  - variação infinitesimal na corrente da bobina, [Ampère, A].

**Observação:** Se considerarmos que variações lineares (médias) da corrente provocam variações médias no fluxo magnético, podemos admitir a indutância dada por:

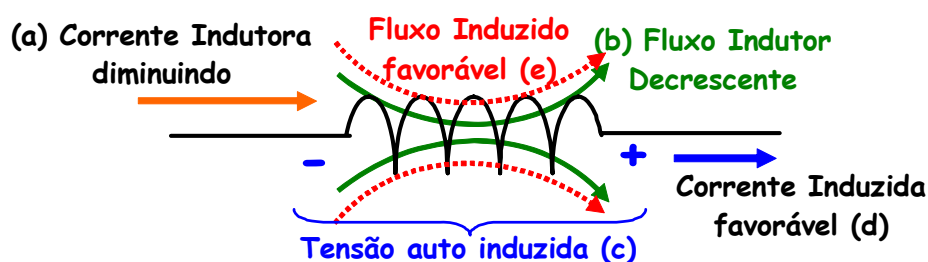
$$L = N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta I}$$

As figuras 8.3 e 8.4 demonstram como ocorre o fenômeno da auto-indução de tensão numa bobina percorrida por corrente variável.

<sup>13</sup> Joseph Henry (1797-1878), físico e matemático americano, desenvolveu eletroímãs mais potentes, descobriu e publicou em 1832 um artigo sobre Auto-Indução, desenvolveu um transmissor e receptor de telégrafo e pesquisou a natureza oscilatória da luz e descargas na chamada "Garrafa de Leyden".

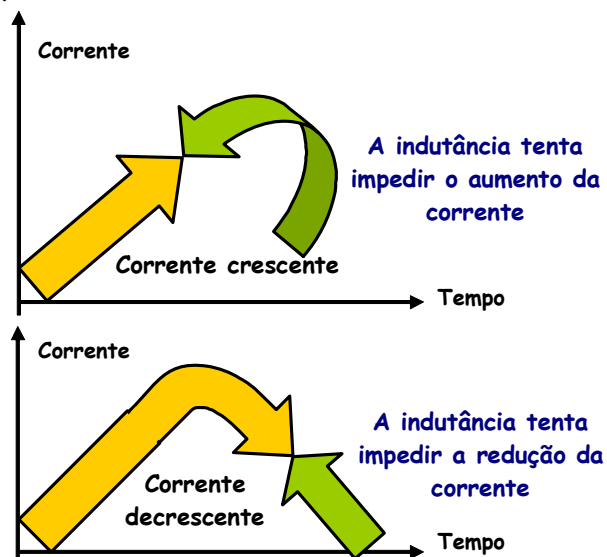


*Figura 8.3 - Auto Indução de Força Eletromotriz: corrente crescente na bobina (a) produz variação crescente no fluxo magnético indutor (b) que por sua vez induz força eletromotriz nos terminais da bobina (c) que tem uma polaridade tal que produza uma corrente induzida (d) que cria um fluxo magnético induzido (e) contrário à variação (aumento) do fluxo magnético indutor.*



*Figura 8.4 - Auto Indução de Força Eletromotriz: corrente decrescente na bobina (a) produz variação decrescente no fluxo magnético indutor (b) que por sua vez induz força eletromotriz nos terminais da bobina (c) que tem uma polaridade tal que produza uma corrente induzida (d) que cria um fluxo magnético induzido (e) contrário à variação (redução) do fluxo magnético indutor.*

Fazendo uma analogia, quando empurramos uma carga mecânica pesada, um carro por exemplo, é necessária mais energia (trabalho) para iniciar o movimento do que para sustentá-lo. Uma vez em movimento é mais fácil sustentar este movimento do que tentar pará-lo. Isto ocorre devido à inércia mecânica. Inércia mecânica é, portanto, a característica de massa que se opõe à mudança de velocidade. Podemos dizer que a indutância tem um efeito sobre a corrente em um circuito elétrico como a inércia tem sobre o movimento de um objeto mecânico. A indutância requer mais energia para partir ou para parar a corrente do que para sustentar seu fluxo. A indutância é uma espécie de "inércia magnética". A figura 8.5 ilustra esse comportamento.



*Figura 8.5 - Uma bobina se opõe a qualquer variação na corrente.*

À bobina que possui um dado coeficiente de auto-indutância  $L$  chamamos de **Bobina Indutora**, ou simplesmente, **Indutor**.

A Lei de Faraday quantifica a tensão (força eletromotriz) induzida numa bobina sujeita a uma variação de fluxo magnético no tempo pela equação, já estudada:

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$

A força eletromotriz auto induzida ou tensão auto-induzida<sup>14</sup> instantânea (função do tempo) numa Bobina Indutora (Indutor) sujeita a uma variação infinitesimal no fluxo magnético pode ser dada pela mesma Lei de Faraday:

$$v_L = -N \frac{d\phi}{dt}$$

Onde:

$v_L$  - força eletromotriz (tensão) auto-induzida no indutor, [Volt, V].

$d\phi$  - variação infinitesimal no fluxo magnético, [Weber, Wb].

$dt$  - variação infinitesimal de tempo, [segundo, s].

**Observação:** Para intervalos de tempo cuja variação do fluxo magnético é **linear**, a tensão auto-induzida **média** na bobina indutora, em cada intervalo, pode ser dada por:

$$V_L = -N \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

$V_L$  - força eletromotriz (tensão) auto-induzida média no indutor, [Volt, V].

$\Delta\phi$  - variação média no fluxo magnético, [Weber, Wb].

$\Delta t$  - intervalo de tempo, [segundo, s].

Matematicamente, para qualquer variação do fluxo magnético no tempo, a tensão auto-induzida pode ser dada por,

$$v_L = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

A indutância pode ser dada por,

$$L = N \cdot \frac{d\phi}{dI}$$

Multipliando-se e dividindo-se por  $dI$  e substituindo temos,

$$v_L = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \left( \frac{dI}{dI} \right) = -N \cdot \frac{d\phi}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Assim, a tensão auto-induzida numa bobina indutora pode ser dada em função da variação da corrente no tempo:

$$v_L = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

onde:

$v_L$  - força eletromotriz (tensão) auto-induzida no indutor, [Volt, V].

$L$  - indutância (coeficiente de auto-indução), [Henry, H];

$dI/dt$  - função de variação da corrente no tempo [Ampère por segundo, A/s].

Concluimos que:

**O valor da tensão auto-induzida nos terminais de um Indutor está diretamente associado ao valor da sua Indutância  $L$  e à taxa instantânea de variação da corrente desta bobina no tempo.**

<sup>14</sup> Note, para facilitar a identificação, a mudança na notação de tensão induzida de "e" para "v".



**Observação:** a tensão auto-induzida média num indutor, durante um intervalo finito de tempo no qual há uma variação média da corrente, pode ser dada por:

$$V_{Lmed} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

onde:

$V_{Lmed}$  - tensão auto-induzida média no indutor, [Volt, V];

$L$  - indutância (coeficiente de auto-indução), [Henry, H];

$\Delta I$  - variação média da corrente na bobina [Ampère, A];

$\Delta t$  - intervalo de tempo [s].

Por esta equação, também podemos perceber que, ao ligarmos um circuito de uma bobina conectada a uma fonte de tensão contínua, como mostra a figura 8.6, a corrente não se estabelece instantaneamente, pois se  $\Delta t$  tende a zero (nos instantes iniciais), a tensão auto-induzida tende ao valor da tensão da fonte de alimentação. Como a tensão entre os terminais da bobina será igual a  $V_{cc}$ , não há circulação de corrente e o Indutor comporta-se como um **circuito aberto** (grande oposição à passagem da corrente):

$$V_{Lmed} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t \rightarrow 0} = -L \cdot \frac{\Delta I}{0} \rightarrow V_{cc}$$

A medida que a corrente cresce e se estabiliza (devido à fonte de tensão contínua), a tensão auto-induzida na bobina indutora vai-se reduzindo. Após certo tempo a corrente não mais varia,  $\Delta I$  é nulo e, portanto, a tensão auto-induzida no indutor também é nula. Se a bobina não tem tensão entre seus terminais ela comporta-se como um **curto-circuito** (nenhuma oposição à passagem da corrente):

$$V_{Lmed} = -L \cdot \frac{\Delta I \rightarrow 0}{\Delta t} = -L \cdot \frac{0}{\Delta t} \rightarrow 0$$

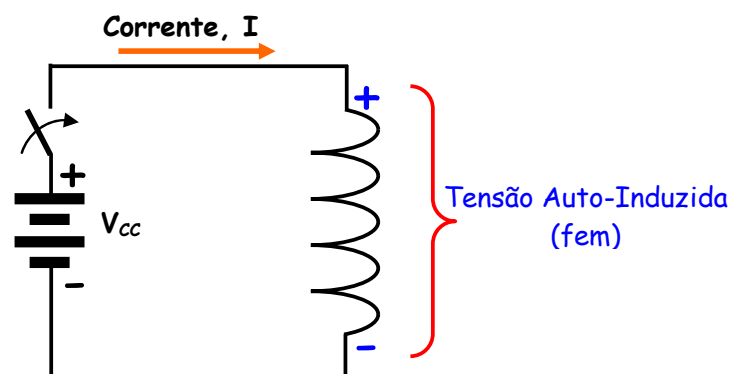


Figura 8.6 - Indutor ligado a uma fonte de tensão contínua.

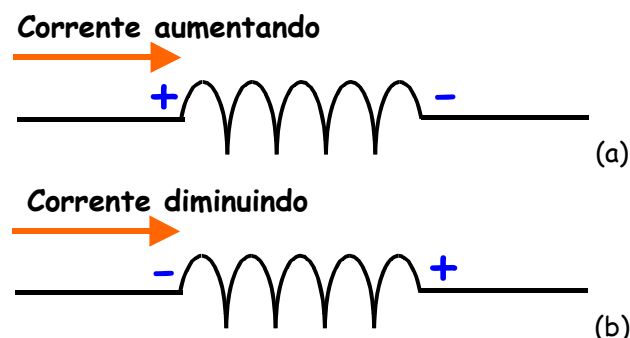


Figura 8.7 - Polaridade da tensão induzida num indutor em função do comportamento da corrente

Se a corrente no indutor estiver aumentando, a polaridade da tensão induzida pela variação do fluxo magnético na bobina terá uma polaridade tal que se oporá a esta condição como se fornecesse uma

corrente contrária, tentando evitar o aumento da corrente, como mostra a figura 8.7(a). Se a corrente no indutor estiver diminuindo, ocorre o contrário, ou seja, a polaridade da tensão induzida é tal que o indutor fornece uma corrente para evitar a diminuição do fluxo magnético, como mostra a figura 8.7(b). Estes são os efeitos das Leis de Faraday e de Lenz aplicadas às bobinas indutoras.

### Exemplo 8.1:

Esboce o gráfico para o comportamento da tensão média induzida nos terminais de uma bobina indutora de 10mH, cuja corrente apresenta intervalos de variação linear, conforme o gráfico da figura 8.8.

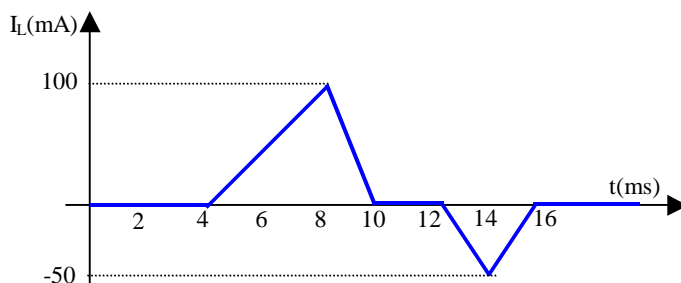


Figura 8.8 - comportamento da corrente no indutor para o exemplo 8.1.

- Intervalo 1 (0 a 4ms) - neste intervalo podemos perceber, observando o gráfico da figura 8.8, que a corrente é nula e, portanto, não varia. Assim:

$$\Delta t_1 = t_f - t_i = 4 \cdot 10^{-3} - 0 = 4\text{ms}$$

$$\Delta I_1 = I_f - I_i = 0 - 0 = 0\text{A}$$

$$V_{Lmed1} = -L \cdot \frac{\Delta I_1}{\Delta t_1} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0}{4 \cdot 10^{-3}} = 0\text{V}$$

Como a corrente não varia, não há tensão induzida nos terminais da bobina indutora.

- Intervalo 2 (4 a 8ms) - analisando o gráfico da figura 8.8, observamos que neste intervalo, a corrente é variante e crescente. Assim:

$$\Delta t_2 = t_f - t_i = 8 \cdot 10^{-3} - 4 \cdot 10^{-3} = 4\text{ms}$$

Como a variação é linear, o valor da corrente no intervalo é dado pela diferença entre o seu valor final e o inicial:

$$\Delta I_2 = I_f - I_i = 100 \cdot 10^{-3} - 0 = +100\text{mA}$$

A tensão média induzida na bobina durante o intervalo é dada por:

$$V_{Lmed2} = -L \cdot \frac{\Delta I_2}{\Delta t_2} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{100 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} = -250\text{mV}$$

A variação da corrente no intervalo é positiva (corrente crescente) e a tensão induzida média tem uma polaridade oposta à da tensão da fonte, daí o sinal negativo (Lei de Lenz).

- Intervalo 3 (8 a 10ms) - neste intervalo a corrente é decrescente.

$$\Delta t_3 = t_f - t_i = 10 \cdot 10^{-3} - 8 \cdot 10^{-3} = 2\text{ms}$$

A variação também é linear e o valor da corrente no intervalo é negativo, dado por:

$$\Delta I_3 = I_f - I_i = 0 - 100 \cdot 10^{-3} = -100\text{mA}$$

$$V_{Lmed3} = -L \cdot \frac{\Delta I_3}{\Delta t_3} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(-100 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot 10^{-3}} = +500\text{mV}$$

A tensão induzida média é positiva pois tem polaridade oposta à variação da corrente no intervalo.

- Intervalo 4 (10 a 12ms) - neste intervalo ocorre o mesmo que no primeiro:

$$\Delta t_4 = t_f - t_i = 12 \cdot 10^{-3} - 10 \cdot 10^{-3} = 2\text{ms}$$

$$\Delta I_4 = I_f - I_i = 0 - 0 = 0\text{mA}$$

$$V_{L\text{med}4} = -L \cdot \frac{\Delta I_4}{\Delta t_4} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0}{2 \cdot 10^{-3}} = 0\text{V}$$

- Intervalo 5 (12 a 14ms) - neste intervalo a corrente é novamente decrescente.

$$\Delta t_5 = t_f - t_i = 14 \cdot 10^{-3} - 12 \cdot 10^{-3} = 2\text{ms}$$

$$\Delta I_5 = I_f - I_i = -50 \cdot 10^{-3} - 0 = -50\text{mA}$$

$$V_{L\text{med}5} = -L \cdot \frac{\Delta I_5}{\Delta t_5} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(-50 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot 10^{-3}} = +250\text{mV}$$

- Intervalo 6 (14 a 16ms) - no intervalo final a corrente é novamente crescente.

$$\Delta t_6 = t_f - t_i = 14 \cdot 10^{-3} - 16 \cdot 10^{-3} = 2\text{ms}$$

$$\Delta I_6 = I_f - I_i = 0 - (-50 \cdot 10^{-3}) = 50\text{mA}$$

$$V_{L\text{med}6} = -L \cdot \frac{\Delta I_6}{\Delta t_6} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{(50 \cdot 10^{-3})}{2 \cdot 10^{-3}} = -250\text{mV}$$

- Intervalo 7 (16ms em diante):

$$\Delta I_7 = I_f - I_i = 0 - 0 = 0\text{mA}$$

$$V_{L\text{med}7} = -L \cdot \frac{\Delta I_7}{\Delta t_7} = -10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{0}{\Delta t_7} = 0\text{V}$$

Com os valores médios da tensão induzida em cada intervalo podemos traçar o gráfico da figura 8.9. Devemos ter em mente que os valores de tensão auto-induzida nos terminais da bobina indutora são valores médios, portanto, **contínuos** durante cada intervalo de tempo correspondente.

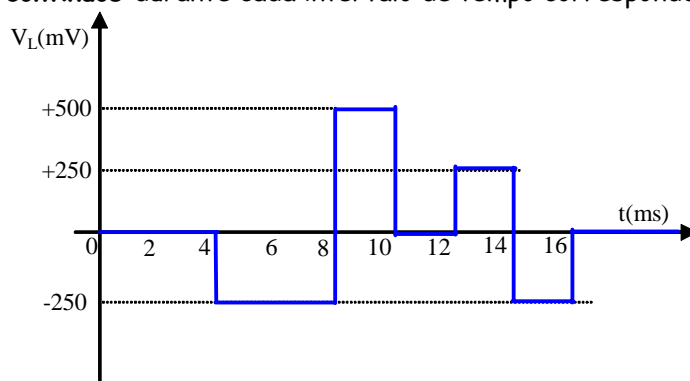


Figura 8.9 - comportamento da tensão média induzida no indutor do exemplo 8.1.

## 9. Indutores:

Um indutor é uma bobina composta por um fio condutor isolado (geralmente fio de cobre esmaltado) enrolado sobre um núcleo de ar ou de material ferromagnético (por exemplo, ferro doce ou ferrite). Os núcleos de ferro e de ferrite têm como objetivo reduzir a dispersão magnética das linhas de campo, pois esses materiais apresentam baixa relutância (resistência à passagem do fluxo magnético), ou seja, alta permeabilidade  $\mu$ .

A figura 9.1 mostra a estrutura e as simbologias para um indutor e seus diferentes tipos de núcleo. Sabemos que uma bobina longa<sup>15</sup> gera uma densidade de campo magnético  $B$  dado por:

<sup>15</sup> Bobina Longa é aquela cujo raio da seção transversal de cada espira é bem menor que o comprimento da bobina.

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{\ell}$$

como  $\phi = B \cdot A$ , substituindo temos:

$$\frac{\phi}{A} = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{\ell}$$

e

$$\phi = \frac{\mu \cdot N \cdot I \cdot A}{\ell}$$

Da definição de indutância, sabemos que  $L = N \cdot \frac{\phi}{I}$ . Assim:

$$\phi = \frac{L \cdot I}{N}$$

substituindo:

$$\frac{L \cdot I}{N} = \frac{\mu \cdot N \cdot I \cdot A}{\ell}$$

Assim, a **Indutância de um Indutor** pode ser dada pela expressão:

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{\ell}$$

Onde:

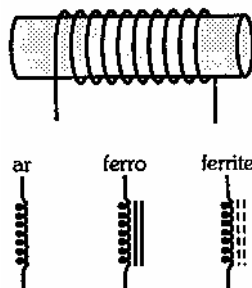
$L$  - Indutância da bobina indutora, [Henry, H];

$A$  - área das espiras da bobina [metros quadrados,  $m^2$ ];

$\ell$  - comprimento longitudinal da bobina, [metros, m];

$\mu$  - permeabilidade magnética do meio no núcleo da bobina [Henry por metro, H/m];

$N$  - número de espiras



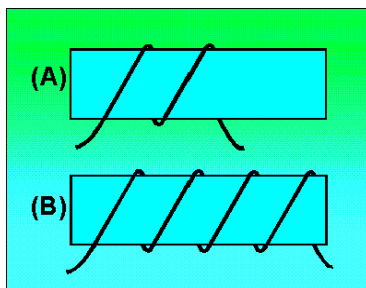
**Figura 9.1 - Aparência e Simbologias dos Indutores** (Fonte: Markus, 2001).

Sabemos que Indutância é a capacidade que uma bobina tem de induzir tensão nela mesma quando submetida a uma variação de corrente. A Indutância de uma bobina é uma constante construtiva e depende, portanto:

- do número de espiras,  $N$ .
- da área das espiras,  $A$  em  $m^2$ .
- do comprimento da bobina,  $\ell$  em m.
- da permeabilidade magnética do núcleo,  $\mu$  em H/m.

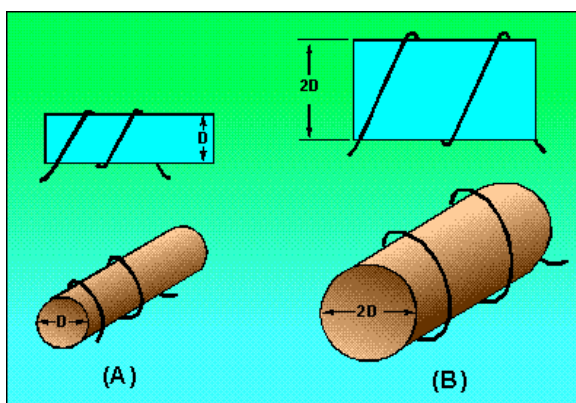
A indutância depende inteiramente da construção física do circuito e pode somente ser medida com instrumentos especiais de laboratório. Dos fatores mencionados, um dos mais importantes é o número de espiras que afeta a indutância de um indutor (ao quadrado). A figura 9.2 mostra dois enrolamentos. O enrolamento (a) tem duas espiras e o enrolamento (b) tem quatro. No primeiro, o fluxo magnético estabelecido por uma espira corta uma outra. No segundo enrolamento, o fluxo magnético estabelecido por uma espira corta três outras. Dobrando o número de espiras se produz um fluxo magnético duplamente

mais forte. Um campo duplamente mais forte corta duas vezes mais o número de espiras, induzindo quatro vezes a tensão. Então, concluímos que a indutância varia diretamente com o **quadrado do número de espiras**.

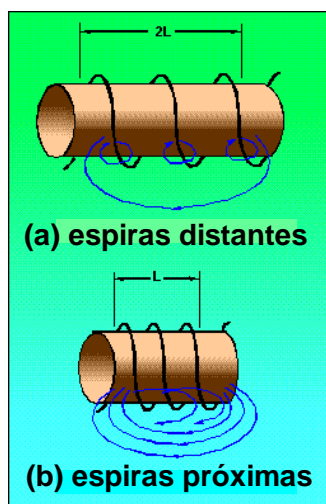


*Figura 9.2 - indutor: (a) duas espiras; (b) quatro espiras.*

O segundo fator importante é o diâmetro do núcleo. Na figura 9.3 podemos ver que o núcleo representado em (b) tem o dobro do diâmetro do núcleo em (a). Isto requer um condutor mais longo para construir uma bobina com núcleo de diâmetro maior. Então, existem mais linhas de campo para induzir uma força contra eletromotriz em um núcleo com diâmetro grande. A indutância de um indutor aumenta diretamente com o aumento da área transversal de um núcleo. Como  $A = \pi \cdot R^2$ , dobrando-se o raio do núcleo, a indutância aumenta por um fator de 4.



*Figura 9.3 - indutor: (a) diâmetro D; (b) diâmetro 2D.*



*Figura 9.4 - indutor: (a) longo, bobinas espaçadas; (b) curto, bobinas próximas.*

O terceiro fator que afeta a indutância é o comprimento longitudinal da bobina do indutor (não confundir com o comprimento do condutor). A figura 9.4 mostra dois exemplos. Em 9.4(a) o núcleo tem

três espiras, amplamente espaçadas, proporcionando um núcleo relativamente longo. Um núcleo desse tipo tem pouca interação de fluxo, devido à grande distância entre cada espira. Então o núcleo (a) tem uma indutância relativamente baixa. O núcleo de 9.4(b) tem espiras mais próximas, proporcionando um núcleo relativamente curto. Este pequeno espaçamento aumenta a interação do fluxo (fluxo concatenado), aumentando a indutância do indutor. Dobrando o comprimento de um núcleo, enquanto se mantém o mesmo número de espiras, o valor da indutância diminui pela metade.

O quarto fator físico é o tipo de material usado para fazer o núcleo. A figura 9.5 mostra dois núcleos. Em 9.5(a) o núcleo é feito de ar e em 9.5(b) é feito de ferro doce (*soft iron*). O núcleo de ferro é um caminho melhor para as linhas de campo que o núcleo de ar. Os núcleos magnéticos de ferro doce têm alta permeabilidade  $\mu$  (menor relutância  $\mathfrak{R}$ ) para o fluxo magnético, resultando numa concentração maior das linhas de campo e aumentando a indutância.

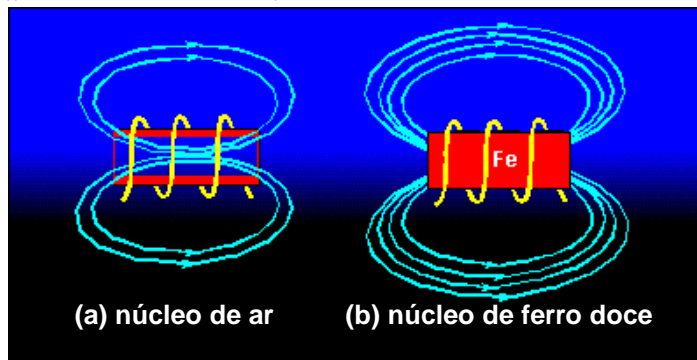


Figura 9.5 - tipo de núcleo: (a) ar;(b) ferro doce.

Uma outra forma de incrementar o valor da indutância é enrolar o indutor em camadas. A figura 9.6 mostra três indutores com diferentes quantidades de camadas. O indutor em 9.6(a) é um indutor pobre comparado aos outros porque suas espiras estão largamente espaçadas e não há camadas. O movimento do fluxo, indicado por uma flecha tracejada, não é concatenado efetivamente, porque há somente uma camada de espiras. Um indutor de maior indutância é mostrado em 9.6(b). As espiras estão com pouco espaçamento e estão enroladas em duas camadas. As duas camadas interagem fortemente uma com a outra através do fluxo concatenado, devido ao grande número de espiras. Note que a espira destacada com a letra x, está próxima de quatro outras espiras (hachureadas). Isto causa um incremento na interação do fluxo.

Um indutor pode ainda ter maior indutância se for construído em camadas, como mostrado na figura 9.6(c). O incremento do número de camadas (área da seção transversal) melhora ainda mais a interação do fluxo (fluxo concatenado). Observe que a espira em y, é posicionada próxima a seis outras espiras (hachureadas). Na prática várias camadas podem continuar sendo sucessivamente sobrepostas. O fato importante de se lembrar, no entanto, é que a indutância de um indutor aumenta com a adição do número de camadas. Muitos indutores construídos de maneira diferente podem ter a mesma indutância. É importante lembrar que a indutância depende do grau de interatividade entre os condutores.

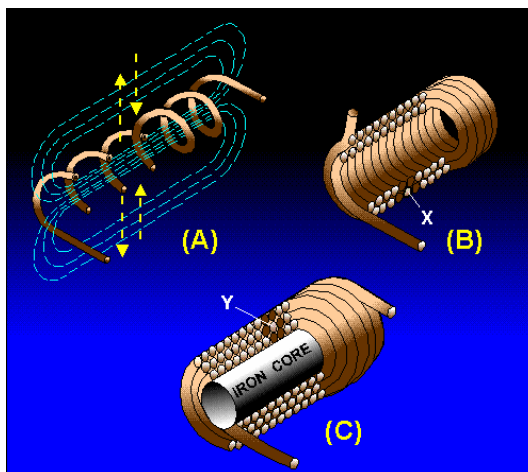


Figura 9.6 - indutor: (a) uma camada, núcleo de ar; (b) duas camadas, núcleo de ar; (c) três camadas, núcleo de ferro.

### Exemplo 9.1:

Determine a indutância de uma bobina indutora com 200 espiras, 4cm de comprimento e área das espiras de  $0,2\text{cm}^2$  com núcleo de ar. Se for colocado um núcleo ferromagnético de  $\mu_R = 5000$  a indutância assume que valor?

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{\ell} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 200^2 \cdot 0,2 \cdot 10^{-4}}{0,04} = 25\mu\text{H}$$

como  $\mu_R = \frac{\mu_{\text{mat}}}{\mu_0}$ , a indutância aumenta 5000 vezes:  $L = 126\text{mH}$ .

## 9.1. Modelos Equivalentes de Indutores

Indutores, assim como capacitores não são componentes ideais. Um indutor real apresenta, associada à sua indutância  $L$ , uma resistência série ( $R_s$ ) inerente aos condutores de suas bobinas além de uma capacitância parasita ( $C_p$ ) devida aos condutores das espiras paralelas<sup>16</sup> umas às outras. O modelo elétrico equivalente para o indutor real está apresentado na figura 9.7(a).

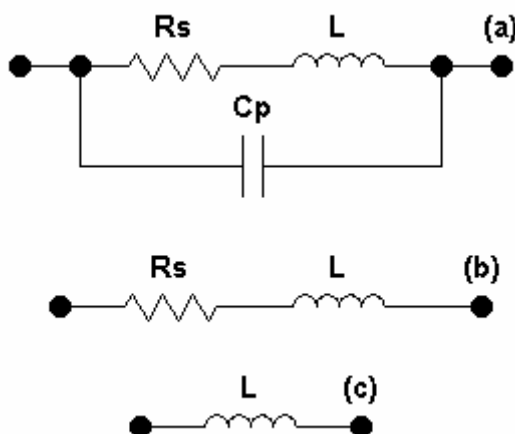


Figura 9.7 - Modelos Elétricos de Indutores: (a) completo; (b) sem capacitância parasita; (c) simplificado ou ideal.

Em muitas aplicações a capacitância parasita e até a resistência série podem ser ignoradas, resultando nos modelos simplificados das figuras 9.7(b) e 9.7(c). O modelo da figura 9.7(c) é de um indutor considerado ideal. Em muitos circuitos a resistência série deve ser incluída na análise e tem um efeito

<sup>16</sup> Todo condutor paralelo percorrido por corrente apresenta alguma capacitância.



importante na resposta de um circuito. A resistência série típica varia de uns poucos Ohms a centenas de Ohms.

## 9.2. Especificações e Tipos de Indutores:

Os fabricantes de indutores, além de seus valores nominais, fornecem várias outras especificações em seus catálogos.

**Indutância Nominal:** é o valor especificado de indutância em Henrys ou suas sub-unidades. A tabela 9.1 apresenta uma série de valores padronizados para indutores. Os valores comerciais encontrados são múltiplos desses valores padronizados.

Tabela 9.1

Valores Múltiplos Padronizados de Indutores (em $\mu\text{H}$ )											
1,0	1,2	1,5	1,8	2,2	2,7	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2

**Tolerância:** é o desvio admissível para o valor nominal, e depende da tecnologia de fabricação e dos materiais empregados nos núcleos. A tolerância dos indutores em geral varia entre  $\pm 1\%$  e  $\pm 20\%$ . Por exemplo, um indutor de  $100\mu\text{H}$  com tolerância de 10% pode apresentar valor medido real aceitável entre  $90\mu\text{H}$  e  $110\mu\text{H}$ .

**Resistência Ôhmica:** é a resistência imposta pelo condutor do enrolamento do indutor. É especificada para alimentação em corrente contínua e da ordem de alguns poucos ohms até centenas de ohms.

**Capacidade de Corrente:** a capacidade de corrente máxima que pode atravessar o indutor é função da bitola e das características do condutor utilizado. Quanto maior a bitola (seção transversal dada em  $\text{mm}^2$ ) maior a capacidade de corrente da bobina indutora.

**Tipos de Indutores Comerciais:** existem muitos tipos de indutores tais como axiais, radiais, toroidais, encapsulados e blindados. Geralmente os núcleos são de ferrite e em alguns casos de ferro. Os indutores variáveis são, geralmente, constituídos por um núcleo móvel, cuja posição pode ser alterada externamente. Quanto mais o núcleo penetra na bobina do indutor, maior é a sua indutância.

**Aplicações:** os indutores têm muitas aplicações entre elas circuitos de áudio, radiofrequência (RF), circuitos de acionamento e controle, sensores, etc.

Um indutor pode ter a indutância fixa ou variável. A figura 9.8 mostra um tipo de indutor com indutância variável através do movimento do núcleo rosqueável, que permite a variação da permeabilidade e, conseqüentemente, a variação da indutância. A figura 9.9 apresenta a aparência de alguns tipos de indutores.

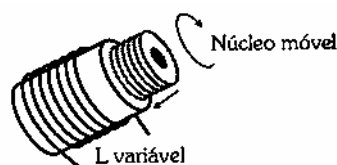
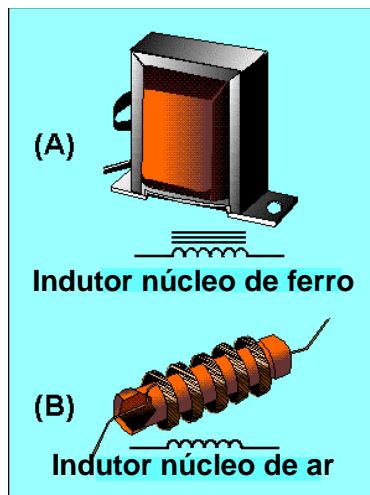
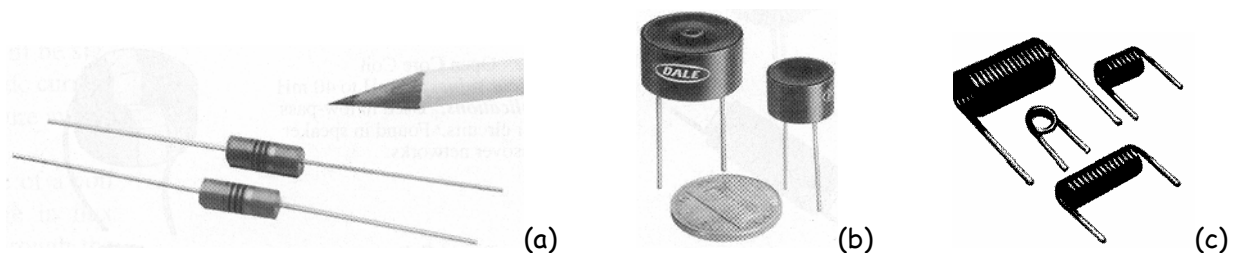


Figura 9.8 - Indutor variável (Fonte: Markus, 2001).

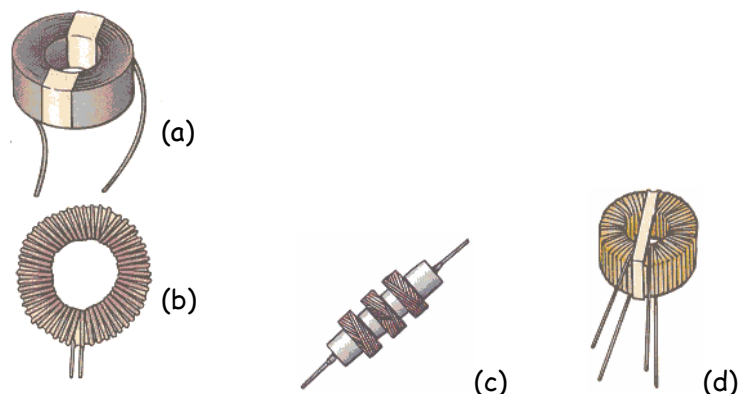


**Figura 9.9 - Indutores: (a) núcleo de ferro; (b) núcleo de ar**

A figura 9.10(a) mostra indutores moldados com terminais axiais, encontrados na faixa de  $0,1\mu\text{H}$  a  $10\mu\text{H}$ . Em 9.10(b) indutores toroidais para circuitos de filtro ( $40\mu\text{H}$  a  $5\text{H}$ ) e em 9.10(c) indutores com núcleo de ar, com 1 a 32 espiras, para aplicações em alta frequência. A figura 9.11(a) mostra indutores com núcleo de ar, encontrados na faixa de  $3\text{mH}$  a  $40\text{mH}$  e usados em filtros passa-baixas de acionamentos de alto-falantes de graves (*woofers* e *sub-woofers*). A figura 9.11(b) mostra indutores com núcleos magnéticos toroidais ( $1\text{mH}$  a  $30\text{mH}$ ) e muito usados em filtros de linha contra transitórios e interferências eletromagnéticas. A figura 9.11(c) mostra indutores tipo Choques de Rádio Frequência ( $10\mu\text{H}$  a  $50\mu\text{H}$ ) usados em rádios, televisões e circuitos de comunicações. A figura 9.11(d) mostra indutores usados em filtros de linha, carregadores de baterias, fontes chaveadas e outros equipamentos eletrônicos.



**Figura 9.10 - tipos de indutores: (a) moldados axiais; (b) toroidais encapsulados; (c) núcleos de ar (fonte: Boylestad)**



**Figura 9.11 - tipos comuns de indutores (fonte: Boylestad)**



*Figura 9.12 - aparência real de várias bobinas indutoras*

### 9.3. Associações de Indutores:

Os indutores podem ser associados em ligações série e em ligações em paralelo como mostra a figura 9.13. O valor da **Indutância Equivalente** pode ser determinado pelo mesmo raciocínio usado para associações de resistores.

A Indutância equivalente de uma associação série de  $n$  indutores é obtida pela somatória das  $i$ -ésimas indutâncias da associação:

$$\text{Série: } L_{EQ} = \sum_{i=1}^n L_i$$

Onde:

$L_{EQ}$  - Indutância equivalente da associação, [Henry, H];

$L_i$  -  $i$ -ésima indutância, [Henry, H];

$n$  - número de indutâncias da associação.

A Indutância equivalente de uma associação em paralelo de  $n$  indutores é obtida pelo inverso da somatória dos inversos das  $i$ -ésimas indutâncias da associação:

$$\text{Paralelo: } \frac{1}{L_{EQ}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{L_i} \right)$$

Onde:

$L_{EQ}$  - Indutância equivalente da associação, [Henry, H];

$L_i$  -  $i$ -ésima indutância, [Henry, H];

$n$  - número de indutâncias da associação.

O método para cálculo de associações mistas de indutores segue o mesmo procedimento utilizado para análise de associações mistas de resistores.

### Exemplo 9.2:

Determine a indutância equivalente de três indutores ligados em série e em paralelo como mostram as figuras 9.13(a) e 9.13(b). Seja  $L_1=60\ \mu\text{H}$ ,  $L_2=30\ \mu\text{H}$  e  $L_3=20\ \mu\text{H}$ .

$$\text{Série: } L_{\text{EQ}} = \sum_{i=1}^3 L_i = L_1 + L_2 + L_3 = 60 \cdot 10^{-6} + 30 \cdot 10^{-6} + 20 \cdot 10^{-6} = 110 \cdot 10^{-6} = 110\ \mu\text{H}$$

$$\text{Paralelo: } \frac{1}{L_{\text{EQ}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 L_i} = \frac{1}{60 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{30 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{20 \cdot 10^{-6}} = \frac{1+2+3}{60 \cdot 10^{-6}} = \frac{6}{60 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-6}}$$

$$L_{\text{EQ}} = 10\ \mu\text{H}$$

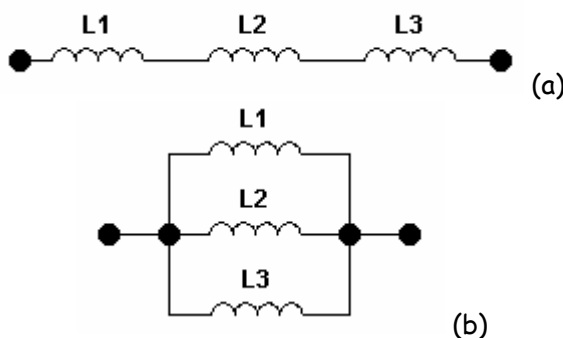


Figura 9.13 - Associação de Indutores: (a) em série; (b) em paralelo.

## 9.4. Teste de Indutores

Os principais motivos das falhas nos indutores são curtos-circuitos ocorridos entre os enrolamentos das bobinas e circuitos abertos devido a fatores como excessos de correntes, superaquecimentos e tempo de uso. As condições de circuito aberto podem ser facilmente detectadas com o uso de um Multímetro na função ohmímetro ou teste de continuidade. Se não houver continuidade ou se a resistência entre seus terminais for muito alta, o indutor está em aberto (pode haver uma interrupção no condutor). As condições de curto-circuito são mais difíceis de detectar porque a resistência de bons indutores é relativamente baixa e o curto entre algumas bobinas não afetarão significativamente a resistência série total. Se soubermos a resistência série da bobina e esta for muito diferente da medida podemos concluir que há curto-circuito.

Um curto-circuito entre as bobinas e o núcleo pode ser detectado verificando-se, com o multímetro, se há continuidade (baixa resistência) entre um terminal do indutor e o núcleo, se este for de material condutivo.

A indutância nominal de um indutor pode ser verificada com um equipamento chamado Ponte RLC, que é capaz de medir indutâncias, capacitâncias e resistências.

## 9.5. Projeto Simplificado de Indutores

O projeto detalhado de um indutor não é uma tarefa simples pois exige uma série de análises, muitas delas empíricas.

A equação para a determinação da indutância de **bobinas longas (solenóides)**, estudada anteriormente, pode ser usada para se projetar um indutor simples, com aceitável precisão:

$$L = \frac{\mu \cdot N^2 \cdot A}{\ell}$$

Isolando o número de espiras obtemos:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot \ell}{\mu \cdot A}}$$

Onde:

N - número de espiras da bobina indutora

L - Indutância da bobina indutora, [Henry, H];

A - área das espiras da bobina (área do núcleo), [metro quadrado, m<sup>2</sup>];

$\ell$  - comprimento longitudinal da bobina, [metro, m];

$\mu$  - permeabilidade magnética do meio no núcleo da bobina [Henry por metro, H/m];

Se as espiras forem justapostas, o comprimento longitudinal  $\ell$  da bobina pode ser dado por:

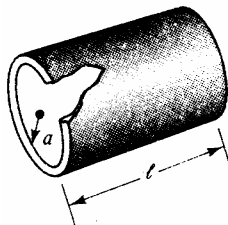
$$\ell = N \cdot d$$

onde:

$\ell$  - comprimento longitudinal da bobina [metro, m];

N - número de espiras do indutor;

d - diâmetro da seção transversal do condutor [metro, m].



*Figura 9.14 - Bobina de camada única com núcleo de ar. (Fonte: Edminister)*

Para bobinas indutoras de camada única com núcleo de ar, como a indicada na figura 9.14, uma equação empírica apresentada por Edminister e que apresenta boa aproximação:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot (9 \cdot a + 10 \cdot \ell)}{39,5 \cdot a^2}}$$

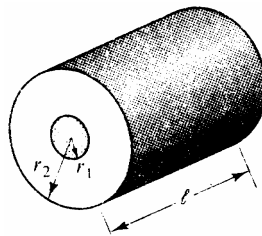
onde:

N - número de espiras da bobina indutora;

L - indutância desejada para o indutor, [Micro Henry,  $\mu\text{H}$ ];

$\ell$  - comprimento logitudinal da bobina [metro, m];

a - raio do núcleo (raio das espiras), [metro, m]



*Figura 9.15 - Bobina de diversas camadas com núcleo de ar. (Fonte: Edminister)*

Para bobinas de várias camadas com núcleo de ar, como indica a figura 9.15, uma equação empírica de boa aproximação também é apresentada por Edminister:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot (6r_1 + 9\ell + 10(r_2 - r_1))}{31,6 \cdot r_1^2}}$$

onde:

N - número de espiras da bobina indutora;  
 L - indutância desejada para o indutor, [Micro Henry,  $\mu\text{H}$ ];  
 $\ell$  - comprimento logitudinal da bobina, [metro, m];  
 $r_1$  - raio interno da bobina (raio das espiras interiores), [metro, m];  
 $r_2$  - raio externo da bobina (raio das espiras exteriores), [metro, m].

**Observação:** Estas equações são válidas para as bobinas que sejam pequenas (na faixa de alguns mH ou  $\mu\text{H}$ ) e que o seu comprimento não exceda o dobro do seu diâmetro. Nesses limites as equações apresentam boa precisão.

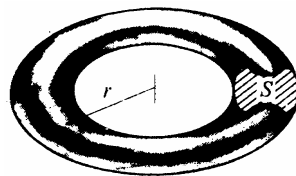


Figura 9.16 - Bobina Toroidal com seção transversal circular. (Fonte: Edminister)

Para **núcleos toroidais**, com seção transversal circular, como o da figura 9.16, podemos entender o indutor como uma bobina longa (solenóide) e, portanto, podemos utilizar a mesma equação:

$$N = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L}{\mu \cdot A}}$$

onde:

N - número de espiras da bobina indutora;  
 L - indutância desejada para o indutor, [Henry, H];  
 r - raio médio do toroide<sup>17</sup>, [metro, m];  
 $\mu$  - permeabilidade magnética do material do núcleo, [Henry por metro, H/m];  
 A - área da seção transversal do núcleo toroide (área das espiras da bobina), [metro quadrado,  $\text{m}^2$ ]

### Exemplo 9.3:

Determinar o número de espiras de uma bobina indutora de  $50\mu\text{H}$ , núcleo de ar e enrolada sobre um molde cuja área transversal é  $4\text{cm}^2$  e comprimento longitudinal de 5cm. Se for incluído um núcleo de material magnético cuja  $\mu_R = 5000$ , qual será o valor resultante para a indutância dessa bobina. Substituindo na equação:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot \ell}{\mu \cdot A}} = \sqrt{\frac{50 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}} = 70,5 \text{ espiras}$$

Como  $\mu_{\text{mat}} = \mu_R \cdot \mu_0 = 5000 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} = 6,28 \cdot 10^{-3}$  e substituindo na equação:

$$L = \frac{N^2 \cdot \mu \cdot A}{\ell} = \frac{(70,5)^2 \cdot 6,28 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-2}} = 250 \text{ mH}$$

Podemos concluir que  $L_{\text{mat}} = \mu_R \cdot L_0 = 5000 \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 250\text{mH}$ .

### Exemplo 9.4:

Projetar uma bobina indutora de  $100\mu\text{H}$  para 100mA, com núcleo de ar de diâmetro  $2a=1\text{cm}$  e uma única camada.

Dados: densidade de corrente para indutores:  $J=420\text{A}/\text{cm}^2$

Para determinarmos a bitola do condutor a ser usado, sabemos que  $J = \frac{I}{A}$ , então:

<sup>17</sup>O raio médio do toróide já foi estudado anteriormente, no item sobre densidade de campo magnético em toróides

$$A = \frac{I}{J} = \frac{0,1}{420} = 0,000238\text{cm}^2$$

Analisando uma tabela de condutores podemos escolher o fio de cobre esmaltado 33AWG, pois sua área nominal é ligeiramente superior ao valor necessário calculado. Assim:

- área do cobre:  $0,000254\text{cm}^2$ ;
- diâmetro do condutor com isolamento:  $0,022\text{cm}$
- resistência (a  $100^\circ\text{C}$ ):  $0,009070\Omega/\text{cm}$
- capacidade de corrente:  $0,114\text{A}$  para densidade de  $450\text{A}/\text{cm}^2$

Determinação do número de espiras e do comprimento da bobina: na equação para determinação do número de espiras, isolando  $L$  e substituindo os valores, temos:

$$N = \sqrt{\frac{L \cdot (9 \cdot a + 10 \cdot \ell)}{39,5 \cdot a^2}}$$

$$L = \frac{39,5 \cdot N^2 \cdot a^2}{9 \cdot a + 10 \cdot \ell}$$

operando-se a equação:

$$L \cdot 9 \cdot a + L \cdot 10 \cdot \ell = 39,5 \cdot N^2 \cdot a^2$$

o comprimento da bobina pode ser dado pelo produto do número de espiras pelo diâmetro do condutor:

$$\ell = N \cdot d = N \cdot 0,022 \cdot 10^{-2}$$

assim:

$$L \cdot 9 \cdot a + L \cdot 10 \cdot N \cdot 0,022 \cdot 10^{-2} = 39,5 \cdot N^2 \cdot a^2$$

substituindo-se  $L=100$  (devemos lembrar que a equação fornece  $L$  em  $\mu\text{H}$ ) e  $a=0,5 \times 10^{-2}\text{m}$ , tem-se:

$$4,5 + 0,22 \cdot N = 987,5 \cdot 10^{-6} \cdot N^2$$

dividindo-se a equação por  $987,5 \times 10^{-6}$ , tem-se:

$$N^2 - 222,8 \cdot N - 4557 = 0$$

resolvendo-se esta equação de segundo grau, obtém-se  $N = 241,7$  e  $N = -18,9$ . Assim:

$$N = 242 \text{ espiras}$$

$$\ell = 5,3 \text{ cm}$$

Para determinar-se a quantidade do fio de cobre esmaltado AWG 33 necessária  $Q_F$ , determina-se o comprimento de condutor necessário para uma espira:

$$d = 2 \cdot \pi \cdot a = 2 \cdot \pi \cdot 0,5 = 3,14\text{cm}$$

como são 242 espiras, tem-se:

$$Q_F = N \cdot d = 242 \cdot 3,14 = 7,6\text{m}$$

A resistência série da bobina indutora (a  $100^\circ\text{C}$ ) pode ser determinada por:

$$R_S = \frac{\Omega}{\text{m}} \cdot Q_F = 0,9070 \cdot 7,6 = 6,9 \Omega$$

## 10. Transitório de Carga e Descarga de um Indutor

Seja o circuito da figura 10.1(a), onde uma bobina indutora ideal (resistência elétrica do condutor considerada nula) é alimentada através de uma fonte de tensão contínua e constante  $V_{cc}$  em série com uma resistência  $R$  limitadora da corrente do circuito. O circuito pode ser acionado por uma chave interruptora de duas posições.



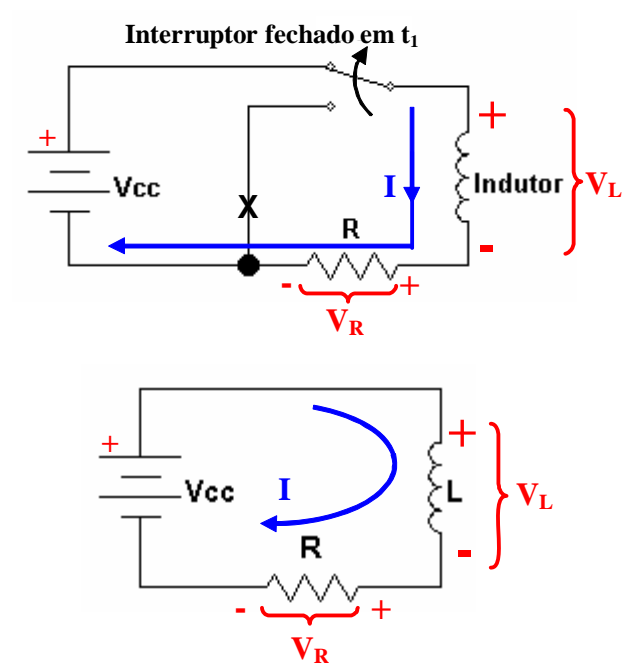
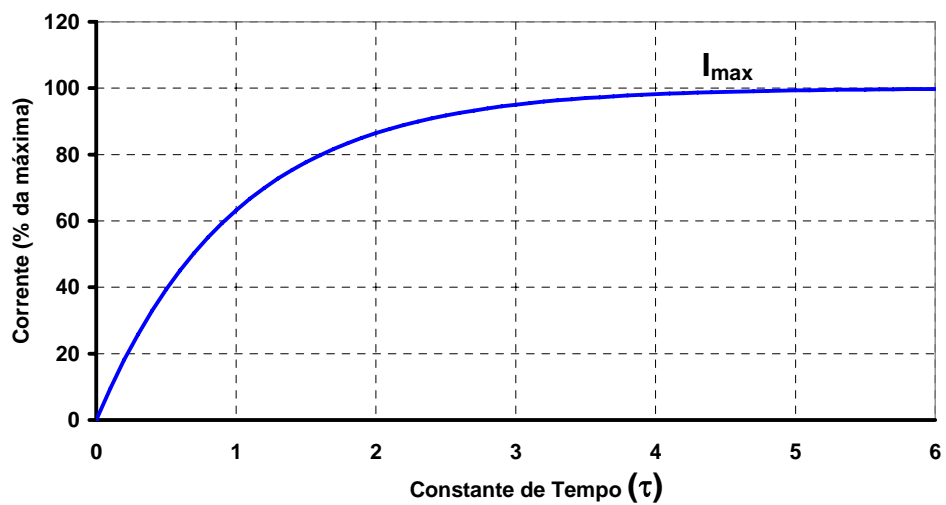


Figura 10.1 - Circuito para análise do transitório de carga do indutor: (a) completo (b) simplificado.

#### Corrente no Indutor - CARGA



### Tensão no Indutor - CARGA

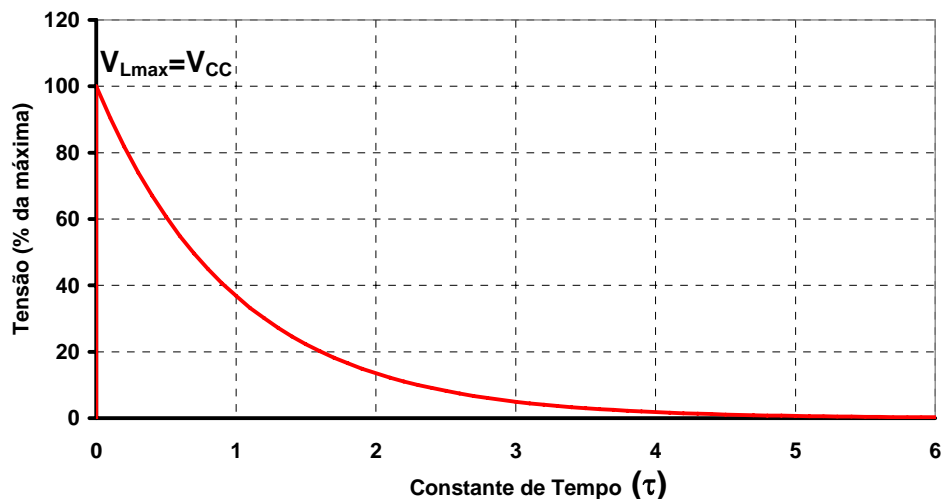


Figura 10.2 - Comportamento do transitório de carga do indutor: (a) corrente no indutor; (b) tensão no indutor.

#### 10.1. Comportamento Transitório de Carga

Quando a chave interruptora é colocada na posição indicada na figura 10.1(a), exatamente no instante de tempo inicial, o circuito é então fechado e a corrente que era nula ( $I=0$ ) passa a aumentar, gradativamente, devido à fonte de tensão  $V_{CC}$ , como mostra a figura 10.1(b). A figura 10.2(a) mostra o comportamento para a corrente no indutor ao longo do tempo. A corrente aumentando no indutor produz um fluxo magnético variável crescente que, por sua vez, auto-induz uma tensão  $V_L$  no indutor que se opõe à circulação da corrente (Lei de Lenz), como mostra a figura 10.2(b). É devido a essa oposição que a corrente não cresce instantaneamente e demora um certo tempo para atingir o seu valor máximo. Este é o chamado comportamento **transitório de carga** do indutor, pois durante este intervalo de tempo ele armazena energia no campo magnético provocado pela corrente.

**O valor máximo da corrente é função da tensão aplicada  $V_{CC}$  e da resistência limitadora  $R$ .**

A partir do instante em que a corrente se estabiliza (fica constante), o fluxo magnético no indutor torna-se constante e a tensão auto-induzida nos terminais do indutor torna-se nula. Esse comportamento é chamado de **regime permanente**. O indutor mantém energia armazenada no campo magnético produzido pela corrente. Nessa condição, o indutor comporta-se como um **curto-circuito** permitindo a livre passagem da corrente, pois não há mais tensão induzida entre seus terminais.

#### 10.2. Comportamento Transitório de Descarga:

No exato instante em que a chave interruptora é colocada na posição de descarga, como mostra a figura 10.3(a), a corrente no indutor era mantida pela fonte de tensão e estava estabilizada (constante) num dado valor máximo ( $I_{máx}$ ). A partir desse instante a fonte de tensão é desconectada do circuito, como mostra a figura 10.3(b) e a corrente passa a diminuir gradativamente, provocando nova variação (diminuição) no fluxo magnético na bobina. A figura 10.4(a) mostra o comportamento para a variação da corrente. Esta variação de fluxo provoca nova indução de tensão no indutor, agora com polaridade contrária à anterior, pois essa tensão auto-induzida opõe-se à diminuição da corrente, tentando manter o fluxo constante (Lei de Lenz), como mostra a figura 10.4(b). A corrente leva, portanto, um certo tempo para se esgotar. Esse tempo é chamado de comportamento **transitório de descarga**. O indutor é capaz de fornecer corrente para o circuito, mesmo após a fonte de alimentação ser desconectada, porque há energia armazenada no campo magnético.

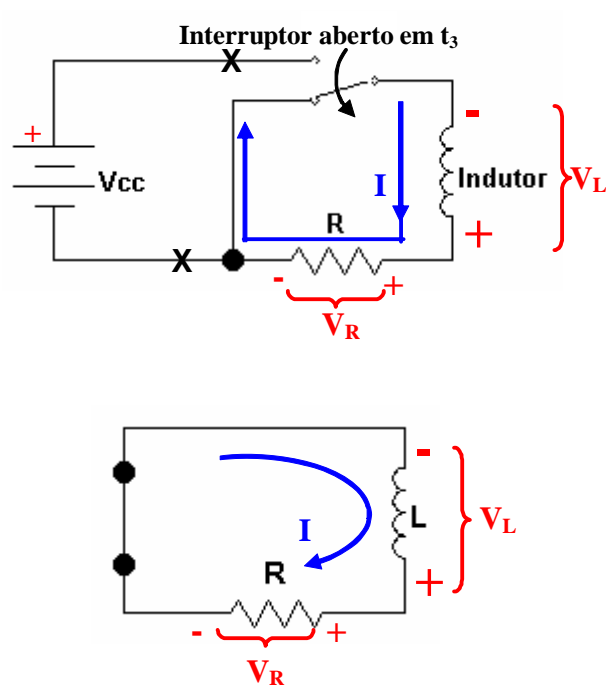
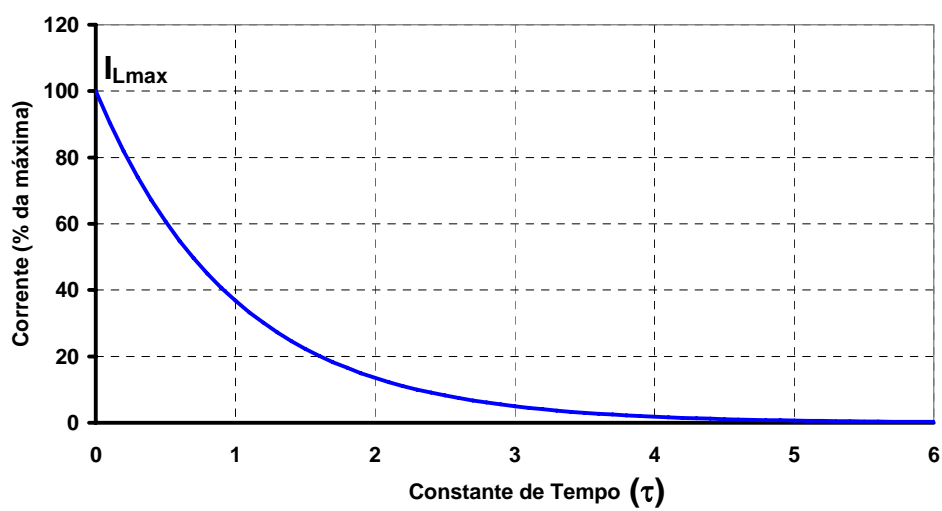
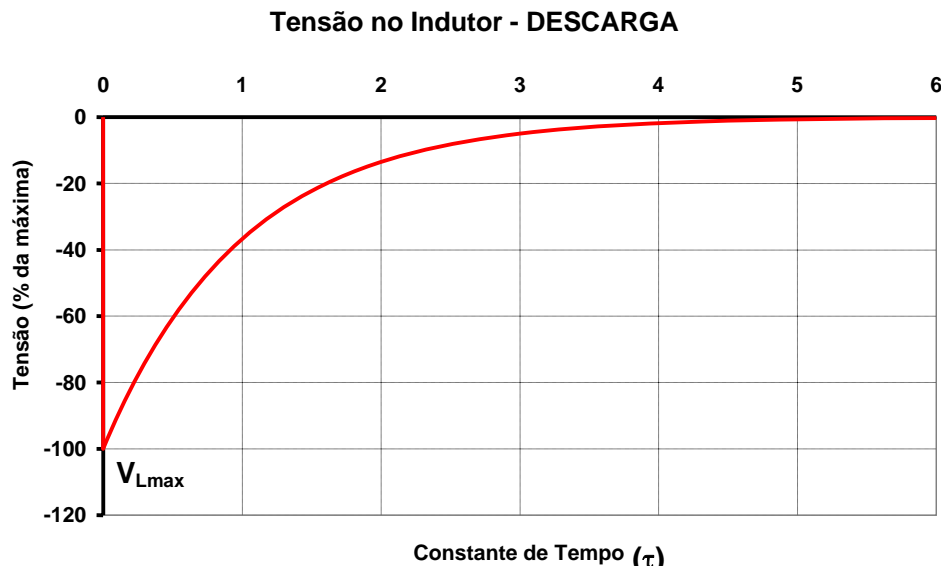


Figura 10.3 - Circuito para análise do transitório de descarga do indutor: (a) completo (b) simplificado.

#### Corrente no Indutor - DESCARGA





*Figura 10.4 - Comportamento do transitório de descarga do indutor: (a) corrente no indutor; (b) tensão no indutor.*

### 10.3. Conclusões Importantes:

- Nos **instante inicial do processo transitório de carga**, como mostra a figura 10.2(a) e 10.2(b), a tensão induzida é máxima e a corrente é nula no indutor. A tensão induzida impede temporariamente a circulação da corrente no circuito. Há tensão mas não há corrente no indutor, como podemos observar pelos gráficos da figura 10.2. Portanto, um indutor ideal comporta-se como um **circuito aberto** no momento exato em que é conectado a uma fonte de tensão. A figura 10.5 ilustra esse comportamento.
- Com a corrente estabilizada, no chamado **Regime Permanente** de carga, não há mais tensão induzida nos terminais do indutor. Há corrente mas não há tensão no indutor, como podemos observar pelos gráficos da figura 10.2. Portanto, um indutor ideal comporta-se como um **curto-circuito** no regime permanente. A figura 10.6 ilustra esse comportamento.
- Com o indutor carregado, nos **instantes iniciais da descarga**, há tensão induzida e a corrente tende a ser mantida, como mostra os gráficos da figura 10.4. Portanto, o indutor funciona, temporariamente, como uma **fonte de corrente**. Isto ocorre porque o indutor armazena energia no campo magnético na forma de corrente.
- O indutor se opõe a qualquer variação de corrente no circuito (**Lei de Lenz**); A corrente não pode variar instantaneamente num circuito indutivo, porém a tensão pode sofrer variações instantâneas.
- Como num indutor a corrente leva um certo tempo para aumentar ou para diminuir: dizemos que **um indutor atrasa a corrente**.
- Quanto maior a indutância maior o tempo de subida e de decaimento da corrente no comportamento transitório de carga e descarga do indutor.
- Quando a chave interruptora abre o circuito, no processo de descarga, a tensão induzida no indutor  $V_L$  soma-se com a da fonte  $V_{cc}$ . Sobre os terminais da chave interruptora forma-se uma **sobretensão** ( $V_{cc}+V_L$ ), como mostra a figura 10.7. Se estas tensões forem suficientemente altas poderá formar-se um **arco voltaico** (faísca) na chave. Estas tensões podem ser perigosas para o operador. O arco voltaico ao longo do tempo poderá carbonizar os contatos da chave, danificando-a. Este fenômeno também tem aplicações práticas úteis, como nas velas de ignição dos motores de combustão, nos reatores de descarga das lâmpadas fluorescentes, em fornos de siderúrgicas, acendedores de fogões, etc.

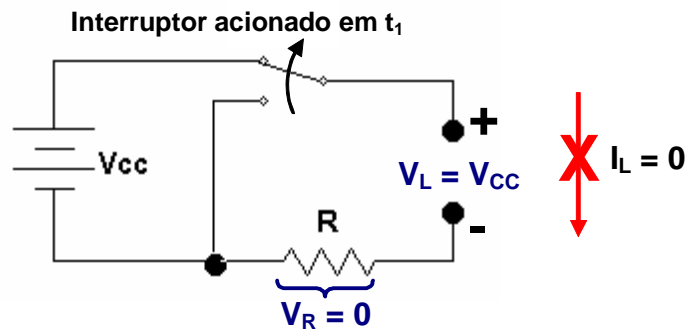


Figura 10.5 - Instante inicial do transitório de carga: indutor ideal é um circuito aberto.

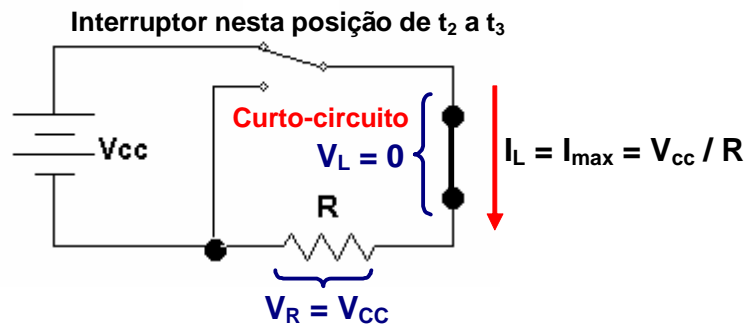


Figura 10.6 - Regime permanente em corrente contínua: indutor ideal é um curto-circuito.

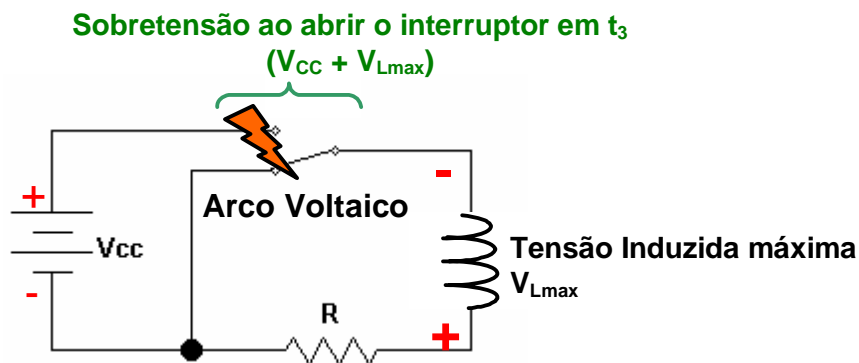


Figura 10.7 - Produção de Arco Voltaico no instante de abertura de um circuito indutivo.

A figura 10.8 resume todo o comportamento transitório de carga e descarga e o regime permanente do indutor. O leitor deve fazer a análise para cada instante.

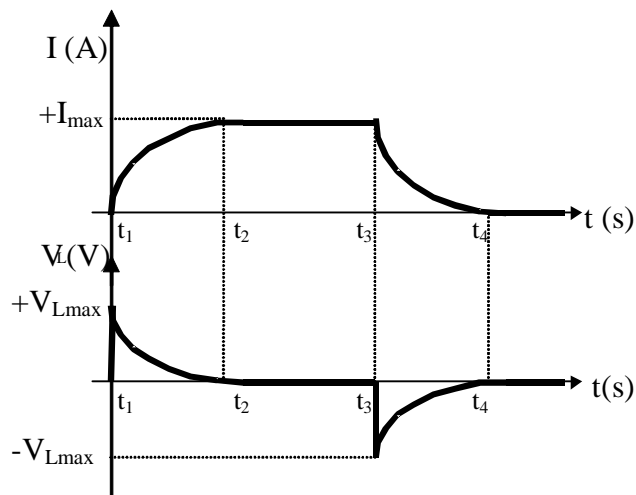


Figura 10.8 - Comportamento transitório e permanente da corrente e da tensão no indutor, para o circuito das figuras 10.1 e 10.3.

## 11. Análise Matemática do Transitório do Indutor:

### 11.1. Equações do Transitório de Carga do Indutor

Sabemos que a tensão instantânea auto-induzida no indutor depende da sua indutância e da taxa de variação da sua corrente no tempo:

$$v_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}$$

**Observação:** para facilitar a notação omitiremos o sinal negativo da equação da tensão, pois sabemos que a tensão induzida tem uma polaridade que se opõe à variação do fluxo magnético indutor.

Operando matematicamente:

$$di_L = \frac{v_L \cdot dt}{L}$$

Usando o processo matemático de integração nesta equação podemos obter para a corrente:

$$\int di_L = \int \left( \frac{v_L \cdot dt}{L} \right)$$

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t v_L \cdot dt + i_{L0}$$

Onde:

$i_L$  - corrente no indutor, [Ampère, A]

$v_L$  - tensão (fem) auto-induzida no indutor, [Volt, V];

$L$  - indutância, [Henry, H];

$i_{L0}$  - corrente inicial no indutor no instante  $t=0$ , [Ampère, A];

$t$  - instante de tempo, [segundo, s]

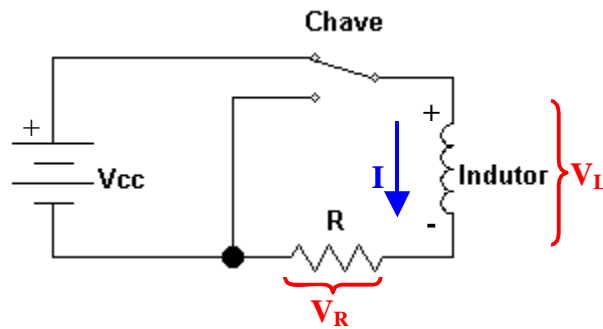


Figura 11.1 - Circuito para análise do transitório de carga do indutor.

Analisando a malha do circuito de carga do indutor na figura 11.1, pela **Lei das Tensões de Kirchhoff (Lei das Malhas)**, a equação do **circuito de carga** é dada por:

$$v_L(t) + v_R(t) = V_{CC}$$

A corrente que circula durante a carga é a mesma corrente no resistor em série e é dada por:

$$i(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$

$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

Substituindo, temos uma equação diferencial de 1ª ordem não homogênea:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = V_{CC}$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} = V_{CC} - R \cdot i(t)$$

$$\frac{di(t)}{V_{CC} - R \cdot i(t)} = \frac{dt}{L}$$

Sabemos que no instante inicial da carga, em  $t=0$ , a corrente é nula:  $i(t)=i(0)=0$ . Decorrido um tempo  $t$  a corrente assume um valor  $i(t)=I$ . Aplicando integração nestes intervalos nos termos da equação diferencial, temos:

$$\int_{0}^I \frac{di(t)}{V_{CC} - R \cdot i(t)} = \int_0^t \frac{dt}{L}$$

$$-\frac{1}{R} \cdot \ln\left(\frac{V_{CC} - R \cdot i(t)}{V_{CC}}\right) = \frac{t}{L}$$

resolvendo para a corrente  $i(t)$ :

$$i(t) = \frac{V_{CC}}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R \cdot t}{L}}\right)$$

Resolvendo a equação diferencial de 1ª ordem não homogênea temos, portanto, para a **corrente no indutor** durante o transitório de carga do indutor:

$$i_L(t) = I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-t \cdot \frac{R}{L}}\right)$$

Na equação acima a **corrente máxima** é a corrente do circuito da figura 11.1 em regime permanente, ou seja, passado o transitório de carga, quando o indutor se comporta como um curto-circuito. Assim:

$$I_{\max} = \frac{V_{CC}}{R}$$



Uma **constante de tempo**  $\tau$  é definida pela relação:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Assim, a equação para a **corrente no indutor** durante o transitório de carga pode ser reescrita da seguinte forma

$$i_L(t) = I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

onde:

$i_L(t)$  - corrente instantânea no indutor, [Ampère, A];

$I_{\max}$  - máxima corrente em regime permanente, [Ampère, A];

$t$  - instante de tempo, [segundo, s]

$\tau$  - constante de tempo [segundo, s]

Como o resistor está em série com o indutor, a corrente no resistor é a mesma do indutor. Então:

$$i_R(t) = i_L(t) = I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

No resistor a tensão é dada pela Lei de Ohm. A tensão no resistor sempre acompanha a corrente, e pode ser dada pela expressão:

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$v_R(t) = R \cdot I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$v_R(t) = V_{CC} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Pela lei das tensões de Kirchhoff (Lei das Malhas):

$$V_{CC} - v_L(t) - v_R(t) = 0$$

A tensão no indutor pode ser dada pela subtração entre a tensão da fonte e a tensão no resistor, assim:

$$v_L(t) = V_{CC} - v_R(t) = V_{CC} - \left[V_{CC} \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right] = V_{CC} - V_{CC} + V_{CC} \cdot e^{-t/\tau}$$

resultando na expressão para a tensão no indutor durante o transitório de carga:

$$v_L(t) = V_{CC} \cdot e^{-t/\tau}$$

Fazendo  $t=\tau$  temos:

$$i_R(\tau) = i_L(\tau) = I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-\tau/\tau}\right) = I_{\max} \cdot \left(1 - e^{-1}\right) = I_{\max} \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

$$i_R(\tau) = i_L(\tau) = 0,63 \cdot I_{\max}$$

Portanto, para o processo de carga, no instante  $t=\tau$  a corrente no circuito cresce até 63% do valor máximo, a tensão no resistor cresce até 63% da tensão da fonte e a tensão no indutor cai 63% da tensão da fonte.

Se o circuito apresentar condições iniciais, como mostra a figura 11.2, a equação da corrente fica:

$$i_L(t) = I_i + (I_f - I_i) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

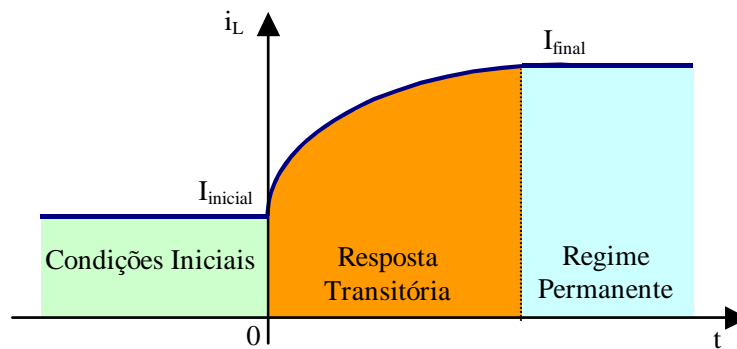


Figura 11.2 - Três fases da resposta de um indutor.

### Exemplo 11.1:

Seja o circuito de carga e descarga do indutor de 10H da figura 11.3. Determine as expressões matemáticas para o comportamento transitório da tensão e da corrente de carga no indutor. Determine o valor da corrente e da tensão no indutor no instante de tempo 4ms após a chave ter sido fechada em  $t=0s$ .

- Determinação da constante de tempo de carga:

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{10}{5000} = 2ms$$

- Determinação da corrente máxima:

$$I_{max} = \frac{V_{CC}}{R} = \frac{20}{5000} = 4mA$$

- Expressão da corrente de carga:

$$i_L(t) = I_{max} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,002}}\right)$$

- Expressão da tensão de carga:

$$v_L(t) = V_{CC} \cdot e^{-t/\tau} = 20 \cdot e^{-\frac{t}{0,002}}$$

- Corrente no indutor em  $t=4ms$ :

$$i_L(t) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{0,002}}\right) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot \left(1 - e^{-\frac{0,004}{0,002}}\right) = 3,46mA$$

Esta corrente de 3,46mA em  $t=4ms$  corresponde a 86,5% do valor máximo de 4mA.

- Tensão no indutor em  $t=4ms$ :

$$v_L(t) = 20 \cdot e^{-\frac{t}{0,002}} = 20 \cdot e^{-\frac{0,004}{0,002}} = 2,71V$$

Esta tensão de 2,71V em  $t=4ms$  corresponde a 13,5% do valor máximo de 20V.

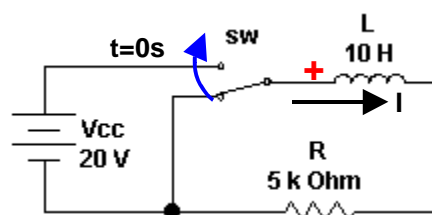


Figura 11.3 - circuito de carga para o exemplo 11.1

## 11.2. Equações do Transitório de Descarga do Indutor

Analisando o circuito da figura 11.4, para malha do circuito de **descarga do indutor** temos as seguintes expressões, segundo a Lei das Tensões de Kirchhoff:

$$v_L(t) - v_R(t) = 0$$

substituindo, temos uma equação diferencial de 1ª ordem homogênea:

$$-L \cdot \frac{di(t)}{dt} - R \cdot i(t) = 0$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -R \cdot i(t)$$

Sabemos que, para o circuito da figura 11.4,  $i(t)=I_{\max}$  no instante  $t=0$ , condição do início da descarga, quando a chave é acionada, como mostra a figura 10.2. Após um intervalo de tempo  $t$ , a corrente assume um valor  $i(t)=I$ . Aplicando integração nestes intervalos nos termos da equação diferencial, temos:

$$\int_{I_{\max}}^I L \cdot \frac{di(t)}{dt} = - \int_0^t R \cdot i(t)$$

$$\int_{I_{\max}}^I \frac{di(t)}{i(t)} = - \frac{R}{L} \cdot \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_{\max}}\right) = - \frac{R}{L} \cdot t$$

$$\left(\frac{I}{I_{\max}}\right) = e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

$$I = I_{\max} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = i(t)$$

Resolvendo a equação diferencial de primeira ordem homogênea temos, portanto, para a **corrente instantânea no indutor** durante a descarga:

$$i_L(t) = I_{\max} \cdot e^{-t/\tau'}$$

**Observação:** A constante  $\tau'$  é a constante de tempo de descarga e pode ser dada pela relação entre indutância e a resistência total no circuito de descarga:

$$\tau' = \frac{L}{R_{\text{desc}}}$$

Analisando o circuito de descarga verificamos:

$$i_R(t) = i_L(t)$$

Então a **tensão no resistor** pode ser dada por:

$$v_R(t) = R \cdot I_{\max} \cdot e^{-t/\tau'} = V_{CC} \cdot e^{-t/\tau'}$$

Como  $v_L(t) = v_R(t)$  a **tensão no indutor** durante a descarga pode ser dada pela expressão:

$$v_L(t) = -V_{CC} \cdot e^{-t/\tau'}$$

Para o processo de descarga, no instante  $t=\tau'$ , a corrente no circuito cai 63% do valor máximo, a tensão no resistor cai 63% da tensão da fonte e a tensão no indutor cai 63% da tensão da fonte com polaridade invertida.

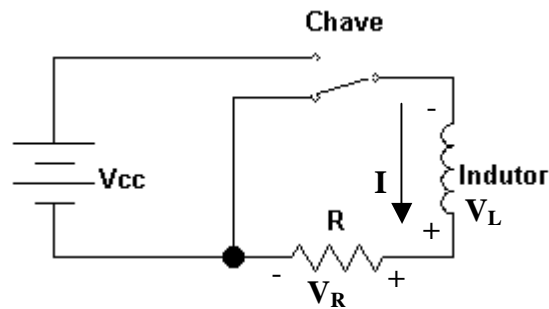


Figura 11.4 - Circuito para análise do transitório de descarga do indutor.

### Exemplo 11.2:

Considere que a chave do circuito do exemplo 11.1 seja aberta após 20ms do início do processo de carga, como demonstra a figura 11.5. Determine o valor da corrente e da tensão no indutor no instante  $t=26\text{ms}$ .

- Determinação da constante de tempo de descarga:

$$\tau' = \frac{L}{R} = \frac{10}{5000} = 2\text{ms}$$

- Determinação da corrente máxima no início da descarga:

$$I_{\text{max}} = \frac{V_{\text{CC}}}{R} = \frac{20}{5000} = 4\text{mA}$$

- Expressão da corrente de descarga:

$$i_L(t) = I_{\text{max}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}} = 4 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{t}{0,002}}$$

- Expressão da tensão de descarga:

$$v_L(t) = -V_{\text{CC}} \cdot e^{-\frac{t}{\tau'}} = -20 \cdot e^{-\frac{t}{0,002}}$$

- Corrente no indutor em  $t=26\text{ms}$ :

Como o interruptor é acionado no instante  $t=20\text{ms}$ , a corrente deve ser calculada para 6ms após o início do processo de descarga. Assim:

$$i_L(t) = 4 \cdot 10^{-3} \cdot e^{-\frac{0,006}{0,002}} = 0,2\text{mA}$$

Esta corrente de 0,2mA em  $t=26\text{ms}$  corresponde a 5% do valor máximo de 4mA.

- Tensão no indutor em  $t=26\text{ms}$ , 6ms após início da descarga:

$$v_L(t) = -20 \cdot e^{-\frac{0,006}{0,002}} = -1\text{V}$$

Esta tensão de -1V em  $t=26\text{ms}$  corresponde a 5% do valor máximo de 20V. O valor negativo significa que a tensão apresenta polaridade contrária àquela do processo de carga, como mostra a figura 10.8.

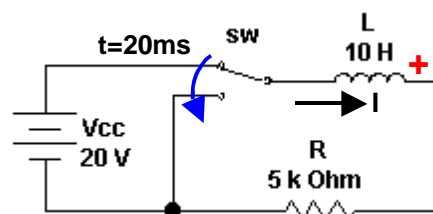


Figura 11.5 - circuito de descarga para o exemplo 11.2

**Desafio Proposto:** através de simulação eletrônica, obtenha as formas de onda de tensão e corrente para carga e descarga do indutor para o exemplo 11.1 e 11.2.

### 11.3. Constante de Tempo

O transitório de carga e descarga de um indutor não é instantâneo, porém é bastante rápido. Este tempo depende da indutância  $L$  do indutor e da resistência  $R$  limitadora da corrente no circuito. A constante de tempo será dada por:

$$\tau = \frac{L}{R}$$

Onde:

$\tau$  - constante de tempo do circuito, em segundos (s)

$L$  - indutância, em Henrys (H).

$R$  - resistência da malha em análise, em Ohms ( $\Omega$ ).

**Observação:** para a descarga usamos  $\tau'$  pois as constantes de tempo podem ser diferentes.

Podemos provar que a constante de tempo é dada em segundos, pois:

$$v_L = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

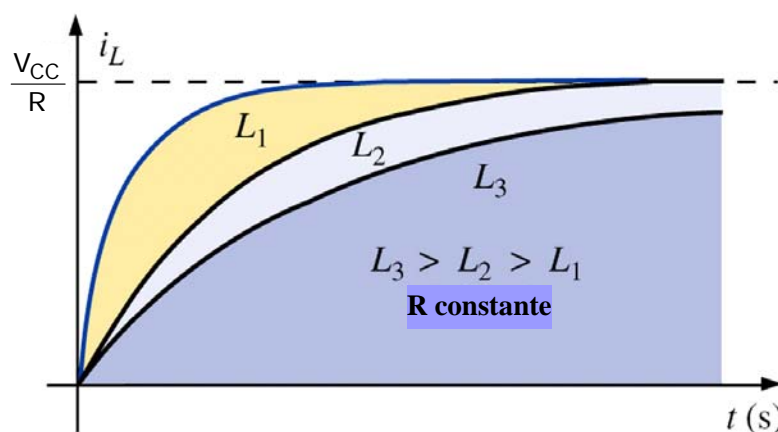
assim

$$L = \frac{v_L}{\frac{dI}{dt}}$$

como

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\frac{v_L}{\frac{dI}{dt}}}{R} = \frac{v_L}{\frac{dI}{dt} \cdot R} \Rightarrow \frac{V}{\frac{A \cdot \Omega}{s}} = \frac{V}{V} \cdot s = s$$

A figura 11.6 indica como a indutância pode influenciar no transitório da corrente de carga do indutor.



**Figura 11.6 - Efeito da indutância no transitório da corrente de carga.** (Fonte: Boylestad, 2003)

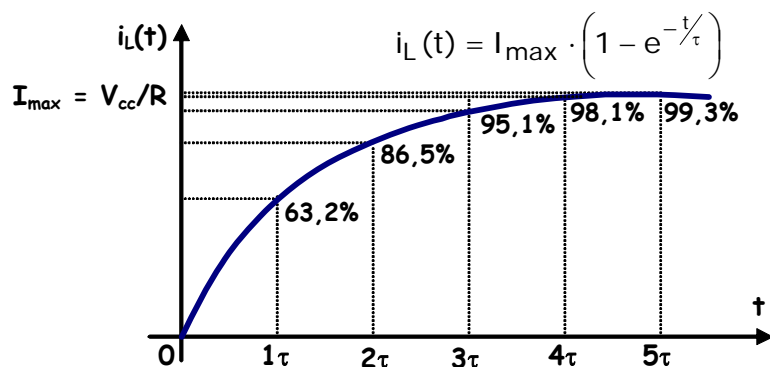


Figura 11.7 - Forma de onda exponencial para o comportamento da corrente durante a carga do indutor.

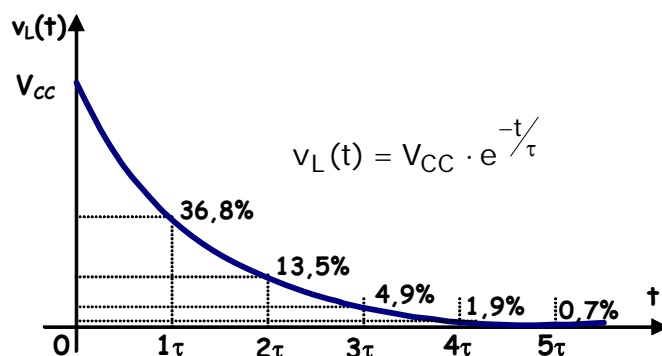


Figura 11.8 - Forma de onda exponencial para o comportamento da tensão durante a carga do indutor.

No **transitório de carga**, decorrido o tempo correspondente ao valor de  $1\tau$  a corrente terá atingido o valor de 63,2% do seu valor máximo. Após o tempo correspondente ao valor de  $5\tau$  a corrente terá atingido o valor de 99,3% do seu valor máximo.

**Após cinco constantes de tempo ( $5\tau$ ) consideramos o circuito em regime permanente.**

A figura 11.7 ilustra esse comportamento. Podemos notar o mesmo comportamento para o decaimento da tensão, como mostra a figura 11.8. Após o tempo correspondente ao valor de  $1\tau$  a tensão terá decaído 63,2%. Após  $5\tau$  a tensão terá decaído 99,3% e será considerada praticamente nula no regime permanente.

#### 11.4. Comportamento do Indutor em Corrente Contínua:

Em corrente contínua constante, após o transitório, não há variação de campo magnético e, portanto, não há tensão auto-induzida. Como há corrente, mas não há tensão entre os seus terminais, o indutor comporta-se como um **curto-circuito**. Nesta condição o indutor está carregado ou seja, há energia armazenada no campo magnético criado pela corrente.

Se a resistência do condutor não for desprezível uma pequena queda de tensão será verificada entre os terminais do indutor em regime permanente.

#### 11.5. Energia Armazenada no Campo Magnético

Como pudemos perceber, o indutor é capaz de manter uma corrente no circuito durante um certo tempo, mesmo depois da fonte de tensão ter sido desconectada. Essa corrente que o indutor fornece é provida pela energia que está armazenada no campo magnético da bobina. A quantidade de energia armazenada é função da indutância (características construtivas do indutor) e da corrente que o mantém carregado. Sabemos que a potência elétrica no indutor pode ser dada por:

$$P = I \cdot V = I \cdot \left( L \cdot \frac{dI}{dt} \right)$$

O sinal negativo da tensão no indutor foi suprimido porque a energia fornecida se opõe à tensão induzida. Assim, o incremento de energia no indutor pode ser dado pelo produto da potência pelo incremento de tempo:

$$d\omega = P \cdot dt = I \cdot \left( L \cdot \frac{dI}{dt} \right) \cdot dt$$

$$d\omega = L \cdot I \cdot dI$$

$$\omega = \int_0^I L \cdot I \cdot dI = L \cdot \int_0^I I \cdot dI$$

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 = E_n$$

Como a energia absorvida na carga de um indutor ideal ( $R=0$ ) é igual à energia devolvida na descarga, temos:

$$E_n = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$$

Onde:

$E_n$  - energia armazenada no campo magnético do indutor, [Joule, J];

$L$  - indutância da bobina indutora, [Henry, H].

$I$  - intensidade da corrente elétrica na bobina, [Ampère, A].

A figura 11.9 mostra o comportamento instantâneo da potência no indutor. A área sob a curva da potência é a energia armazenada no indutor durante o processo de carga. Toda essa energia deverá ser evacuada no processo de descarga.

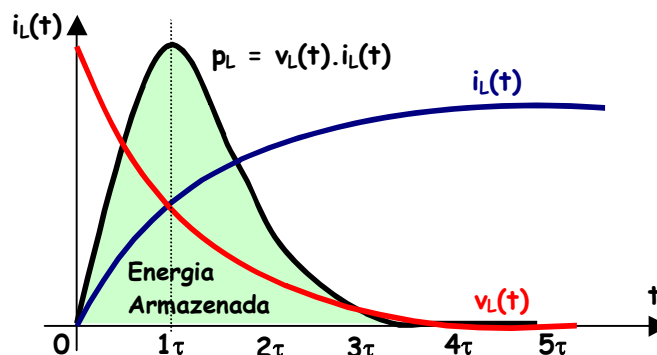


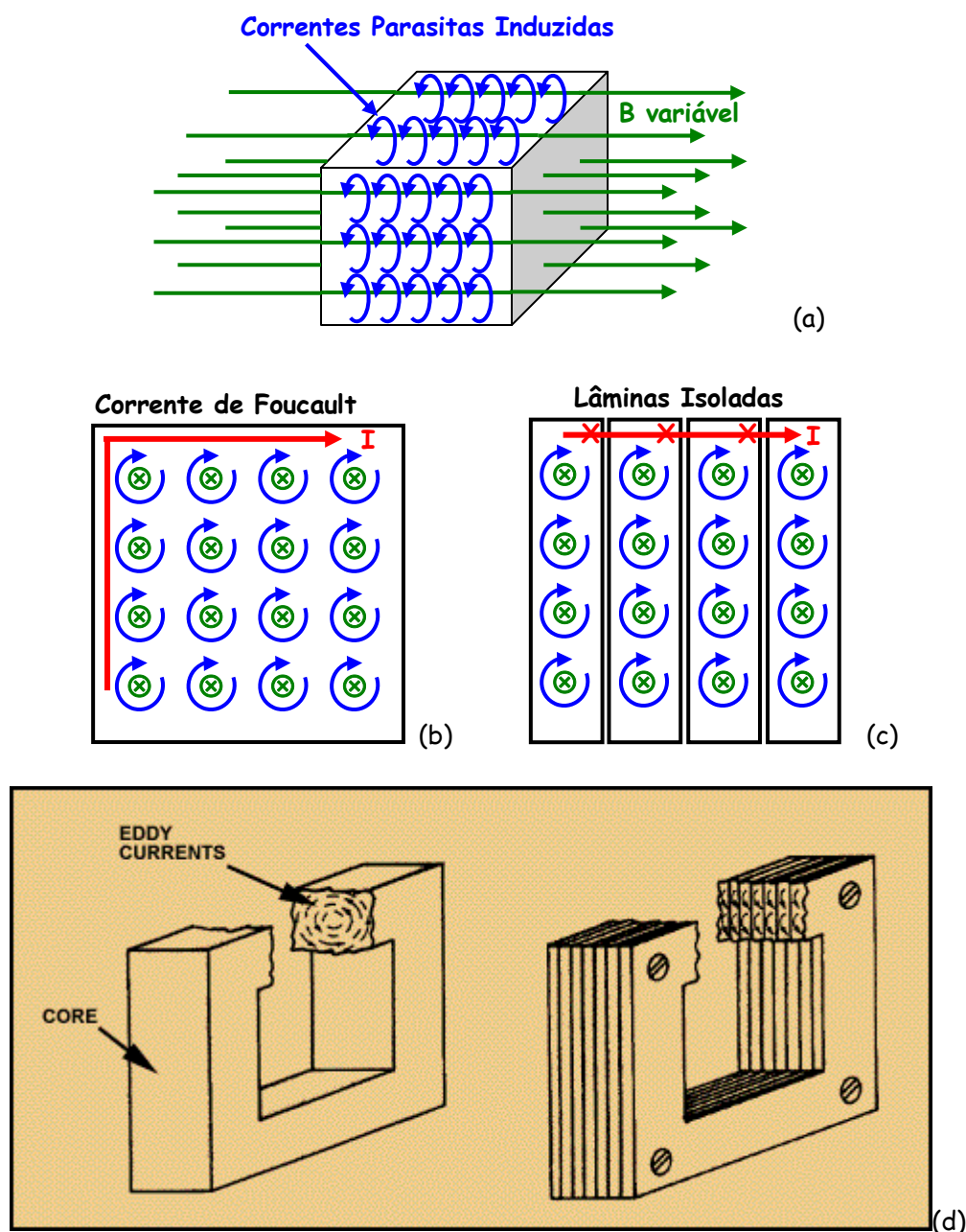
Figura 11.9 - Curva de potência instantânea e energia armazenada no indutor.

## 12. Correntes de Foucault

As correntes induzidas são produzidas não somente nos fios condutores, mas em qualquer condutor maciço, em movimento, num campo magnético ou atravessado por um fluxo magnético variável.

Dentro de um material condutor podemos encontrar vários percursos fechados para a circulação de uma corrente. Em cada percurso fechado o fluxo magnético varia com o tempo; portanto tensões induzidas fazem circular correntes induzidas no interior do material condutor maciço. Estas correntes induzidas são chamadas de **Correntes de Foucault**.





**Figura 12.1 - Correntes de Foucault:** a) correntes parasitas induzidas em todo o material; b) corrente parasita resultante nas bordas; c) núcleo laminado e isolado impede a circulação das correntes parasitas; (d) formação de um núcleo magnético para redução das correntes parasitas.

As Correntes Parasitas ou Correntes de Foucault são correntes que circulam em núcleos metálicos sujeitos a um campo magnético variável. Observando-se de frente e em corte, pode-se perceber que as correntes parasitas são pequenos círculos concêntricos como mostra a figura 12.1. Pode-se perceber também que em cada ponto no interior do núcleo a corrente é nula, pois o efeito de uma corrente é anulado por outra. No entanto, isso não acontece na periferia. Aí as correntes, todas com mesmo sentido, se somam e circulam pela periferia do núcleo. Isso faz com que o núcleo se aqueça por efeito Joule, exigindo uma energia adicional da fonte.

Estas correntes podem atingir valores muito elevados, provocando aquecimento do material. Se este aquecimento for indesejado, ele constitui as chamadas **Perdas Foucault**. É por essa razão que essas correntes são chamadas de parasitas.

Este aquecimento pode ser utilizado nos **foros de indução**, usados para fundir metais.

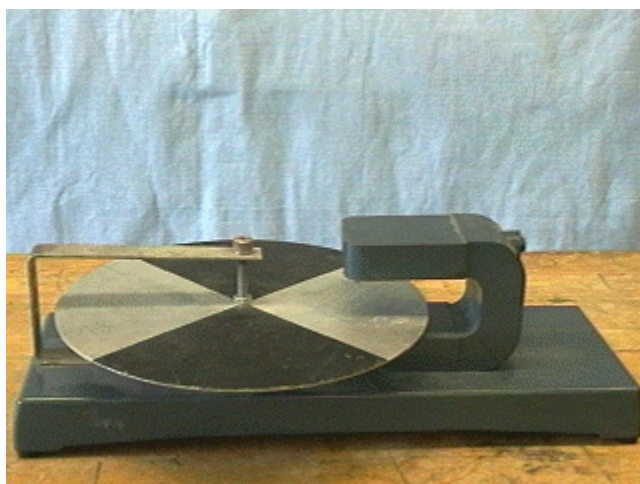
Para reduzir o efeito das correntes parasitas, deve-se laminar o núcleo na direção do campo, isolando-se as chapas entre si. Isso impede (ou pelo menos reduz) que as correntes se somem e as perdas por efeito Joule serão menores.

Também se pode reduzir os efeitos das correntes de Foucault através da adição de elementos que aumentem a resistividade do núcleo (como o Carbono), sem no entanto, comprometer as propriedades magnéticas do núcleo.

Apesar de serem na maioria dos casos indesejáveis, as correntes de Foucault têm sua aplicação prática na confecção de medidores de energia a disco de indução, relés e freios eletromagnéticos.

Com a aplicação da Lei de Lenz, essas correntes induzidas opõem-se ao movimento que as produz.

Por exemplo: seja um disco de cobre colocado entre os pólos de um eletroímã, como mostra a figura 12.2.



Fonte: <http://demolab.phys.virginia.edu/demos/pictures/E5c.gif>



Fonte: [http://www.columbia.edu/cu/physics/demo-images/5-Electricity%20and%20Magnetism/5K20-2\\_eddy\\_current\\_disk.jpg](http://www.columbia.edu/cu/physics/demo-images/5-Electricity%20and%20Magnetism/5K20-2_eddy_current_disk.jpg)

**Figura 12.2 - Correntes de Foucault.**

Fazendo o disco girar, o movimento não oferece dificuldade enquanto o eletroímã não for ligado.

Quando o eletroímã for ligado, no disco surgem correntes induzidas que se opõem ao movimento, fazendo o disco parar.

Este fenômeno mostra que no disco surgem correntes induzidas que se opõem ao movimento, gastando energia em forma de calor. Uma das aplicações desse fenômeno são os freios eletromagnéticos que existem nos trens de metrô, por exemplo.

Se o fluxo magnético for variável, criado por uma corrente alternada, as correntes induzidas se opõem à variação do fluxo fazendo o disco girar. Este é o princípio de funcionamento dos medidores de energia.

## 13. Ondas Eletromagnéticas

Sabemos que, quando uma corrente flui num condutor, há um campo elétrico responsável pela força que movimenta os elétrons. Também sabemos que um fluxo magnético variante induz uma corrente num condutor, o que implica, conseqüentemente, que há um campo elétrico no condutor induzido pelo fluxo magnético variante. Assim:

**Um fluxo magnético variante produz um campo elétrico.**

[Fonte: Chiquetto, 1996]:

Em 1960, o físico James Clerk Maxwell (1831-1979) ampliou o conceito de indução eletromagnética, mostrando que não era necessário um circuito fechado para ocorrer a indução. Maxwell concluiu que a variação do campo magnético em um ponto do espaço produz nesse ponto um campo elétrico induzido e que a variação do campo elétrico produz um campo magnético induzido. A partir dessa idéia, demonstrou que uma perturbação gerada em um campo elétrico gera outra no campo magnético, que por sua vez gera uma terceira no campo elétrico, e assim sucessivamente. Essa perturbação se propaga então no espaço sob a forma de uma onda eletromagnética.

Teoricamente, Maxwell previu que essa onda deveria se propagar com velocidade  $c$  dada por:

$$c = \sqrt{\frac{4\pi k_o}{\mu_o}}$$

onde  $\mu_o$  é a permeabilidade magnética do vácuo e  $k_o$  é a constante eletrostática da Lei de Coulomb. Fazendo os cálculos com os valores dessa constante obtemos:

$$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Essa é a velocidade de propagação da luz no vácuo. A partir de Maxwell, a luz passou a ser considerada uma onda eletromagnética.

Cargas elétricas vibrando - por exemplo prótons ou elétrons - geram no espaço ondas eletromagnéticas. Como vimos, uma carga elétrica em movimento cria um campo magnético. Quando a carga tem um movimento acelerado, surgem perturbações nos campos elétrico e magnético, que se propagam no espaço, originando uma onda eletromagnética.

Observe o esquema de uma onda eletromagnética gerada por uma carga oscilante como, por exemplo, a onda produzida por um elétron vibrando numa antena transmissora de rádio, como mostra a figura 13.1. Estão representados os vetores  $E$  e  $B$  ao longo da direção de propagação  $x$ . Veja que esses vetores são perpendiculares à direção de propagação.

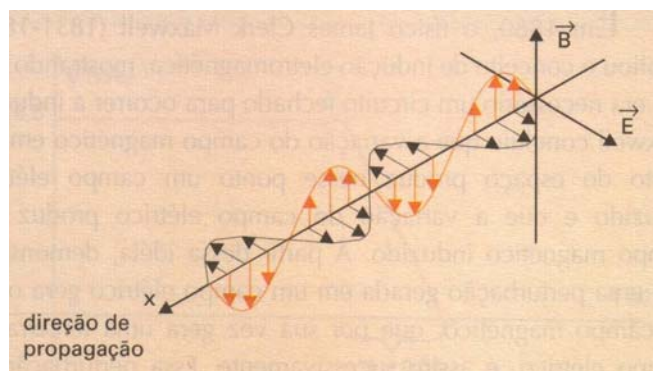


Figura 13.1 - Onda Eletromagnética (Fonte: Chiquetto, 1996).

## 14. Curva de Magnetização e Histerese<sup>18</sup> Magnética

Como pudemos verificar, um núcleo de ferro doce submetido a um **Campo Magnético Indutor  $H$**  concentra as linhas de campo com uma dada **Densidade de Fluxo Magnético  $B$** . Se o campo magnético indutor  $H$  for aumentado pelo aumento da corrente nas bobinas, haverá maior orientação dos ímãs elementares do ferro e, conseqüentemente, maior será a densidade de fluxo magnético  $B$ . No entanto, a relação entre  $B$  e  $H$  não é uma constante para todos os valores de  $H$ . Verificamos que um aumento no campo magnético indutor  $H$  propicia um aumento na densidade de fluxo magnético  $B$ . Haverá um ponto em que a densidade de fluxo  $B$  não mais aumentará sensivelmente com o aumento do campo indutor  $H$ , pois já não há tantos domínios magnéticos disponíveis para serem orientados. Assim, por mais que  $H$  aumente,  $B$  não aumenta. Esse ponto é chamado de **Saturação Magnética**.

A curva que representa esse comportamento, figura 14.1, é chamada **Curva de Magnetização** e varia para cada material em função da sua permissividade magnética  $\mu$ , pois:

$$\mu = \frac{B}{H}$$

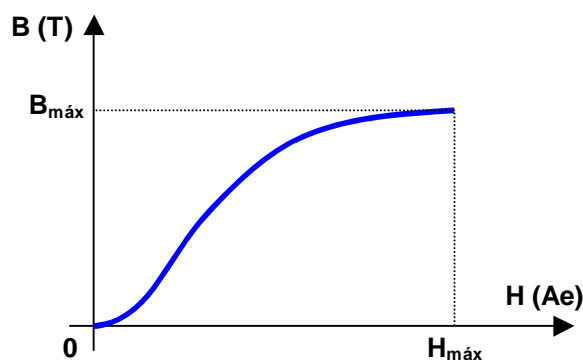


Figura 14.1 - Curva de Magnetização.

Analisando a curva de magnetização e a equação, podemos notar que a permeabilidade magnética  $\mu$  não é uma constante para quaisquer valores de  $B$  e  $H$ , pois a relação não é linear. Dessa maneira, os problemas deverão ser resolvidos graficamente. Com este propósito, são apresentadas nas figuras 14.2 e 14.3 as curvas de magnetização para diferentes materiais ferromagnéticos.

Materiais diamagnéticos e meios como o vácuo e o ar, onde a permeabilidade magnética é aproximadamente constante e próximo de  $\mu_0$ , não são saturáveis.

<sup>18</sup> do grego "hystereris": atraso.



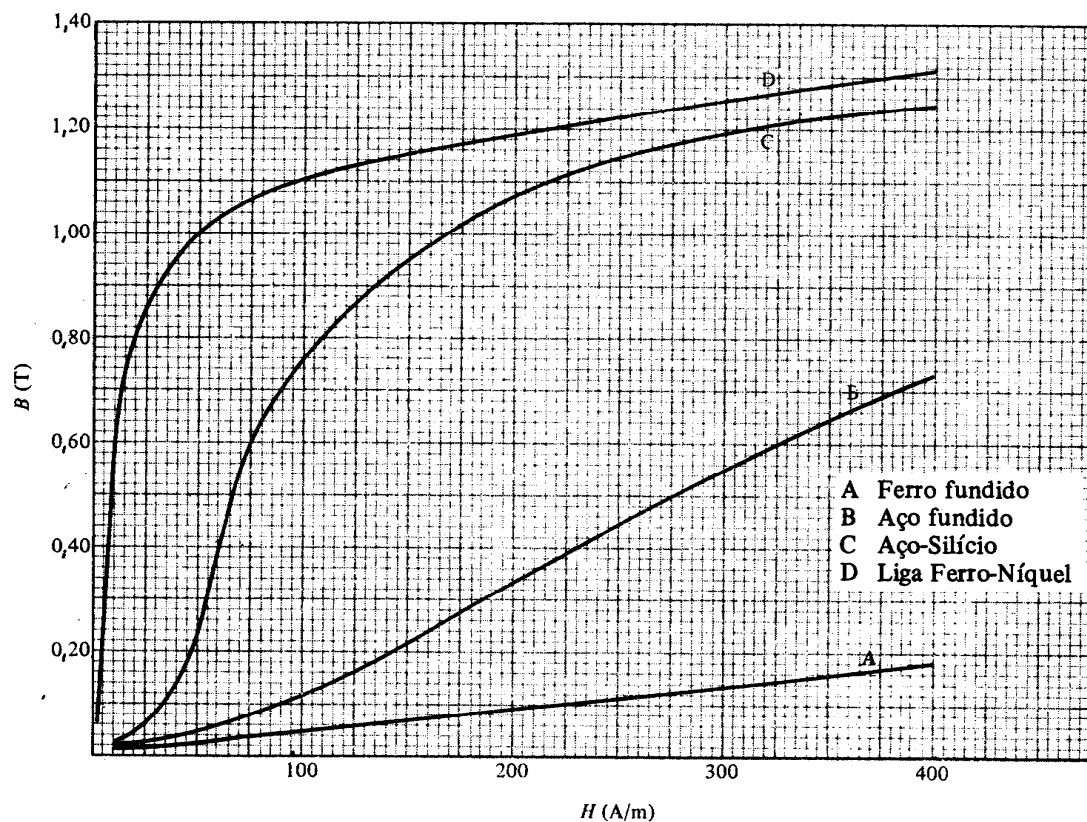


Figura 14.2 - Curva de Magnetização. (Fonte: Edminister, 1980)

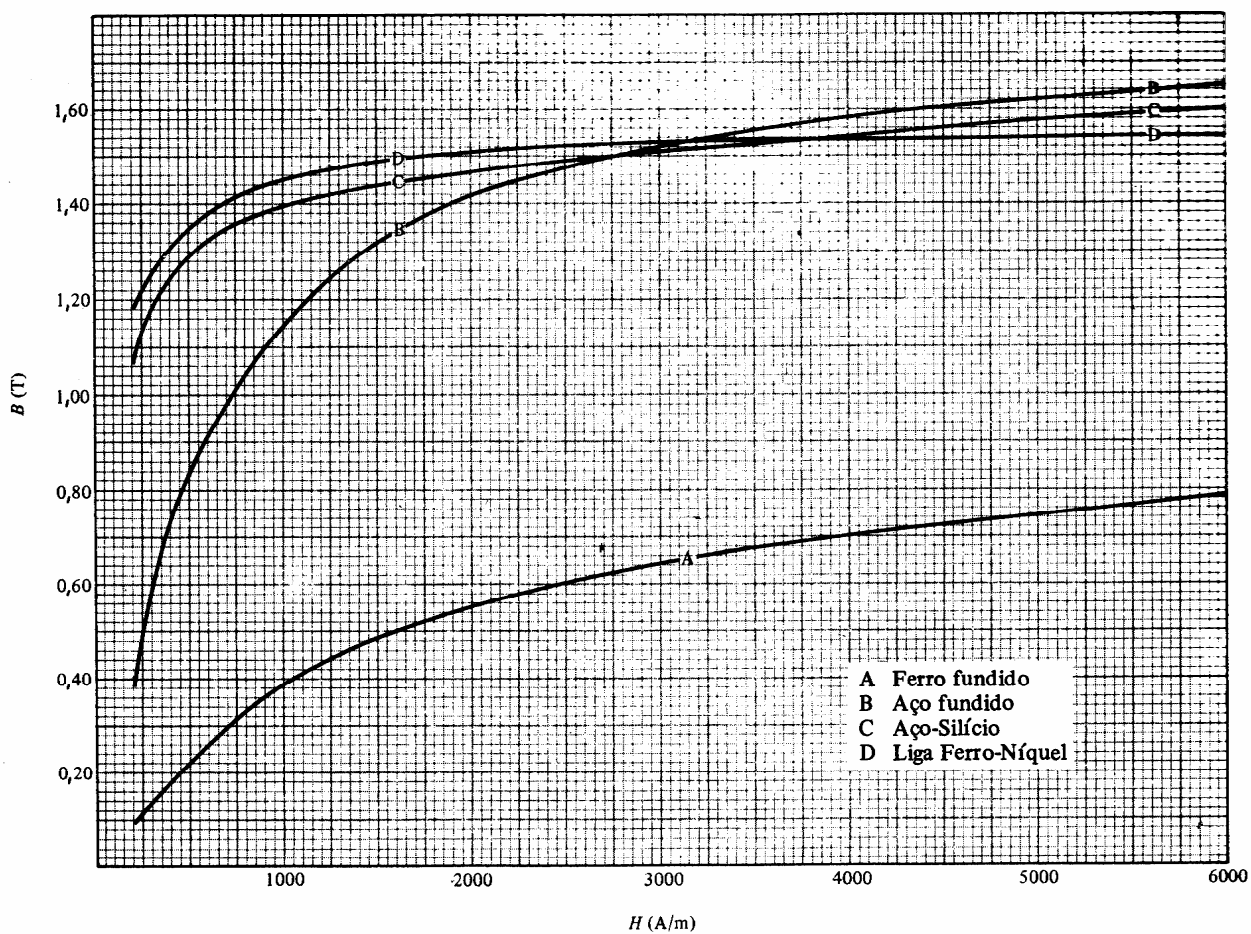


Figura 14.3 - Curva de Magnetização. (Fonte: Edminister, 1980)

### 14.1. Histerese Magnética

Para analisarmos a Histerese Magnética vamos considerar um núcleo de material ferromagnético inicialmente desmagnetizado e sobre ele enroladas algumas espiras de condutor na forma de uma bobina. Nesta condição inicial o campo indutor  $H$  e a densidade de fluxo  $B$  são nulos.

Quando injetamos uma corrente elétrica  $I$  na bobina, cria-se um campo magnético indutor  $H$  e esse campo, orientando alguns dos domínios magnéticos do material, faz com que apareça uma densidade de fluxo  $B$  no núcleo. À medida que aumentamos a corrente  $I$ , o campo indutor  $H$  e a densidade de fluxo  $B$  aumentam até que todos os domínios estejam orientados, atingindo a saturação magnética. A figura 14.4 mostra a curva que representa esse comportamento.

Se, a partir daí, diminuirmos a corrente  $I$ , conseqüentemente o campo indutor  $H$  e a densidade de fluxo  $B$  também diminuirão. No entanto, quando  $H$  chegar a zero (quando  $I=0$ ), existirá ainda um certo valor de densidade de fluxo  $B$ , chamado de **Densidade de Fluxo Residual ou Magnetismo Residual**,  $B_R$ . Essa característica é chamada também de **Retentividade Magnética** do material. Isto ocorre porque, após cessado o campo indutor  $H$ , alguns domínios magnéticos do material permanecem orientados. É este magnetismo residual que possibilita a fabricação de ímãs permanentes.

Para eliminarmos o Magnetismo Residual, é necessário aplicarmos um campo indutor em sentido contrário, invertendo-se a corrente elétrica. A esse valor de campo necessário para eliminar o Magnetismo Residual, chamamos de **Campo Coercitivo**,  $H_C$ .

Nesta condição, a densidade de fluxo é nula ( $B = 0$ ), mas às custas de um campo  $H_C$ . Se continuarmos a aumentar negativamente o campo indutor o material irá saturar novamente, porém com uma orientação magnética contrária à anterior. Trazendo novamente o campo indutor a zero, teremos agora um valor de Magnetismo Residual negativo,  $-B_R$ . Novamente é necessário aplicar um campo indutor em sentido contrário, agora positivo, para levar  $-B_R$  até zero. Aumentando  $H$ , o material chega novamente ao ponto de saturação, completando o chamado **Laço de Histerese Magnética**.

Os fenômenos da Histerese Magnética devem ser interpretados como conseqüências da **inércia** e dos **atritos** a que os domínios magnéticos estão sujeitos, ou seja, é o "atraso" do comportamento da densidade de campo magnético  $B$  em relação à variação do campo magnético indutor  $H$ . Isso justifica o fato de um núcleo submetido a diversos ciclos de histerese sofrer um **aquecimento**. Este aquecimento representa **perdas de energia** para um equipamento. Estas perdas dependem das características metalúrgicas do material de que é feito o núcleo de uma bobina, particularmente do percentual de silício, da frequência com que a corrente inverte o seu sentido, da espessura do material em um plano perpendicular ao campo e da densidade de fluxo máxima admissível. Resumindo, podemos dizer que as **Perdas por Histerese são proporcionais à área** do Laço de Histerese.

Desse estudo, entende-se que os aparelhos elétricos de corrente alternada, cujos núcleos ficam sujeitos a variações de campo magnético, ficam expostos a um número de laços de histerese por segundo, em função da frequência da corrente aplicada. Por esse motivo, seus núcleos devem ser feitos com material de estreito laço de histerese para que as perdas sejam as menores possíveis. Por outro lado, materiais com largo laço de histerese têm grande aplicação na fabricação de ímãs permanentes pois apresentam alto magnetismo residual.

Se o ciclo de magnetização for repetido, a curva obtida para o mesmo núcleo será determinada pelo máximo  $H$  aplicado. Para vários laços de histerese, um dado  $H$  pode ser associado a vários  $B$ , determinado pelo comportamento do núcleo.

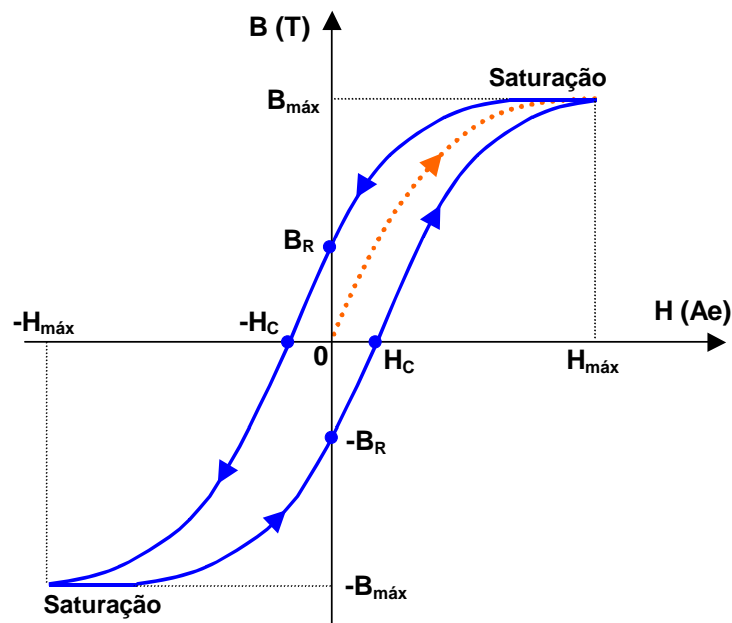


Figura 14.4 - Laço de Histerese Magnética.

## 15. Circuitos Magnéticos

Vimos que a força magneto-motriz e a relutância se relacionam através do fluxo magnético:

$$\phi = \frac{FMM}{\mathfrak{R}}$$

Já verificamos que esta relação é análoga à Lei de Ohm e, portanto, podemos analisar os circuitos magnéticos de forma semelhante aos circuitos elétricos, como demonstra a correspondência da tabela 15.1 e a analogia da figura 15.1.

Tabela 15.1

	Circuitos Elétricos	Circuitos Magnéticos
Causa	<b>E</b>	<b>FMM</b>
Efeito	<b>I</b>	$\phi$
Oposição	<b>R</b>	$\mathfrak{R}$

De forma análoga aos circuitos elétricos, podemos adaptar a Lei das Tensões de Kirchhoff a um circuito magnético série, onde a soma algébrica das forças magneto-motriz do circuito magnético série é nula:

$$\sum FMM = 0$$

**Fontes de FMM** (força magneto-motriz) são bobinas percorridas por corrente:

$$FMM = N \cdot I$$

Quedas de FMM num circuito magnético são provocadas pela relutância do caminho magnético e são dadas por:

$$FMM = H \cdot \ell$$

Esta análise tem por objetivo determinar o número de espiras ou a corrente que deve percorrer uma bobina de um dado circuito magnético para produzir um determinado fluxo ou determinada indução magnética. Ou seja, tem por objetivo projetar os dispositivos magnéticos.



Para o circuito magnético da figura 15.1(a) e seu equivalente elétrico em 15.1(b), aplicando a lei das malhas:

$$\sum \text{FMM} = 0$$

$$+ N \cdot I - H \cdot \ell = 0$$

Com essa equação pode-se obter as informações necessárias para análise e projeto de circuitos magnéticos.

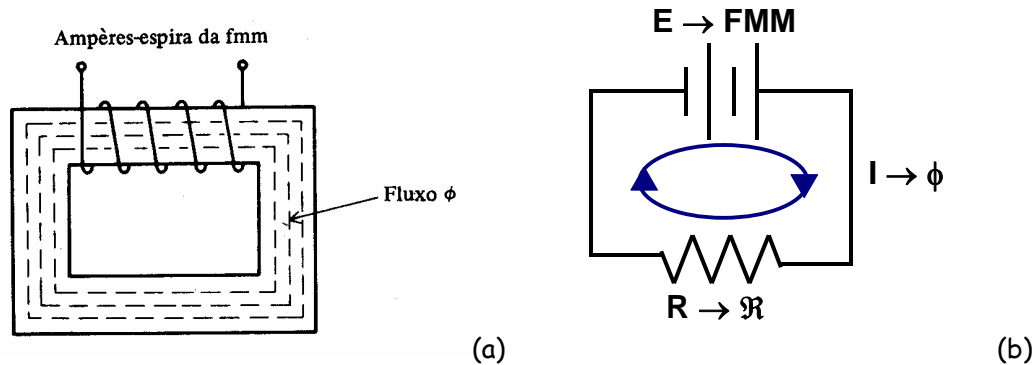


Figura 15.1 - (a) Circuito magnético fechado série com núcleo de ferro e (b) equivalente elétrico.

Para o circuito magnético da figura 15.2, composto por três materiais ferromagnéticos diferentes, temos uma associação série de efeitos. Assim:

$$\sum \text{FMM} = 0$$

$$+ N \cdot I - H_{ab} \cdot \ell_{ab} - H_{bc} \cdot \ell_{bc} - H_{ca} \cdot \ell_{ca} = 0$$

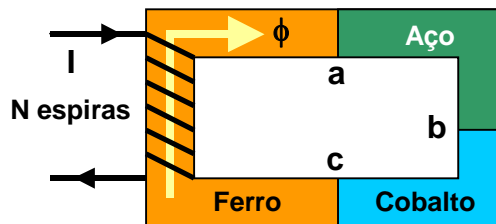


Figura 15.2 - Circuito magnético série.

Da mesma forma, a Lei das Correntes de Kirchhoff pode, por analogia, ser aplicada ao fluxo magnético. Assim, a soma algébrica dos fluxos magnéticos numa junção de um núcleo de um circuito magnético é nula. Ou seja:

$$\sum \phi = 0$$

Para o circuito magnético da figura 15.3 temos uma derivação do fluxo magnético e a equação pode ser dada por:

$$\phi_a - \phi_b - \phi_c = 0$$

$$\phi_a = \phi_b + \phi_c$$

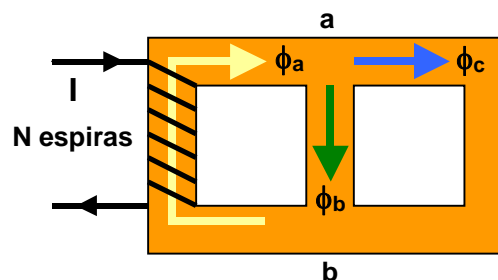


Figura 15.3 - Circuito magnético paralelo.

No caso de haver mais de uma fonte de FMM no circuito, como mostra o circuito da figura 15.4(a), a analogia elétrica nos leva aos circuitos equivalentes das figuras 15.4(b) e 15.4(c). Assim:

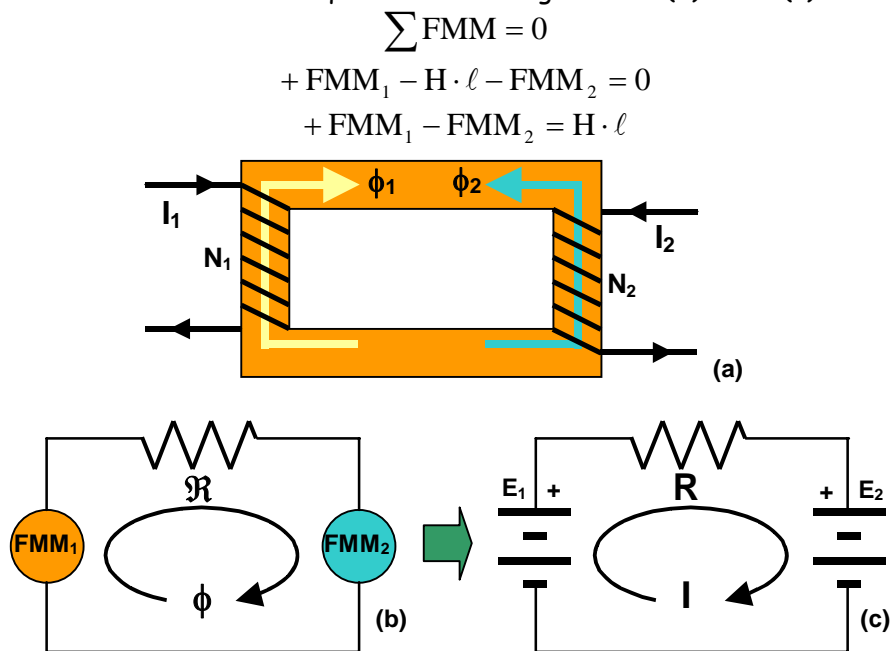


Figura 15.4 - (a) circuito magnético com duas bobinas; (b) equivalente magnético; (c) equivalente elétrico.

#### Observação:

O Teorema da Superposição de Efeitos não pode ser aplicado a estes circuitos magnéticos devido às não linearidades das curvas B-H.

### 15.1. Circuito Magnético Série Sem Entreferro

O estudo dos circuitos magnéticos série sem entreferro será feito através de um exemplo.

#### Exemplo 15.1:

Determinar o valor da corrente que deve percorrer a bobina do núcleo da figura 15.5, sabendo-se que possui 100 espiras, fator de utilização  $k = 0,9$ , sendo o fluxo requerido de  $40 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ . O núcleo é de aço silício.

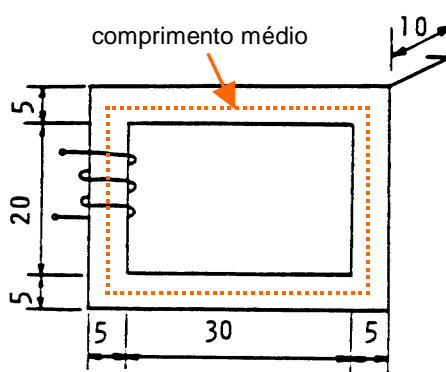


Figura 15.5 - Circuito magnético para o exemplo 15.1. (Fonte: CEFET/PR)

O comprimento médio do circuito magnético,  $\ell$  é o comprimento da linha tracejada no centro do núcleo, como mostra a figura 15.5.

O comprimento médio do circuito magnético é:

$$\ell = 25 + 35 + 25 + 35 = 120$$

$$\ell = 1,2 \text{ m}$$

O **fator de utilização k** dá uma noção do aproveitamento do fluxo magnético produzido pela bobina e pode ser dado por:

$$B = \frac{\phi}{A \cdot k}$$

A Densidade de Fluxo Magnético B no núcleo, considerando-se o fator de utilização k, é:

$$B = \frac{40 \cdot 10^{-4}}{(0,1 \cdot 0,05) \cdot 0,9} = 0,89$$

$$B = 0,89T$$

Do gráfico da figura 14.2 podemos obter o valor para o Campo Magnético Indutor. Com o valor calculado de B=0,89T e analisando a curva do aço-silício podemos obter H = 130Ae/m.

Aplicando-se Kirchhoff:

$$\sum FMM = 0$$

$$+ FMM - H \cdot \ell = 0$$

$$FMM = H \cdot \ell$$

Assim, força magneto-motriz é dada por:

$$FMM = H \cdot \ell = 130 \cdot 1,2 = 156$$

$$FMM = 156Ae$$

Como:

$$FMM = N \cdot I$$

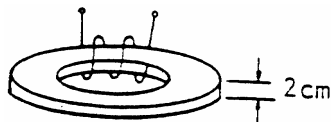
temos:

$$I = \frac{FMM}{N} = \frac{156}{100} = 1,56$$

A corrente necessária é, portanto: **I = 1,56A**

### Exemplo 15.2:

O núcleo de aço fundido da figura 15.6 tem um raio interno de 7cm e externo de 9cm. Encontre o fluxo magnético considerando que a FMM da bobina é de 200Ae. Determine a quantidade de espiras necessária se a corrente a ser aplicada for de 2A. Determine a permeabilidade do material e a permeabilidade relativa.



**Figura 15.6 - Circuito magnético para o exemplo 15.2. (Fonte: CEFET/PR)**

Comprimento médio do circuito magnético:

$$\ell = 2 \cdot \pi \cdot 0,08 = 0,503m$$

Campo magnético indutor:

$$\sum FMM = 0$$

$$+ FMM - H \cdot \ell = 0$$

$$FMM = H \cdot \ell$$

$$H = \frac{200}{0,503} = 397,8 Ae/m$$

A Densidade de Fluxo é obtida da curva da figura 14.2: B = 0,7T.

O fluxo magnético é, portanto:

$$\phi = B \cdot A = 0,7 \cdot (0,02)^2 = 0,28mWb$$

O número de espiras pode ser dado por:

$$FMM = N \cdot I$$

$$N = \frac{\text{FMM}}{I} = \frac{200}{2} = 100 \text{ espiras}$$

As permeabilidades do material e relativa são encontradas por:

$$\mu_{\text{mat}} = \frac{B}{H} = \frac{0,7}{397,8} = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ Wb/A} \cdot \text{m}$$

$$\mu_R = \frac{\mu_{\text{mat}}}{\mu_o} = \frac{1,76 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1400$$

### Exemplo 15.3:

O circuito magnético da figura 15.7 tem incorporado uma seção de liga de Ferro Níquel ao corpo principal do núcleo de aço silício. Determine a corrente e o condutor a ser usado para a bobina para que o fluxo magnético seja  $\phi = 5,1 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ .

Dados: fator de utilização  $k = 0,85$

$$l_{ab} = l_{cd} = l_{ef} = l_{fa} = 8 \text{ cm}$$

$$l_{bc} = l_{de} = 1 \text{ cm}$$

seção transversal quadrada

$$N = 400 \text{ espiras}$$

Comprimento médio do circuito magnético:

$$\ell = \ell_{ab} + \ell_{bc} + \ell_{cd} + \ell_{de} + \ell_{ef} + \ell_{fa} = 8 + 1 + 8 + 1 + 8 + 8 = 34 \text{ cm} = 0,34 \text{ m}$$

Área da seção transversal quadrada:

$$A = (2 \cdot \ell_{bc})^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4 \text{ cm}^2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

A densidade de fluxo magnético:

$$B = \frac{\phi}{A \cdot k} = \frac{5,1 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4} \cdot 0,85} = 1,5 \text{ T}$$

Do gráfico da figura 14.3, para  $B=1,5 \text{ T}$ , temos:

$$H_{\text{aço silício}} = 2800 \text{ Ae/m}$$

$$H_{\text{FeNi}} = 1800 \text{ Ae/m}$$

Aplicando Kirchhoff à malha:

$$\sum \text{FMM} = 0$$

$$+ \text{FMM} - H \cdot \ell|_{\text{aço}} - H \cdot \ell|_{\text{FeNi}} = 0$$

$$\text{FMM} = H_{\text{aço}} \cdot (\ell_{ab} + \ell_{ef} + \ell_{fa}) + H_{\text{FeNi}} \cdot (\ell_{bc} + \ell_{cd} + \ell_{de})$$

$$\text{FMM} = 2800 \cdot (0,08 + 0,08 + 0,08) + 1800 \cdot (0,01 + 0,08 + 0,01) = 2800 \cdot 0,24 + 1800 \cdot 0,1$$

$$\text{FMM} = 852 \text{ Ae}$$

Como

$$\text{FMM} = N \cdot I$$

$$I = \frac{\text{FMM}}{N} = \frac{852}{400} = 2,13 \text{ A}$$

De uma tabela de capacidade de corrente de condutores de cobre nu esmaltado obtemos:

Condutor AWG 20

Corrente máxima: 2,329 A

Área de cobre: 0,005175 cm<sup>2</sup>

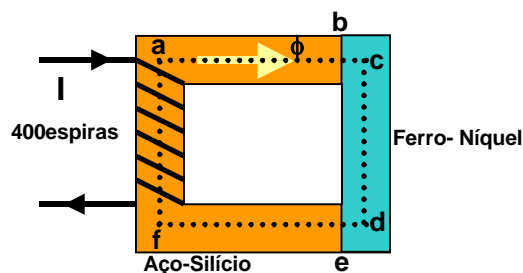


Figura 15.7 - circuito magnético para o exemplo 15.3.

## 15.2. Circuito Magnético Série Com Entreferro

O entreferro de ar (*Air Gap*) é a região do espaço (ar) contida entre os pólos de um ímã. Como o ar tem alta relutância, as dimensões do entreferro de ar afetam o valor da relutância de um circuito magnético. Quando um circuito magnético tem os pólos bem afastados, com uma grande quantidade de ar entre eles, este apresenta alta relutância devido ao espalhamento das linhas de campo nessa região. Quanto menor o entreferro, mais forte o campo nessa região.

Para fins didáticos, podemos desconsiderar o espalhamento das linhas de campo no entreferro. Assim:

$$\phi_{\text{entreferro}} = \phi_{\text{núcleo}}$$

e

$$A_{\text{entreferro}} = A_{\text{núcleo}}$$

O estudo dos circuitos magnéticos série com entreferro será feito através de um exemplo.

### Exemplo 15.4:

No circuito magnético de aço-silício da figura 15.8, com fator de utilização  $k = 0,9$  e fator de dispersão igual a 1,1, tem-se uma bobina de 1000 espiras. Determinar a intensidade de corrente sendo que o fluxo necessário é igual a  $54 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ .

Comprimento médio do circuito magnético descontando-se o entreferro:

$$\ell = 25 + 25 + 25 + 25 - 0,5 = 99,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

A Densidade de Fluxo no entreferro, considerando-se o **fator de dispersão d**, pode ser dado por:

$$B_G = \frac{\phi}{d \cdot A_G}$$

A área da seção transversal do entreferro  $A_G$  é a mesma do núcleo magnético  $A_N$ . Assim a densidade de fluxo magnético no entreferro é:

$$B_G = \frac{54 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot A_N} = \frac{54 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot (0,05 \cdot 0,1)} = 0,98 \text{ T}$$

Indução Magnética no entreferro:

$$H_G = \frac{B_G}{\mu_G} = \frac{0,98}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 779859,22 \frac{\text{Ae}}{\text{m}}$$

Densidade de Fluxo no núcleo, considerando-se o fator de utilização  $k$  é dado por:

$$B_N = \frac{\phi}{k \cdot A_N} = \frac{54 \cdot 10^{-4}}{0,9 \cdot (0,05 \cdot 0,1)} = 1,2 \text{ T}$$

Das curvas de magnetização (figuras 14.2 e 14.3), o campo magnético indutor no núcleo é  $H_N = 310 \text{ Ae/m}$ .

Força magneto-motriz no entreferro:

$$FMM_G = H \cdot \ell = 779859,22 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 3899,3 \text{ Ae}$$

Força magneto-motriz no núcleo:

$$FMM_N = H \cdot \ell = 310 \cdot 99,5 \cdot 10^{-2} = 308,45 \text{ Ae}$$

Força magneto-motriz total:

$$FMM_T = FMM_N + FMM_G = 3899,3 + 308,45 = 4207,7 \text{ Ae}$$

Corrente necessária:

$$I = \frac{FMM_T}{N} = \frac{4207,7}{1000} = 4,208 \text{ A}$$

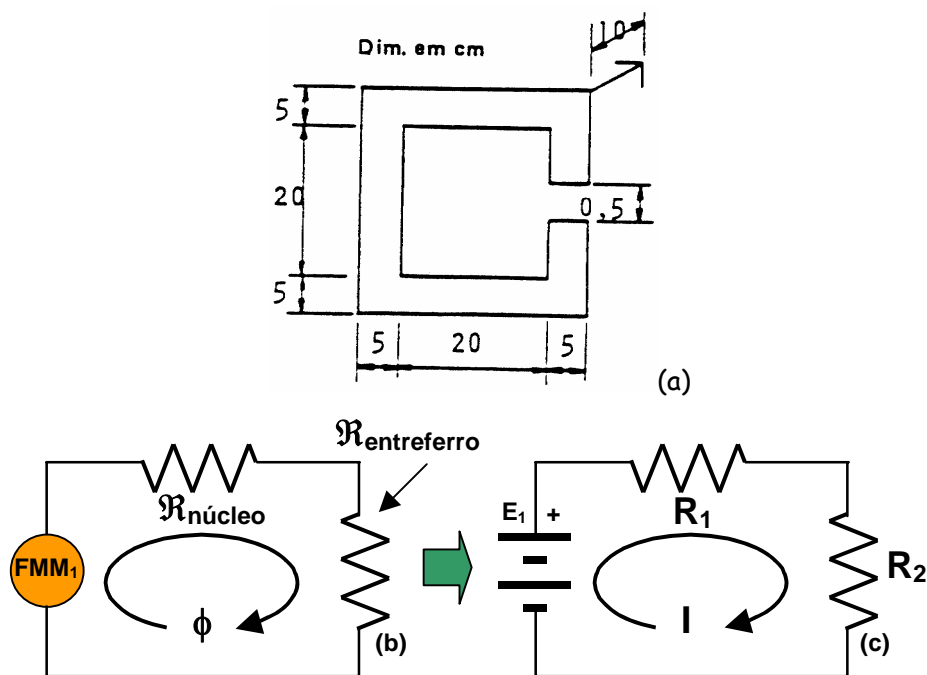


Figura 15.8 - (a) circuito magn\u00e9tico para o exemplo 15.4; (b) equivalente magn\u00e9tico; (c) equivalente el\u00e9trico.  
(Fonte: CEFET/PR)

## 16. Acoplamento Magn\u00e9tico

Quando dois circuitos magn\u00e9ticos est\u00e3o pr\u00f3ximos um do outro e o fluxo magn\u00e9tico de um dos circuitos enla\u00e7a o outro, dizemos que est\u00e3o magneticamente acoplados. Nessa situa\u00e7\u00e3o h\u00e1 transfer\u00eancia de energia de um para outro circuito atrav\u00e9s do campo magn\u00e9tico. A varia\u00e7\u00e3o da corrente em um produzir\u00e1 uma varia\u00e7\u00e3o de fluxo induzindo uma tens\u00e3o no outro. A figura 16.1 ilustra essa situa\u00e7\u00e3o.

O fluxo magn\u00e9tico produzido por cada uma das bobinas divide-se em duas componentes. Assim:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21}$$

onde:

$\phi_1$  - fluxo magn\u00e9tico total produzido pelo circuito 1;

$\phi_{11}$  - componente de fluxo gerado pelo circuito 1 vinculado somente ao circuito 1;

$\phi_{12}$  - componente de fluxo gerado pelo circuito 1 vinculado ao circuito 2. \u00c9 o fluxo m\u00fatuo produzido pelo circuito 1;

$\phi_2$  - fluxo magn\u00e9tico total produzido pelo circuito 2;

$\phi_{22}$  - componente de fluxo gerado pelo circuito 2 vinculado somente ao circuito 2;

$\phi_{21}$  - componente de fluxo gerado pelo circuito 2 vinculado ao circuito 1. \u00c9 o fluxo m\u00fatuo produzido pelo circuito 2.

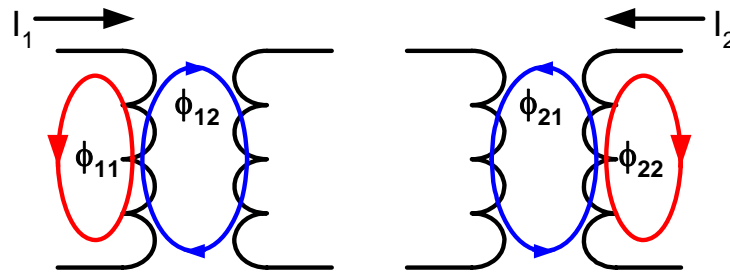


Figura 16.1 - Acoplamento magnético

### 16.1. Coeficiente de Acoplamento

Consideremos duas bobinas acopladas magneticamente através de um mesmo núcleo, como mostra a figura 16.2(a). A bobina 1 encontra-se conectada a uma fonte de tensão variável no tempo  $v_1(t)$  que provoca uma corrente variável no tempo  $i_1(t)$  e um fluxo magnético variável  $\phi_1(t)$  no núcleo. A bobina 1 possui  $N_1$  espiras e uma indutância  $L_1$ . Como os terminais da bobina 2, com  $N_2$  espiras e indutância  $L_2$ , encontram-se abertos, a corrente e o fluxo magnético gerado são nulos. Assim, apenas uma parte do fluxo magnético gerado pela bobina 1 atravessa as espiras da bobina 2, dado pelo fluxo mútuo  $\phi_{12}(t)$ .

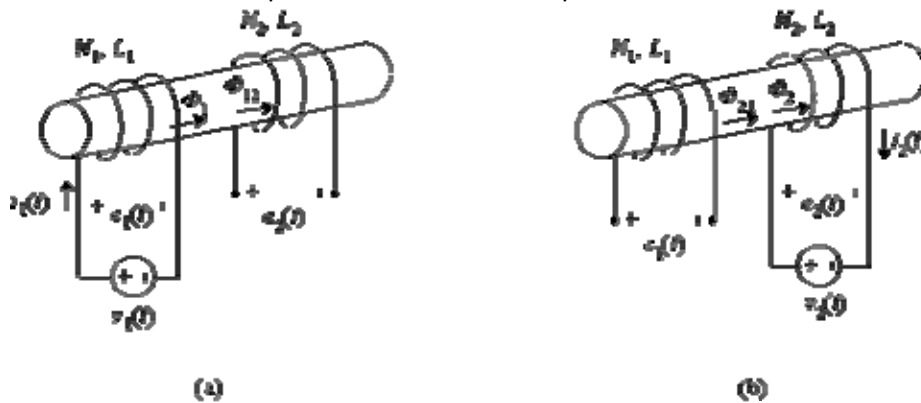


Figura 16.2 - acoplamento magnético: (a) bobina 1 alimentada; (b) bobina 2 alimentada.

Definimos como **Coeficiente de Acoplamento**  $k$  a um número adimensional dado pela relação entre o fluxo mútuo e o fluxo total produzido e expressa o percentual de fluxo magnético mútuo existente entre circuitos magneticamente acoplados. Assim:

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2} < 1$$

### 16.2. Indutância Mútua

A força eletromotriz induzida nos terminais da bobina 1 tem a polaridade indicada na figura 16.2(a) e é dada em termos do número de espiras pela Lei de Faraday:

$$e_1(t) = v_1(t) = N_1 \frac{d\phi_1(t)}{dt}$$

ou em termos da indutância:

$$e_1(t) = v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

igualando as equações obtemos:



$$\frac{d\phi_1(t)}{dt} = \frac{L_1}{N_1} \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

A Lei de Faraday estabelece que a força eletromotriz induzida nos terminais da bobina 2 devido ao fluxo mútuo  $\phi_{12}(t)$  é dada por:

$$e_2(t) = N_2 \frac{d\phi_{12}(t)}{dt}$$

Substituindo nesta equação  $\phi_{12}(t)$  pela equação do coeficiente de acoplamento e a variação do fluxo  $\phi_1$ , temos:

$$e_2(t) = N_2 k \frac{d\phi_1(t)}{dt} = N_2 k \frac{L_1}{N_1} \frac{di_1(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt}$$

de onde se define  $M$  como **coeficiente de indução mútua**:

$$M_{12} = k \frac{N_2}{N_1} L_1$$

Se o mesmo raciocínio for aplicado ao caso da figura 16.2(b), em que a bobina 2 é alimentada, podemos obter:

$$M_{21} = k \frac{N_1}{N_2} L_2$$

Igualando os coeficientes  $M_{12}$  e  $M_{21}$ , temos:

$$M_{12} = M_{21} = k \frac{N_2}{N_1} L_1 = k \frac{N_1}{N_2} L_2$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

Quando bobinas estão acopladas magneticamente surge uma indutância mútua entre elas, que é dada pela relação entre o fluxo mútuo e a corrente que o produz. Assim:

$$M_{12} = N_2 \cdot \frac{d\phi_{12}}{dI_1}$$

$$M_{21} = N_1 \cdot \frac{d\phi_{21}}{dI_2}$$

onde:

$M$  - indutância mútua [H];

$N$  - número de espiras da bobina;

$d\phi/dI$  - função de variação do fluxo magnético com a corrente [Wb/A]

O valor da indutância mútua também pode ser obtido em função das indutâncias das bobinas e o coeficiente de acoplamento  $k$  entre elas:

$$M = M_{12} = M_{21} = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2}$$

A figura 16.3 mostra como o acoplamento interfere na indutância mútua entre bobinas.

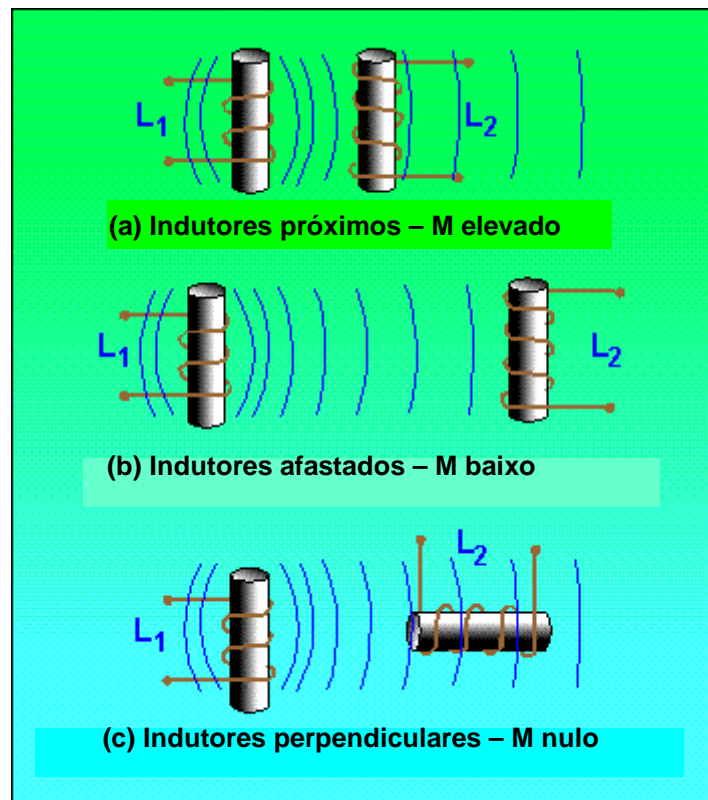


Figura 16.3 - influência do acoplamento na indutância mútua.

### 16.3. Tensão de Indução Mútua

A indutância mútua também é responsável por uma tensão auto-induzida nas bobinas. Dividindo-se o numerador e o denominador da equação da indutância mútua por  $dt$ , temos:

$$M = N \cdot \frac{d\phi / dt}{dI / dt}$$

mas

$$N \cdot \frac{d\phi}{dt} = -e$$

então

$$e_M = -M \cdot \frac{dI}{dt}$$

onde:

$e_M$  - tensão de indutância mútua [V];

$M$  - indutância mútua [H];

$dI/dt$  - função da variação da corrente no tempo [A/s]

### 16.4. Polaridade de Bobinas

Consideremos as duas bobinas acopladas magneticamente apresentadas na figura 16.4 e admitamos que ambas são percorridas pela mesma corrente,  $i(t)$  e que os sentidos dos enrolamentos são concordantes em 16.4(a) e discordantes em 16.4(b).

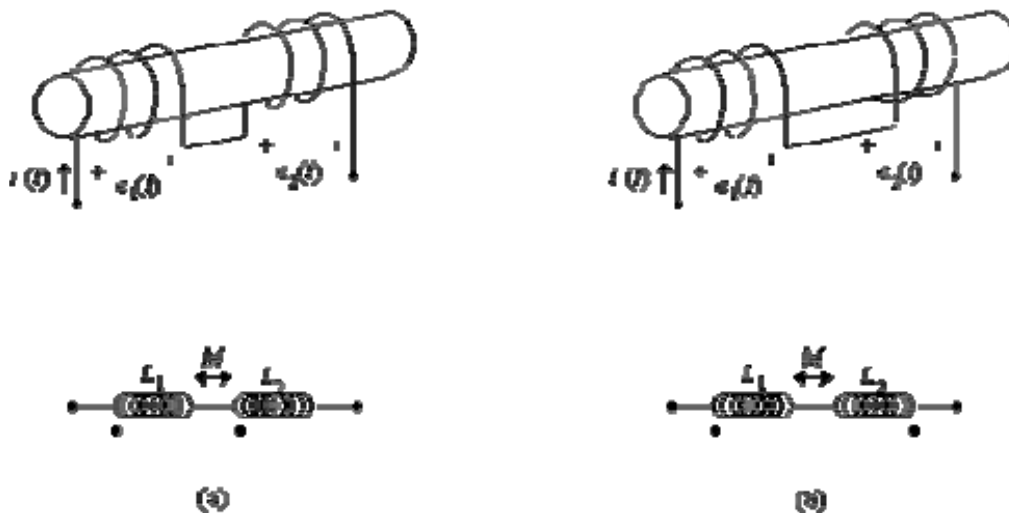


Figura 16.4 - Associação em série de bobinas acopladas magneticamente: (a) polaridade aditiva; (b) polaridade subtrativa.

A concordância ou a discordância entre os sentidos dos enrolamentos é representada com base num conjunto de pontos marcados num dos extremos das bobinas. Se os sentidos das correntes nas duas bobinas forem positivos do ponto para a outra extremidade (ou então da outra extremidade para o ponto), os fluxos magnéticos gerados no núcleo comum serão **concordantes** e **somam-se** e o acoplamento é **positivo** e dito de **polaridade aditiva**, como mostram as figuras 16.5(a) e 16.5(b). Por outro lado, se os sentidos das correntes forem contrários entre si, tendo sempre como referência a extremidade onde se localiza o ponto, então os fluxos magnéticos gerados serão **discordantes**, **subtraem-se** e o acoplamento é **negativo** e dito de **polaridade subtrativa**, como mostram as figuras 16.5(c) e 16.5(d).

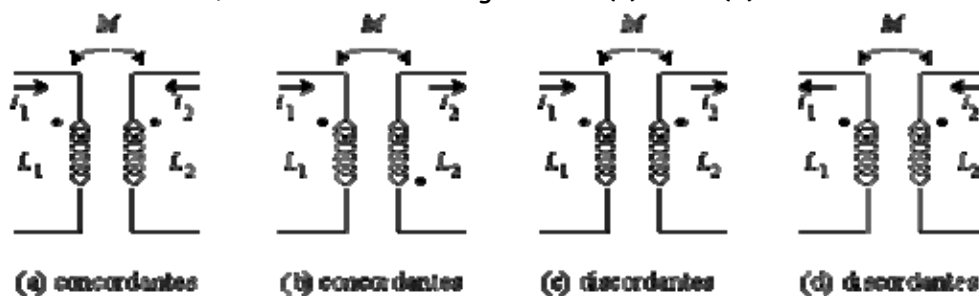


Figura 16.5 - Fluxos magnéticos gerados por bobinas acopladas

## 16.5. Indutância Equivalente

No circuito magneticamente acoplado da figura 16.4, ambas as bobinas são percorridas pela mesma corrente e portanto possuem fluxo magnético e força eletromotriz induzida. No caso da figura 16.4(a), as forças eletromotrizes induzidas nos terminais das bobinas 1 e 2 são dados por:

$$e_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} = (L_1 + M) \frac{di(t)}{dt}$$

e

$$e_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} = (L_2 + M) \frac{di(t)}{dt}$$

resultando na força eletromotriz total:

$$e_+(t) = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di(t)}{dt}$$

e a indutância total da associação série das duas bobinas magneticamente acopladas é:

$$L_+ = L_1 + L_2 + 2M$$

No caso das bobinas com enrolamentos discordantes (polaridade subtrativa) apresentado na figura 16.4(b), podemos, de maneira similar, chegar à conclusão:

$$L_- = L_1 + L_2 - 2M$$

Se o acoplamento entre as bobinas for perfeito,  $k=1$  e se as bobinas forem iguais e ligadas com polaridade subtrativa, obtém-se  $L=0$ . Esta técnica é usada para construir resistores de fio bobinados.

Portanto, a **indutância equivalente** de circuitos magneticamente acoplados ligados em **série** é dada pela soma das indutâncias e a soma ou subtração de duas vezes cada indutância mútua. Assim:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots \pm 2 \cdot M_{12} \pm 2 \cdot M_{13} \pm 2 \cdot M_{23} \pm \dots$$

**Exemplo 16.5.1.** Duas bobinas são associadas em série com mesmo sentido de enrolamento (polaridade aditiva) e sobre um mesmo núcleo, como mostra a figura 16.6. Determine a indutância equivalente do sistema.

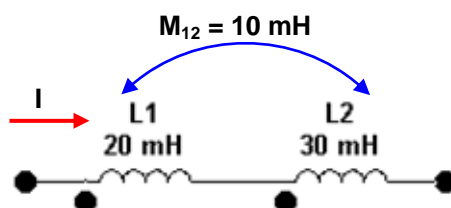


Figura 16.6 - Bobinas acopladas para o exemplo 16.5.1.

A indutância equivalente para a associação série das bobinas mutuamente acopladas, com polaridade aditiva pode ser calculada por,

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M_{12} = 20 + 30 + 2 \cdot 10 = 70 \text{ mH}$$

**Exemplo 16.5.2.** Três bobinas são enroladas sobre um mesmo circuito magnético se são conectadas em série com a polaridade indicada na figura 16.7. Determine a indutância equivalente para esse circuito.

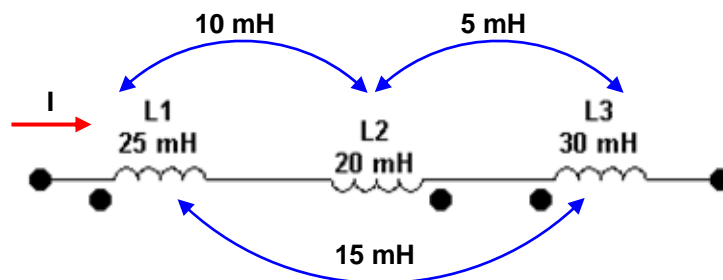


Figura 16.7 - Bobinas acopladas para o exemplo 16.5.2.

A indutância equivalente para a associação série das bobinas mutuamente acopladas, pode ser calculada por,

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 - 2M_{12} - 2M_{23} + 2M_{13} = 25 + 20 + 30 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 5 + 2 \cdot 15 = 75 \text{ mH}$$

**Exemplo 16.5.3.** A figura 16.8 apresenta o esquema de um transformador, composto por duas bobinas construídas sobre um mesmo núcleo formando um caminho magnético com coeficiente de acoplamento  $k=0,9$ . Dado que as indutâncias do primário (bobina 1) e secundário (bobina 2) são 20 mH e 5 mH, respectivamente, determine:

- a indutância mútua entre as bobinas;
- a indutância equivalente do circuito magnético;
- o número de espiras do secundário, considerando que o primário tem 100 espiras;
- a taxa de variação da corrente no primário para nesta bobina seja induzida uma tensão de 20V;

e) a tensão induzida no secundário, considerando a taxa de variação da corrente no primário.

A indutância mútua do circuito magnético pode ser calculada por,

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = 0,9 \cdot \sqrt{20 \cdot 5} = 0,9 \cdot \sqrt{100} = 9 \text{ mH}.$$

A indutância equivalente do circuito magnético pode ser calculada por,

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + 2M_{12} = 5 + 20 + 2 \cdot 9 = 43 \text{ mH}.$$

O número de espiras do secundário pode ser determinado por,

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \cdot N_1 = \sqrt{\frac{5}{20}} \cdot 100 = \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50 \text{ espiras}.$$

A taxa de variação da corrente no primário para que a tensão seja 20 V pode ser calculada por,

$$v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt}$$

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{v_1(t)}{L_1} = \frac{20}{20 \cdot 10^{-3}} = 1000 \text{ A/s}.$$

A tensão induzida no secundário pode ser calculada por,

$$e_2(t) = N_2 k \frac{L_1}{N_1} \frac{di_1(t)}{dt} = M_{12} \frac{di_1(t)}{dt} = 9 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 9 \text{ V}.$$

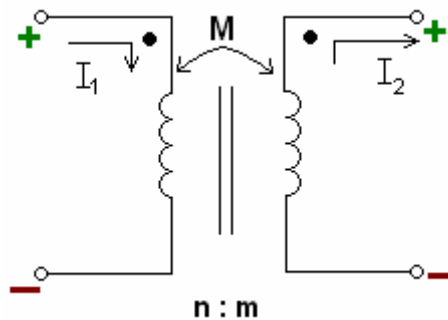


Figura 16.8 - Circuito de um transformador para o exemplo 16.5.3.

## 17. Referências Bibliográficas:

- BOYLESTAD, R. L. **Introductory circuit analylis**. 10. ed. USA: Prentice Hall, 2003.
- GIANCOLI, D. C. **Physics for scientists and engineers**. 3. ed. USA: Prentice Hall, 2000.
- EDMINISTER, J. A. **Eletromagnetismo: coleção Schaum**. 1. ed. São Paulo: McGraw Hill, 1980.
- GOZZI, G. M. G. **Circuitos magnéticos: coleção estude e use**. 1. ed. São Paulo: Érica, 1996.
- TIPLER, P. A. **Física: volume 2**. 2. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1984.
- HALLIDAY D e RESNICK, R. **Física 3**. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1984.
- MORETTO, V. P. **Eletricidade e eletromagnetismo: física hoje**. 3. ed. São Paulo: Ática, 1989.
- BONJORNO, R. A. et alli. **Física: volume 3**. São Paulo: FTD, s.d.
- BONJORNO, R. A. et alli. **Física fundamental: volume único**. São Paulo: FTD, 1993.
- DELL'ARCIPRETE, N. e GRANADO, N. V. **Física 3: eletricidade**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1983.
- CHIQUETTO E PARADA. **Física eletricidade: volume 3**. São Paulo: Scipione, 1992.
- CHIQUETTO, M. et alli. **Física: volume 3**. São Paulo: Scipione, 1996.
- MARKUS, O. **Circuitos elétricos: corrente contínua e alternada**. 1.ed. São Paulo: Érica, 2001.
- CEFET/PR. **Apostila de eletromagnetismo**. Curitiba: CEFET/PR, [sd].
- FERMINO, A. C. **Notas de Aula**. \_ETFSC, Gerência de Eletrônica, Florianópolis, 1998.
- MUSSOI, F. L. R. **Notas de Aula**. \_ETFSC, Gerência de Eletrônica, Florianópolis, 1997.
- NETTO, L. F. [http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13\\_T01.asp](http://www.feiradeciencias.com.br/sala13/13_T01.asp). Acessado em 05.03.2007.

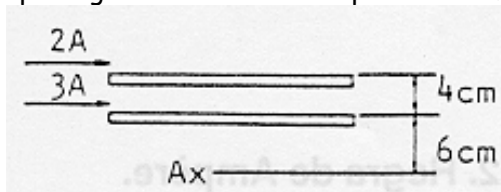
## 18. Agradecimentos:

Agradeço à professora Ana Cristina Fermino pela elaboração conjunta da parte inicial deste material (magnetismo), aos professores Jony L. Silveira e Cláudio Ebert pelas contribuições iniciais e ao prof. Luiz Azevedo pelas transparências e figuras obtidas na Internet e gentilmente cedidas.

Agradeço também a todos aqueles que fizeram uso deste material, em especial aos meus alunos, razão deste material e do meu trabalho.

## 19. Problemas Propostos

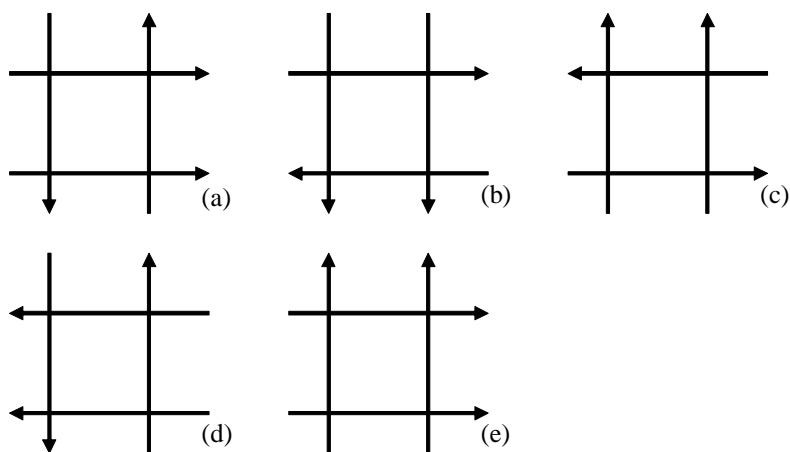
- P1) O que é campo magnético? Como pode ser representado? Quais as características dessa representação?
- P2) Qual a explicação para a origem dos fenômenos magnéticos?
- P3) Os pólos de um ímã podem ser separados? Porquê? O que é um ímã elementar?
- P4) Como se explica a imantação de um material? O que são domínios magnéticos?
- P5) Como as substâncias se classificam quanto às propriedades magnéticas? Cite exemplos.
- P6) O que é campo magnético uniforme? Quais suas características?
- P7) Quais afirmativas são verdadeiras:  
 I - Uma partícula eletrizada pode gerar isoladamente um campo elétrico ou um campo magnético, conforme esteja em repouso ou em movimento, respectivamente;  
 II - Uma agulha imantada é colocada numa região de um campo magnético. Ela se orienta na direção do campo, estando seu pólo norte no sentido do campo.  
 III - As linhas de indução de um ímã têm origem no pólo norte e terminam no pólo sul.  
 IV - Uma bússola é colocada em paralelo com um condutor. Estabelecida a corrente no condutor, a bússola se move e estaciona em uma posição que se afasta tanto mais da posição inicial quanto mais intensa for a corrente.  
 V - A corrente elétrica produzida por um campo magnético variável é denominada corrente induzida.  
 VI - Dois condutores percorridos por correntes elétricas de mesmo sentido se repelem.
- P8) Explique como Oersted descobriu o eletromagnetismo. Qual o seu princípio básico?
- P9) Quais os três fenômenos eletro-magnéticos? Explique-os e cite exemplos de aplicações práticas.
- P10) O que é permeabilidade e relutância magnéticas?
- P11) Por que a forma como o condutor está disposto influi na intensidade do campo eletromagnético? Em que caso é mais intenso?
- P12) Qual a diferença entre Campo Magnético Indutor  $H$  e Intensidade de Campo Magnético  $B$ ?
- P13) Calcular a intensidade de campo magnético indutor  $H$  a 50 cm do centro de um condutor retilíneo percorrido por uma corrente elétrica de 3 A. *R:  $0,96Ae/m$*
- P14) Qual é a intensidade de campo magnético indutor  $H$  no ponto  $A$  da figura a seguir? *R:  $11,1Ae/m$*



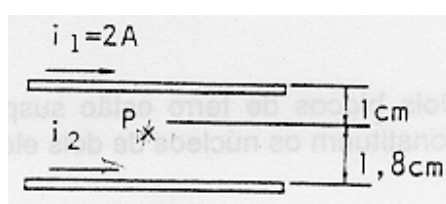
(Fonte: CEFET/PR)

- P15) Sejam dois fios de comprimento infinito, condutores, de seção reta desprezível, paralelos separados por uma distância  $d$ . Se em algum ponto situado entre os fios o campo magnético for nulo, quando os mesmos são percorridos por uma corrente elétrica, pode-se afirmar que:
- as correntes têm o mesmo sentido;
  - as correntes têm sentidos contrários;
  - as intensidades e sentidos de correntes são iguais;
  - o enunciado está errado, pois o campo magnético jamais será nulo;
  - faltam dados para responder a questão.
- P16) Quatro fios longos são percorridos por correntes iguais. A área limitada pelos quatro fios é um quadrado. A disposição que apresenta um campo magnético nulo no seu centro de simetria é:





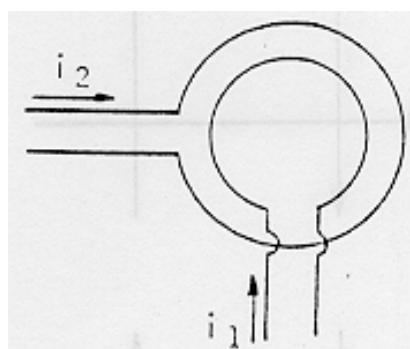
P17) Qual é a intensidade e o sentido da corrente  $I_2$ , de modo que o campo magnético no ponto P seja nulo? R:  $3,6A$



(Fonte: CEFET/PR)

P18) Qual é o valor do campo magnético indutor H no centro de uma espira circular feita com um condutor de 1m de comprimento e percorrida por uma corrente de 2 A ? R:  $6,28Ae/m$

P19) Qual é o valor do campo magnético indutor H no centro comum às duas espiras de raio 7 cm e 10 cm, dado que  $I_1 = 3 A$  e  $I_2 = 4 A$  ? Qual o sentido do campo magnético resultante ? R:  $41,4Ae/m$

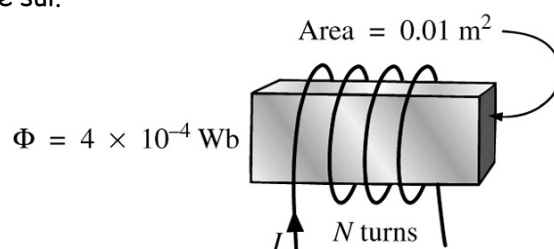


(Fonte: CEFET/PR)

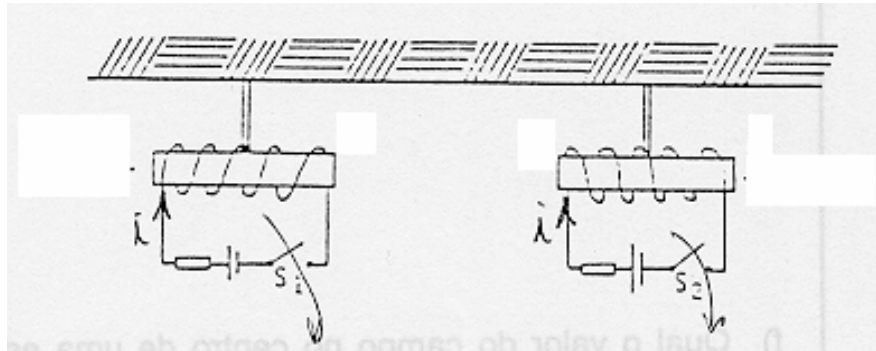
P20) Calcular o campo magnético no centro de um solenóide de 10 cm de comprimento, com 600 espiras e percorrido por uma corrente de 2 A ? R:  $12000Ae/m$

P21) Para o eletroímã da figura abaixo:

- determine a densidade de fluxo magnético no núcleo; R:  $0,04T$
- desenhe as linhas de campo magnético e sua orientação;
- indique os pólos norte e sul.



P22) Dois blocos de ferro estão suspensos por fios e constituem os núcleos de dois eletroímãs, como na figura a seguir:

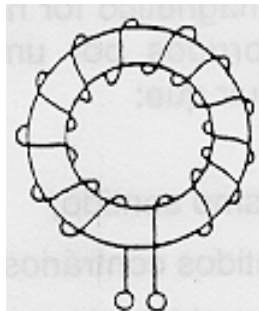


(Fonte: CEFET/PR)

Assinale a alternativa *incorreta*:

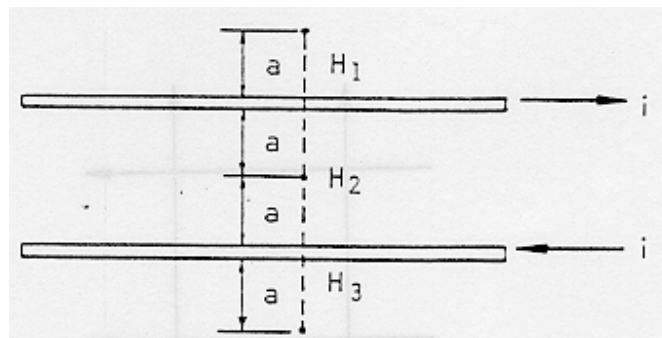
- ( ) Fechando-se a chave  $S_1$ , mantendo-se a chave  $S_2$  aberta, os dois blocos de ferro irão atrair-se;
- ( ) Fechando-se as duas chaves  $S_1$  e  $S_2$  ao mesmo tempo, os blocos irão repelir-se;
- ( ) Fechando-se a chave  $S_2$ , mantendo-se a chave  $S_1$  aberta, não haverá atração entre os blocos;
- ( ) Fechando-se as duas chaves  $S_1$  e  $S_2$  ao mesmo tempo, os blocos não irão atrair-se.

P23) Calcule o valor do campo magnético indutor no interior do núcleo de um solenóide toroidal de raio interno de 10 cm e raio externo de 12 cm, onde estão enroladas 1000 espiras percorridas por uma corrente de 1A. *Resp: 1446,9Ae/m*



(Fonte: CEFET/PR)

P24) Na figura a seguir, tem-se dois fios longos, paralelos, percorridos por correntes iguais em módulos e de sentidos contrários. Chamando-se  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  de módulos do vetor campo magnético indutor nos pontos 1, 2 e 3, qual das afirmações abaixo é a correta ?



(Fonte: CEFET/PR)

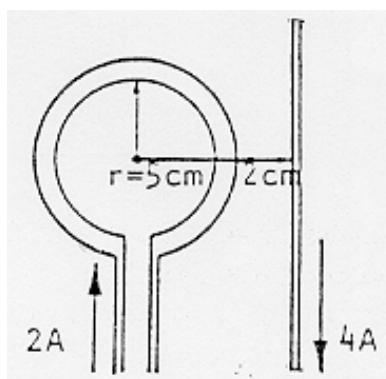
- ( )  $H_1 = H_2 = H_3$ ;
- ( )  $H_1 = H_3 > H_2$ ;
- ( )  $H_1 = H_3 < H_2$ ;
- ( )  $H_1 > H_2 > H_3$

P25) Um condutor horizontal conduz uma corrente  $I_1 = 80A$ . Um condutor paralelo a 20cm abaixo deste deve conduzir uma corrente  $I_2$  tal que vença a gravidade e flutue no ar. Este condutor possui uma massa de 0,12g/m. *R: 15A.*

P26) Duas espiras circulares concêntricas têm raios iguais a  $R_1$  e  $R_2$ , tal que  $R_1 = 5R_2$ . Dado que a corrente  $I_1 = 6 A$ , qual deve ser o valor de  $I_2$  para que no centro das espiras o campo magnético seja nulo? *R: 1,2A*

P27) Sejam dois condutores de comprimentos iguais. Com um deles, faz-se uma espira circular e com o outro, uma espira quadrada. Aplicando-se a mesma corrente às duas espiras, em qual delas tem-se o maior valor de campo magnético? *R: quadrada*

P28) Calcular o valor do campo magnético no centro da espira da figura a seguir. *R: 29,1Ae/m*



(Fonte: CEFET/PR)

P29) Calcular o valor do campo magnético produzido por um condutor de 2 m de comprimento, percorrido por uma corrente de 3 A nas seguintes situações: *R: 4,71Ae/m; 5,4Ae/m*

- quando este condutor for uma espira circular;
- quando este condutor for uma espira quadrada.

Calcular, nas duas situações, o campo magnético no centro de cada espira.

**Observação:** Para calcular-se o campo magnético de uma espira quadrada, pode-se considerar cada lado da espira como sendo um fio independente, que contribui para o campo magnético total no centro da espira. Porém, a equação da intensidade de campo magnético do condutor:

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

é deduzida considerando-se o comprimento do fio infinito. Assim, o resultado obtido será aproximado. O valor correto do campo da espira quadrada é dado pela seguinte equação:

$$H = \frac{\sqrt{2} \cdot I}{\pi \cdot d}$$

onde  $d$  é a metade do lado do quadrado.

P30) Determine a relutância de um circuito magnético se um fluxo de  $4,2 \times 10^{-4} Wb$  for estabelecido por uma FMM=400Ae. Determine o campo magnético indutor  $H$  para uma bobina de 6 polegadas de comprimento. *R: 952,4kAe/Wb; 2624,67Ae/m*

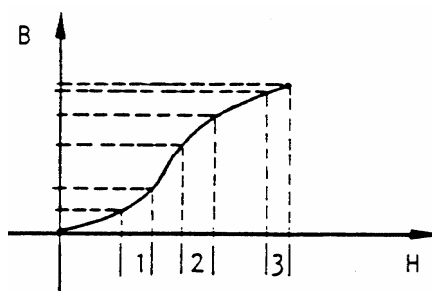
P31) Se um campo magnético indutor  $H$  de 600Ae/m for aplicado a um circuito magnético, uma densidade de fluxo de  $0,12 Wb/m^2$  é imposta. Encontre a permeabilidade  $\mu$  de um material que produza o dobro da densidade de fluxo original com o mesmo  $H$ . *R: 0,0004 Wb/A.m*

P32) Em um campo magnético indutor  $H = 100Ae/m$  é colocado um pedaço de material ferromagnético cuja permeabilidade relativa é  $\mu_R = 1600$  para este valor de  $H$ . Calcular o valor da densidade de campo magnético no interior do material. *R: 0,2T.*

P33) Para o mesmo material do item anterior, quando  $H = 300Ae/m$  temos  $B=0,3T$ . Qual o valor da permeabilidade relativa para  $H = 300Ae/m$ ? *R: 796*

P34) Uma espira de 30cm de diâmetro é submetida à circulação de uma corrente de 3A. Qual o valor da densidade de fluxo no centro dessa espira, estando esta no ar? E se colocarmos um material com permeabilidade relativa igual a 1000, qual será o novo valor de B? R:  $12,56\mu T$ ;  $12,56m T$ .

P35) Na curva de magnetização da figura abaixo, em que trecho a permeabilidade do material é maior? Justifique.

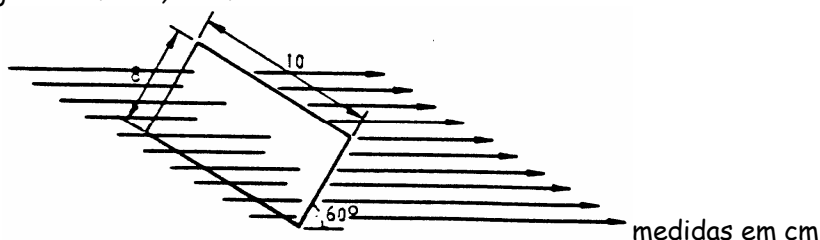


(Fonte: CEFET/PR)

P36) Explique o que é e como ocorre a saturação magnética.

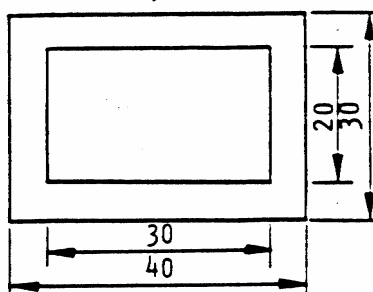
P37) O que é Fluxo Eletromagnético? De que depende? Quando é máximo e mínimo? Como pode haver variação de fluxo magnético?

P38) Qual o valor da densidade de fluxo na superfície abaixo, sendo  $\phi = 300 \cdot 10^{-5} Wb$ ? Dados: alt=8cm; larg=10cm; ângulo=60°. R:  $0,32 T$ .



(Fonte: CEFET/PR)

P39) Calcular a relutância do circuito magnético abaixo cuja espessura é 4cm. Dados em cm e  $\mu_R = 1000$ . R:  $477,4 kA/Wb$ . (Dimensões em centímetros)



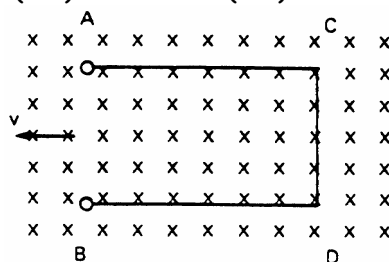
(Fonte: CEFET/PR)

P40) Explique a Indução Eletromagnética. Qual a condição necessária para que ocorra?

P41) Explique as Leis de Faraday e Lenz.

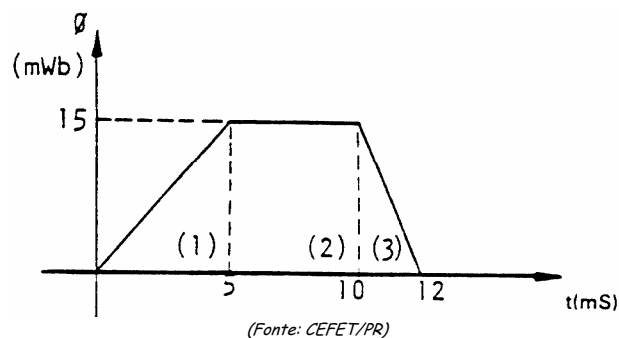
P42) No esquema da figura abaixo, podemos afirmar que existe ddp entre:

( ) A e B      ( ) C e D      ( ) A e C      ( ) A e D      ( ) B e D



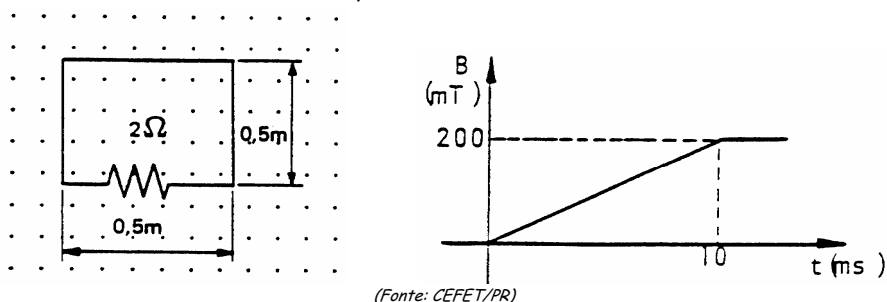
(Fonte: CEFET/PR)

P43) Com base no gráfico abaixo, qual a f.e.m. induzida nos intervalos (1), (2) e (3)?

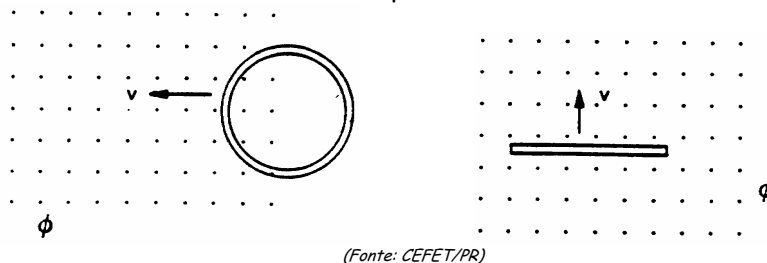


P44) Observando as figuras abaixo, podemos afirmar que:

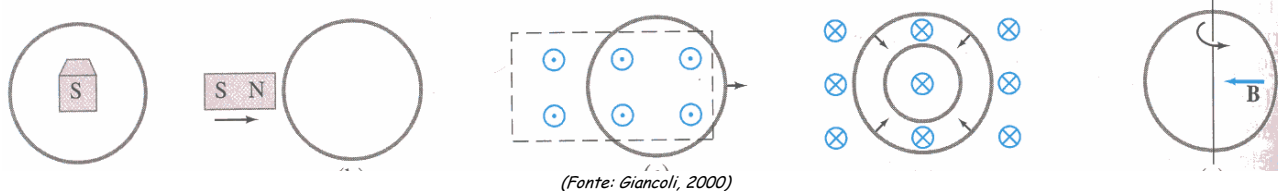
- ( ) a máxima tensão induzida será 5V;
- ( ) depois de 10ms não circula mais corrente no circuito;
- ( ) depois de 10ms só irá circular corrente no circuito se movimentarmos a espira campo afora;
- ( ) se a indução retornar a zero, decorridos os 10ms, a corrente induzida terá o mesmo sentido que tinha anteriormente;
- ( ) se a resistência tivesse a metade do seu valor, a tensão induzida teria conseqüentemente o dobro do seu valor;
- ( ) se a espira tivesse o dobro de sua área, a tensão induzida seria também o dobro.



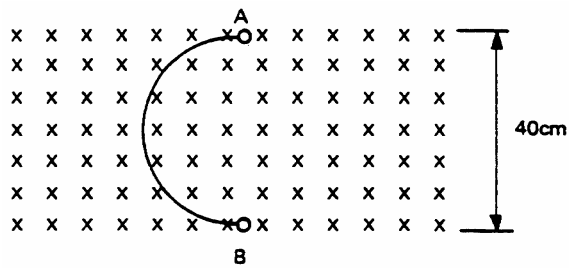
P45) Determine o sentido da corrente induzida na espira do desenho abaixo:



P46) Determine o sentido da corrente induzida em cada uma das espiras da figura abaixo (Giancoli, 3ed.)

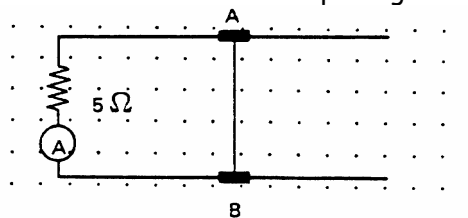


P47) Na figura abaixo, o condutor em forma de meia espira move-se horizontalmente para a direita com velocidade de 5m/s no interior de um campo magnético de intensidade 1,5T. Determinar o valor de tensão induzida em seus terminais. R: -3V



(Fonte: CEFET/PR)

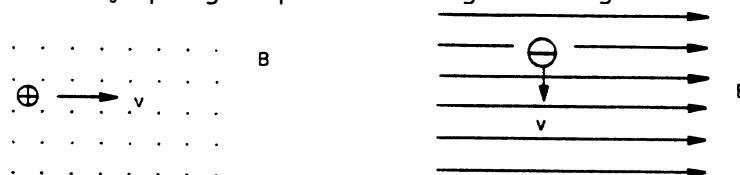
- P48) O condutor AB de 20cm de comprimento mostrado na figura abaixo move-se sobre dois trilhos com velocidade constante de 10m/s, através de um campo magnético indutor uniforme de intensidade  $10^7/4\pi$  Ae/m. O condutor de resistência desprezível está ligado a uma resistência de  $5\Omega$ . Qual a indicação do amperímetro? Se quisermos que o amperímetro indique uma corrente de 2A, qual deveria ser a velocidade do condutor no interior do campo magnético? R: 0,4A; 50m/s



(Fonte: CEFET/PR)

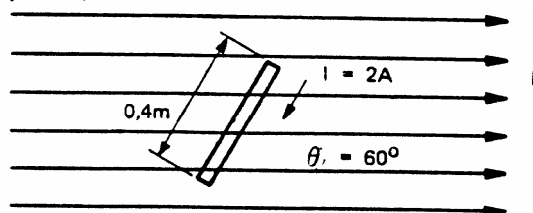
- P49) Um avião de caça viaja a uma velocidade de 1600km/h numa região onde o comportamento vertical do campo magnético terrestre é igual a 0,01T. Sabendo-se que a envergadura do avião é de 8m, determinar a fem induzida entre os extremos das asas. R: 35,2V

- P50) Determine o sentido da força que age na partícula carregada das figuras abaixo;



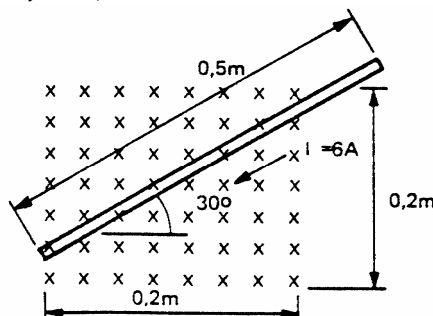
(Fonte: CEFET/PR)

- P51) Calcule a intensidade e determine a direção e o sentido do vetor força a que fica sujeito o condutor no desenho abaixo ( $B = 0,6T$ ). R: 0,42N



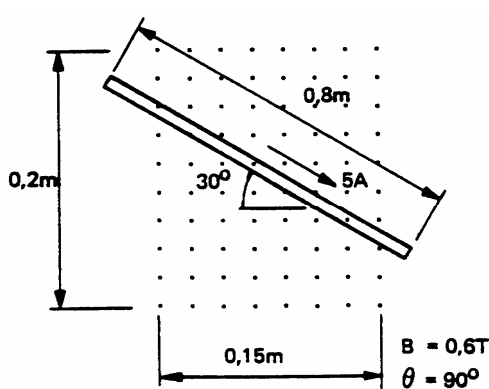
(Fonte: CEFET/PR)

- P52) Calcule a intensidade e determine a direção e o sentido do vetor força a que fica sujeito o condutor no desenho abaixo ( $\phi = 40 \cdot 10^{-3} Wb$ ). R: 1,386N

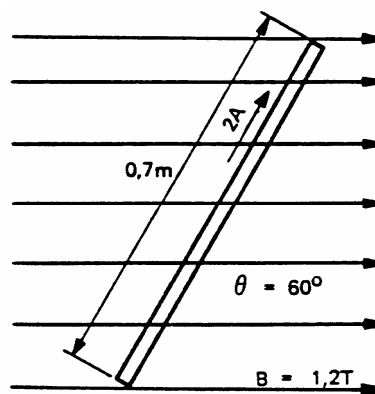


(Fonte: CEFET/PR)

- P53) Calcule a intensidade e determine a direção e o sentido do vetor força a que fica sujeito o condutor nos desenhos abaixo. R: 0,52 N; 1,45 N.

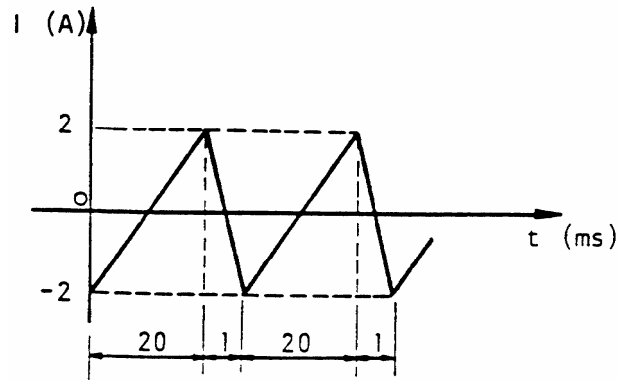


(Fonte: CEFET/PR)



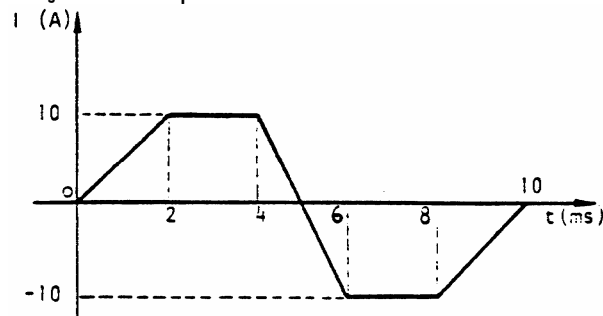
- P54) Dois condutores estão separados pela distância de 5cm. Qual a intensidade da força por metro que atua entre eles quando a corrente no primeiro for 5A e no segundo 8A? *R:  $160\mu\text{N/m}$ .*
- P55) Em um barramento condutor, cuja distância entre as barras de 5m de comprimento é de 1cm, ocorre um curto-circuito no final do barramento. Nesse instante, a corrente assume um valor de 1800A. Qual a força resultante no barramento? *R:  $324\text{N}$ .*
- P56) Em um eletroduto de 2,5m de comprimento estão dois condutores, uma fase e um neutro. Admitindo-se que a distância média entre eles seja de 10mm, calcule a força que atua entre os mesmos quando a corrente que circula for de 28A. Os condutores serão atraídos ou repelidos? *R:  $39\text{mN}$ .*
- P57) Um cabo paralelo com 2 fios é usado como extensão para uma máquina de cortar grama. O comprimento total é 30m e a distância entre eles é de 7mm. Calcule a força entre os condutores quando a corrente for de 25A. Essa força será de atração ou de repulsão? Qual seria a força se o cabo estivesse imerso em um meio onde a permeabilidade é igual a  $3 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ . *R:  $0,54\text{N}$ ;  $1,28\text{N}$ .*
- P58) Explique a auto-indução e o que influencia o valor de indutância de uma bobina.
- P59) Uma corrente de 600mA circula em uma bobina com 3600 espiras. O fluxo produzido é de  $200\mu\text{Wb}$ . Determine o coeficiente de auto-indução. *R:  $1,2\text{H}$ .*
- P60) A afirmação: "a tensão em um indutor pode variar instantaneamente, mas a corrente não", é verdadeira? Porque?
- P61) Um rádio AM possui duas bobinas com a função de antena, enroladas com fio 0,2mm de diâmetro, sobre um mesmo núcleo de ferrite ( $\mu_r = 500$ ). A bobina 1 tem comprimento 2mm e a bobina 2 tem 15mm. Determine:
- o número de espiras de cada bobina; *R:  $10e$ ;  $75e$*
  - o valor da indutância de cada bobina. *R:  $907\mu$ ;  $18,3\text{m}$*
- P62) Um transmissor de FM deverá utilizar uma bobina de  $20\mu\text{H}$  que será enrolada num molde de fenolite de núcleo de ar, cujo diâmetro é 1cm. Determine o número de espiras necessário e o diâmetro do fio para que ela tenha um comprimento de 2,5cm. *R:  $77e$*
- P63) Um solenóide com núcleo de ar de diâmetro igual a 6mm é construído com 600 espiras dispostas em duas camadas. O condutor utilizado é o AWG36. Determine:
- o valor da indutância;
  - a resistência do indutor;
  - a máxima corrente suportada pelo indutor.
- P64) Um solenóide com núcleo de ar, 5000 espiras de espaçamento uniforme, tem um comprimento de 1m e raio 2cm. Determine a indutância e a bitola do condutor utilizado.
- P65) No processo de carga de um indutor, qual o comportamento da corrente e da tensão nos seus terminais ao longo do tempo? No processo de descarga de um indutor, qual o comportamento da corrente e da tensão nos seus terminais ao longo do tempo?
- P66) Por que dizemos que um indutor armazena energia no seu campo eletromagnético? De que depende esta energia? Como pode ser calculada?
- P67) Por que pode haver faiscamento num interruptor de um circuito quando este está conectado a um indutor carregado?

- P68) Quando é colocado um núcleo de ferro num indutor, a oposição oferecida à variação da corrente num circuito é maior, porquê?
- P69) Qual o comportamento de um indutor num circuito de corrente contínua em regime permanente?
- P70) Uma bobina de 500mH é submetida à uma corrente variável no tempo, segundo o gráfico. Determine o valor de tensão induzida em cada intervalo de variação e monte o gráfico da tensão média no tempo.  $R: -100V; 2000$ .



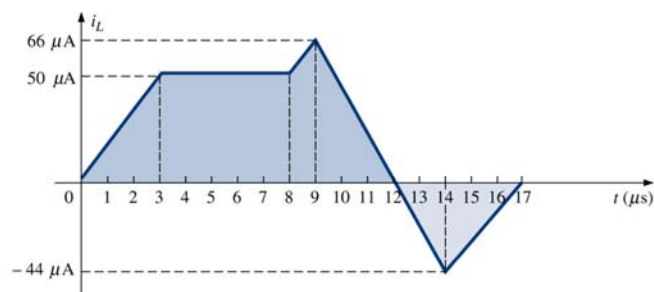
(Fonte: CEFET/PR)

- P71) Qual a indutância de uma bobina onde uma corrente variando linearmente de -5 a 3A em 2ms induz uma tensão de 100V no enrolamento?  $R: 25mH$ .
- P72) Quantas espiras deve ter uma bobina se 50mV são induzidos em seus terminais quando submetida a uma variação de fluxo de 0,02Wb/s?
- P73) A corrente cuja forma de onda é mostrada na figura abaixo circula em uma indutância pura de 30mH. Determine o valor da tensão induzida em cada intervalo de variação e monte o gráfico da variação da tensão em função do tempo.  $R: -150V; 0V; 300V$ .



(Fonte: CEFET/PR)

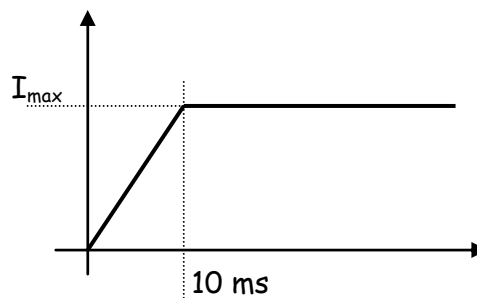
- P74) Esboce as formas de onda da tensão induzida num indutor de 0,2H submetido à corrente cujo comportamento está representado no gráfico abaixo.  $R: -3,34V, 0V, -3,2V, 4V, -2,93V$



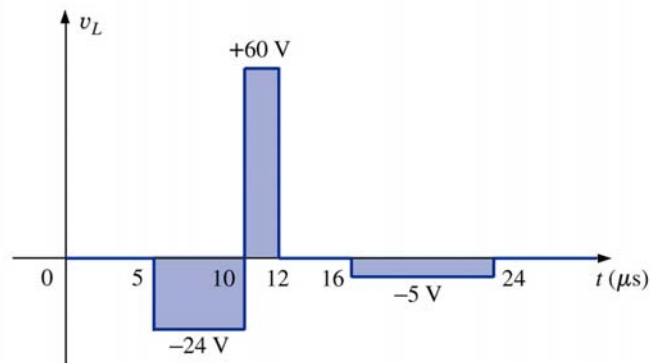
(Fonte: Boylestad, 2003)

- P75) Qual o valor médio de tensão induzida numa bobina de resistência 15 $\Omega$  e indutância 50mH no instante de ser ligada com uma fonte de tensão contínua de 300V, supondo que a corrente leva 10ms para atingir o valor de regime. Determine o valor da corrente máxima na bobina.





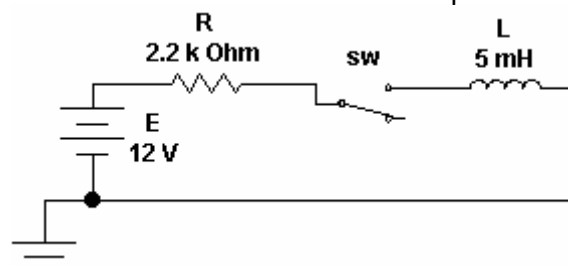
P76) Determine a forma de onda da corrente num indutor de 10mH que produz o comportamento da tensão mostrado no gráfico abaixo. A corrente no indutor é 4mA em  $t=0s$ .



(Fonte: Boylestad, 2003)

P77) Para o circuito abaixo:

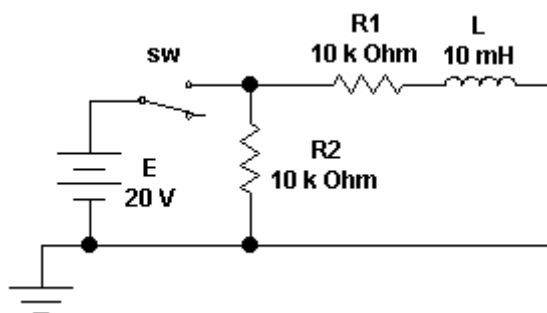
- Determine a constante de tempo;
- Determine a expressão matemática para a corrente no indutor após a chave ser fechada em  $t=0s$ ;
- Determine a expressão matemática para a tensão no indutor e no resistor após a chave ser fechada em  $t=0s$ ;
- Esboce as formas de onda da corrente, da tensão no indutor e no resistor para o comportamento de carga;
- Determine a tensão e a corrente no indutor e no resistor para  $t=3\tau$ .



(Fonte: Boylestad, 2003)

P78) Para o circuito da figura abaixo:

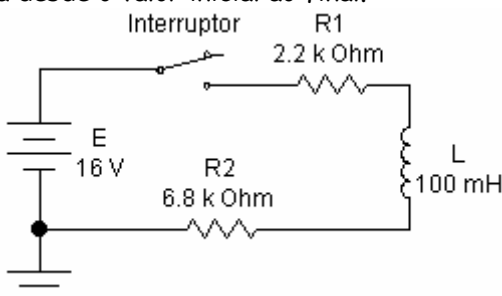
- Determine as expressões matemáticas para a corrente e a tensão no indutor quando a chave for fechada;
- Determine as expressões matemáticas para a corrente e a tensão no indutor quando a chave for aberta após cinco constantes de tempo;
- Esboce as formas de onda para os itens (a) e (b) no mesmo gráfico.



(Fonte: Boylestad, 2003)

P79) **DESAFIO!** O indutor a figura abaixo tem uma corrente inicial de 4mA no sentido horário. Determine:

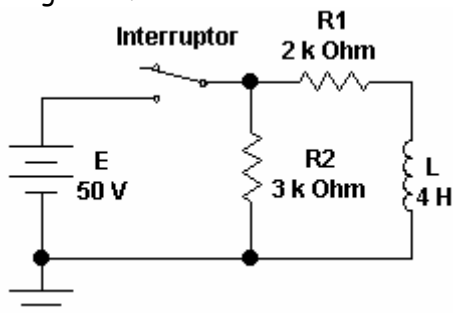
- As expressões matemáticas para a corrente e a tensão na bobina após o fechamento da chave;
- Esboce as formas de onda desde o valor inicial ao final.



(Fonte: Boylestad, 2003)

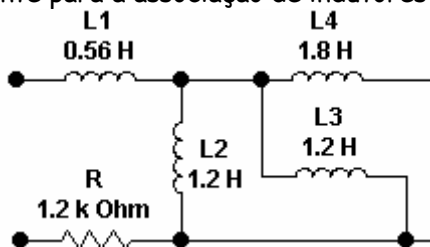
P80) **DESAFIO!** Para o circuito abaixo, determine:

- As expressões das tensões e correntes no indutor e nos resistores para cinco constantes de tempo do processo de carga;
- As expressões das tensões e correntes no indutor e nos resistores se o interruptor for aberto após cinco constantes de tempo.
- As formas de onda de tensão e corrente em todos os elementos do circuito.
- As tensões e correntes nos elementos no instante  $t=4\text{ms}$  e  $t=12\text{ms}$ ;
- Em quanto tempo a tensão atinge 25V.



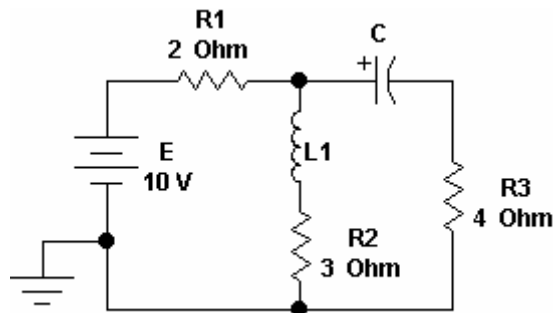
(Fonte: Boylestad, 2003)

P81) Obtenha a indutância equivalente para a associação de indutores abaixo.  $R: 1,01H$



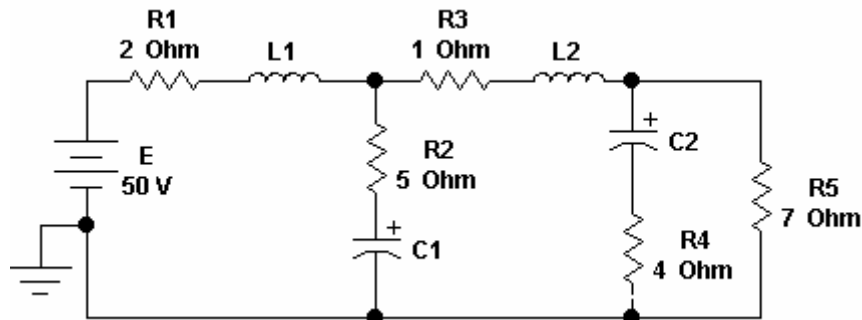
(Fonte: Boylestad, 2003)

P82) Determine a corrente no indutor e a tensão no capacitor para o circuito abaixo, considerando o regime permanente.  $R\ 2A; 6V$ .



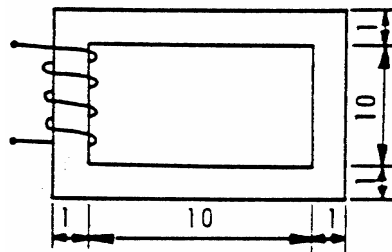
(Fonte: Boylestad, 2003)

- P83) Determine as correntes nos indutores e as tensões nos capacitores para o circuito abaixo, considerando operação em regime permanente.  $R: 5A; 40V; 35V$



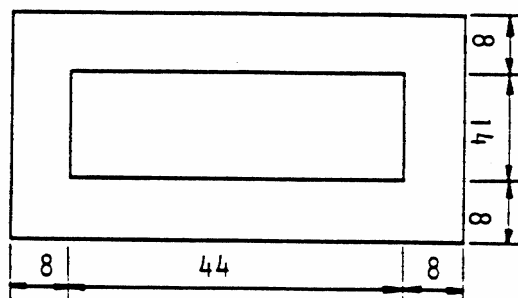
(Fonte: Boylestad, 2003)

- P84) Determine a energia armazenada em cada indutor dos dois problemas anteriores, considerando o regime permanente.
- P85) Qual deve ser o valor da corrente nas 800 espiras do circuito abaixo, a fim de que o fluxo gerado seja de  $300 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}$ ? Qual o valor do Campo Indutor  $H$ ? Dimensões em cm, espessura 1cm e  $\mu_R = 1500$ .  $R: 0,87A; 1590Ae/m$ .



(Fonte: CEFET/PR)

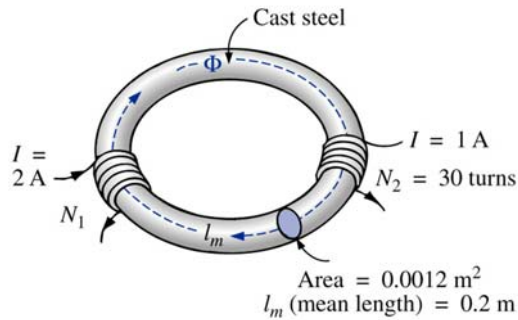
- P86) Calcule o número de espiras que deve possuir uma bobina percorrida por 1A sobre um núcleo circular toroidal, a fim de que o fluxo gerado seja de  $100 \mu \text{ Wb}$ . Raio interno 8cm e externo 9cm,  $\mu_R = 2000$ , seção transversal circular.  $R: 277$ .
- P87) Determinar o número de espiras que se deve colocar no núcleo abaixo para que, quando a corrente que as percorrer for de 10A, o fluxo produzido pela bobina seja de  $227,5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ , sendo o fator de utilização  $k = 0,9$  e o material do núcleo aço fundido. A espessura é 20cm.  $R: 585 \text{ espiras}$ .



(Fonte: CEFET/PR)

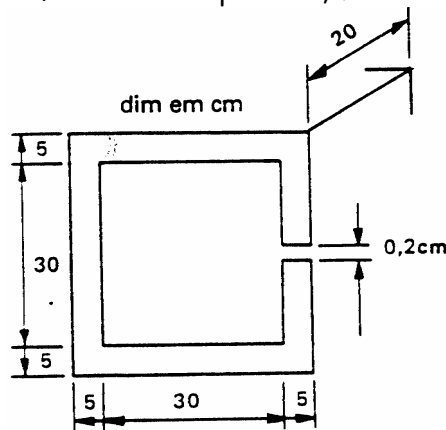
- P88) Determine o número de espiras  $N_1$  requerido para estabelecer um fluxo magnético de  $12 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  no circuito magnético da figura abaixo e determine a permeabilidade magnética do material.
- Dados: Área seção transversal:  $12 \text{ cm}^2$

Comprimento médio  $\ell = 20\text{cm}$



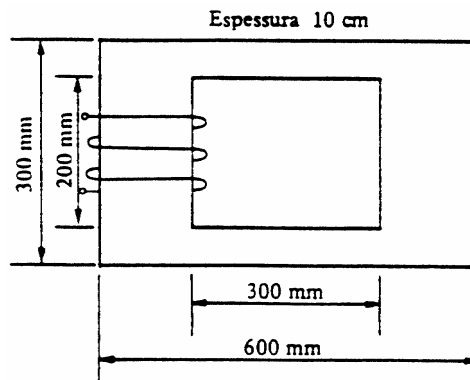
Fonte: Boylestad, 2003

- P89) Determinar o número de espiras necessário na bobina colocada no circuito magnético abaixo para que ao ser percorrida por  $4,5\text{A}$  produza um fluxo de  $80 \cdot 10^{-4}\text{Wb}$ , sendo o circuito de aço fundido, fator de utilização  $k = 0,9$  e coeficiente de dispersão  $1,1$ . R: 437 espiras.



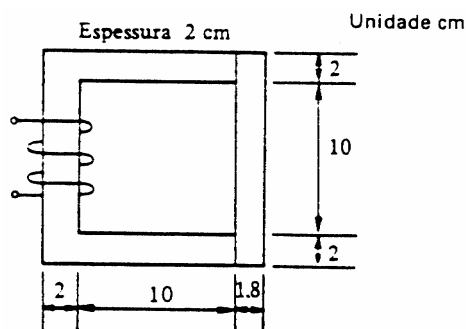
(Fonte: CEFET/PR)

- P90) Calcular valor da corrente que circula na bobina do núcleo de aço-silício abaixo e fator de utilização  $k = 0,9$ , sendo o número de espiras da bobina igual a 300 e o fluxo requerido igual a  $50 \cdot 10^{-4}\text{Wb}$ . R: 0,87A



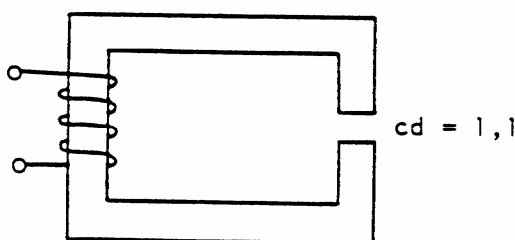
(Fonte: CEFET/PR)

- P91) O circuito magnético mostrado na figura abaixo é maciço e constituído de dois materiais diferentes. A parte em forma de C é feita em aço fundido e a parte em forma de I é feita de ferro fundido. Encontre a corrente necessária no enrolamento de 150 espiras, se a densidade de fluxo no ferro fundido é  $0,45\text{T}$ . R: 1,7A



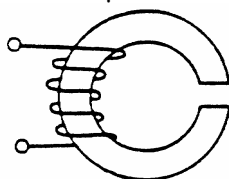
(Fonte: CEFET/PR)

- P92) O circuito magnético mostrado na figura abaixo é constituído de ferro fundido com comprimento médio de 0,44m na seção reta quadrada de 0,02x0,02m. O entreferro tem comprimento de 2mm e o enrolamento contém 400 espiras. Calcule a corrente  $I$  necessária para gerar um fluxo de 0,141mWb no entreferro.  $R$ : 2,2A.



(Fonte: CEFET/PR)

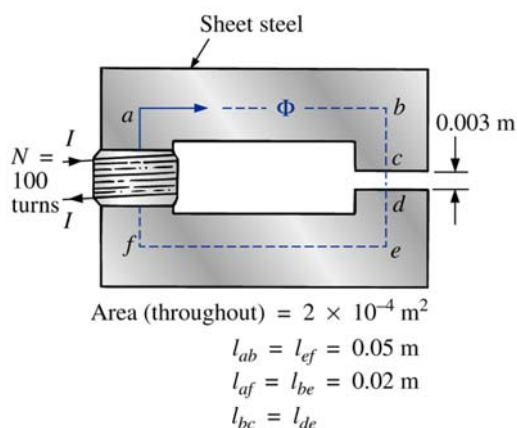
- P93) O núcleo de ferro fundido mostrado na figura abaixo possui seção transversal igual a 4cm<sup>2</sup> e comprimento médio igual a 0,438m. O entreferro de 2mm tem área aparente de 4,84cm<sup>2</sup>. A bobina possui 500 espiras e deseja-se um fluxo no entreferro igual a 1,6x10<sup>-4</sup>Wb. Calcule o valor da corrente necessária para satisfazer tal condição.  $R$ : 0,92A



Dica: fator de dispersão -  $d = \frac{A_{\text{aparente}}}{A_{\text{núcleo}}}$

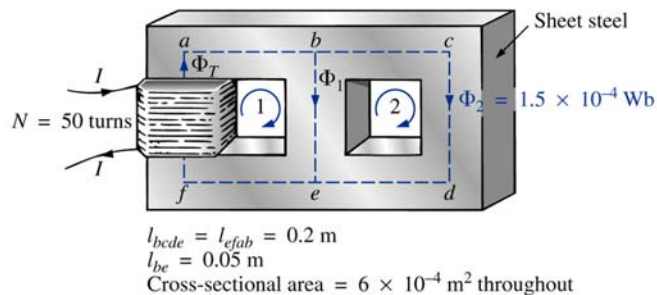
(Fonte: CEFET/PR)

- P94) Determine a corrente  $I$  requerida para estabelecer um fluxo magnético de 2,4x10<sup>-4</sup>Wb no circuito magnético da figura abaixo. Compare a FMM no entreferro com a FMM no núcleo magnético. Explique seus resultados usando o valor de  $\mu$  de cada material.



Fonte: Boylestad, 2003

- P95) **DESAFIO!** Determine a corrente  $I$  necessária para estabelecer um fluxo de 1,5x10<sup>-4</sup>Wb na seção direita do núcleo magnético da figura abaixo.

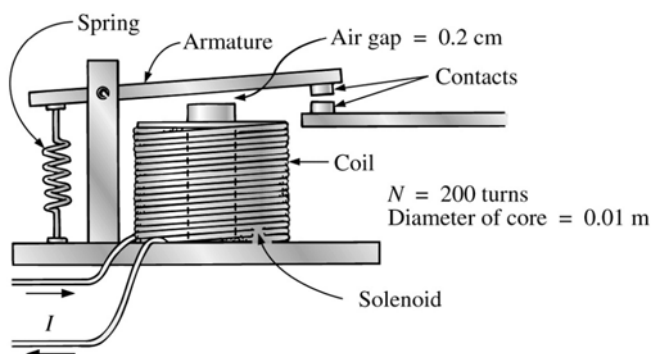


Fonte: Boylestad, 2003

P96) **DESAFIO!** Um fluxo de  $0,2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  estabelecerá força atrativa suficiente para a armadura do relé da figura abaixo, para que este feche os seus contatos.

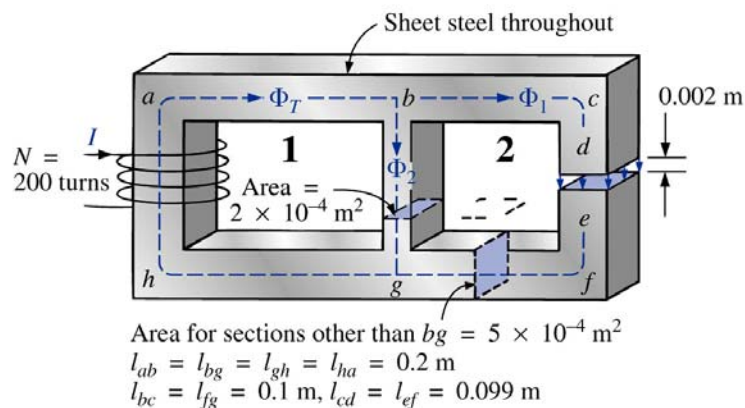
a) Determine a corrente necessária para estabelecer este fluxo assumindo que toda a queda de FMM está no entreferro.  $R: 2,028 \text{ A}$ ;

b) A força exercida na armadura é determinada pela equação  $F = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_g^2 \cdot A}{\mu_0}$  onde  $B_g$  é a densidade de fluxo no entreferro e  $A$  é a área comum do entreferro. Determine a força em Newtons exercida quando o fluxo  $\phi$  do item anterior for estabelecido.  $R: \approx 2 \text{ N}$



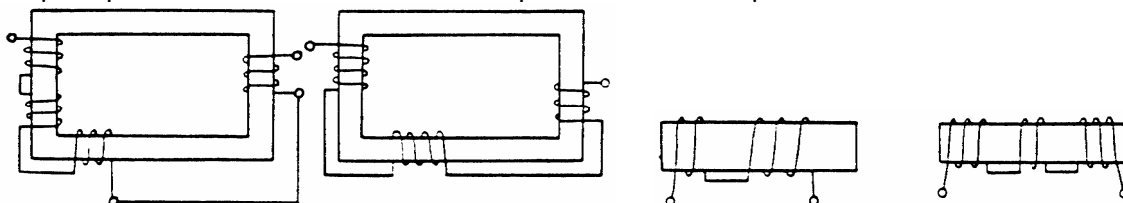
Fonte: Boylestad, 2003

P97) **DESAFIO!** Para o circuito magnético série-paralelo da figura abaixo, determine o valor da corrente requerida para estabelecer um fluxo no entreferro de  $2 \times 10^{-4} \text{ Wb}$ .



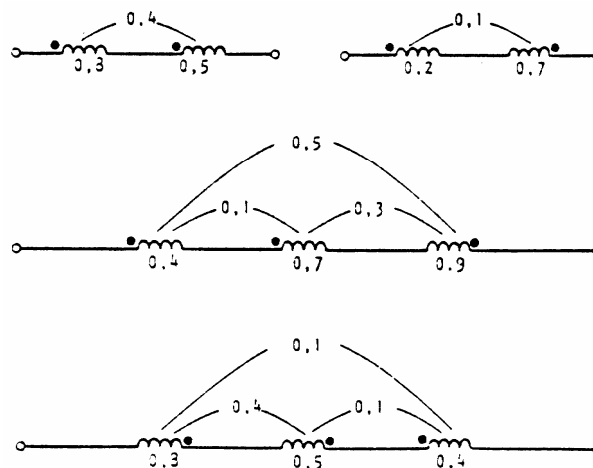
Fonte: Boylestad, 2003

- P98) Calcular o coeficiente de acoplamento de um circuito magnético, sendo que o circuito 1 produz  $600\mu\text{Wb}$ , dos quais 60 não enlaçam o circuito 2. *R: 0,9.*
- P99) Sabe-se que num circuito magnético, o fluxo de fuga é  $2\text{mWb}$ , correspondendo a 10% do fluxo mútuo. Determine o coeficiente de acoplamento. *R: 0,909.*
- P100) Em um circuito magnético, o fluxo de fuga corresponde a 2% do fluxo mútuo. Qual o valor do coeficiente de acoplamento? *R: 0,98.*
- P101) Qual a indutância mútua entre dois circuitos magneticamente acoplados se no primeiro circuito o fluxo gerado é de  $20\text{mWb}$ , dos quais  $17\text{mWb}$  se vinculam também ao circuito 2? Sabe-se que o número de espiras da bobina 1 é 360, da bobina 2 é 30 e a FMM da bobina 1 é  $720\text{A}$ . *R: 255mH.*
- P102) Dois enrolamentos estão magneticamente acoplados e têm na bobina A 200 espiras e na B 90 espiras. Uma corrente de 2A em A produz um fluxo de  $3\text{mWb}$ , dos quais  $2,8\text{mWb}$  se vinculam também ao circuito B. Se a corrente mencionada decresce para zero em 10ms, determine:
- indutância de A;
  - indutância mútua;
  - tensão induzida em A;
  - indutância B. *R: 300mH; 126mH; -60V; 60,75mH.*
- P103) Qual a indutância mútua entre dois circuitos acoplados magneticamente, sabendo-se que  $N_1 = 100$ ;  $N_2 = 200$ ;  $FMM_1 = 150\text{Ae}$ ;  $\phi_{11} = 50\mu\text{Wb}$  e  $k = 0,95$ . *R: 126,67mH.*
- P104) Qual a indutância mútua entre dois circuitos acoplados onde  $k = 0,75$ , sabendo-se que uma corrente de 2A no circuito 2 produz neste  $300\mu\text{Wb}$  e sabendo-se que  $N_1 = 1000$  e  $N_2 = 500$ ? *R: 112,5mH;*
- P105) Em um par de bobinas acopladas, a corrente contínua na bobina 1 é 5,0A e os fluxos correspondentes são  $\phi_{11}=200\mu\text{Wb}$  e  $\phi_{12}=400\mu\text{Wb}$ .  $N_1 = 500$ ;  $N_2 = 1500$ . Determine  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $M$  e  $k$ . *R: 60mH; 539,5mH; 120mH; 0,667.*
- P106) Uma bobina de 600 espiras está acoplada a uma outra de 160 espiras. Entre elas há uma indutância mútua de 400mH. Se a bobina 1 é percorrida por uma corrente que varia linearmente de 1 a 3A em 5ms, determine a tensão de indutância mútua na bobina 2. *R: -160V.*
- P107) Um transformador possui 800 espiras no primário e 80 no secundário. Foi medida a indutância mútua entre as duas bobinas e resultou em 100mH. As tensões nominais dos enrolamentos são, respectivamente, 160 e 16V. Verificou-se experimentalmente que uma corrente no enrolamento primário, variando linearmente de 0 a 1A em 10ms, induz uma tensão de 10V no secundário. Pergunta-se:
- qual a tensão induzida no secundário?
  - qual seria a tensão induzida no primário, se a mesma corrente circulasse no secundário no mesmo intervalo de tempo?
  - qual deveria ser o intervalo de tempo necessário para que essa corrente variável fosse responsável pelo aparecimento da tensão nominal no primário? *R: 10V; 10V; 625μs.*
- P108) Marque a polaridade das bobinas abaixo, representando-as esquematicamente.



(Fonte: CEFET/PR)

- P109) Determine o valor da indutância equivalente. Indutâncias em henrys. *R: 2,1; 0,7; 0,6; 2,1.*

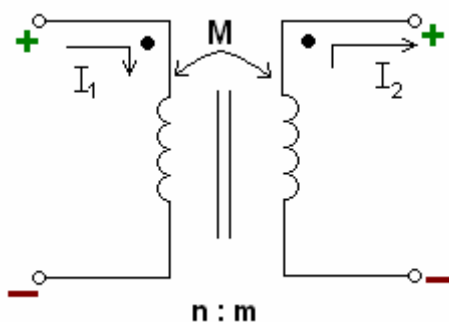


(Fonte: CEFET/PR)

P110) Para as bobinas acopladas num mesmo núcleo de ferro, onde o coeficiente de acoplamento é 0,8:

- determine a indutância do secundário considerando a mutua de 80 mH;
- determine a tensão no primário e no secundário se o fluxo magnético no primário varia a uma taxa de 0,08 Wb/s;
- determine a tensão no primário e no secundário se a corrente no primário varia a uma taxa de 0,3 A/ms;
- repita os itens (a) a (c) para um coeficiente de acoplamento unitário;
- repita os itens (a) a (c) para um coeficiente de acoplamento de 0,2.

Dados:  $L_1 = 50 \text{ mH}$ ;  $N_1 = n = 20 \text{ espiras}$ ;  $N_s = m = 80 \text{ espiras}$ .





## Anexo A – Magnetismo Terrestre

A Terra pode ser considerada um imã gigantesco, como mostra a figura A1. O magnetismo terrestre é atribuído a enormes correntes elétricas que circulam no núcleo do planeta, que é constituído de ferro e níquel no estado líquido, devido às altas temperaturas.

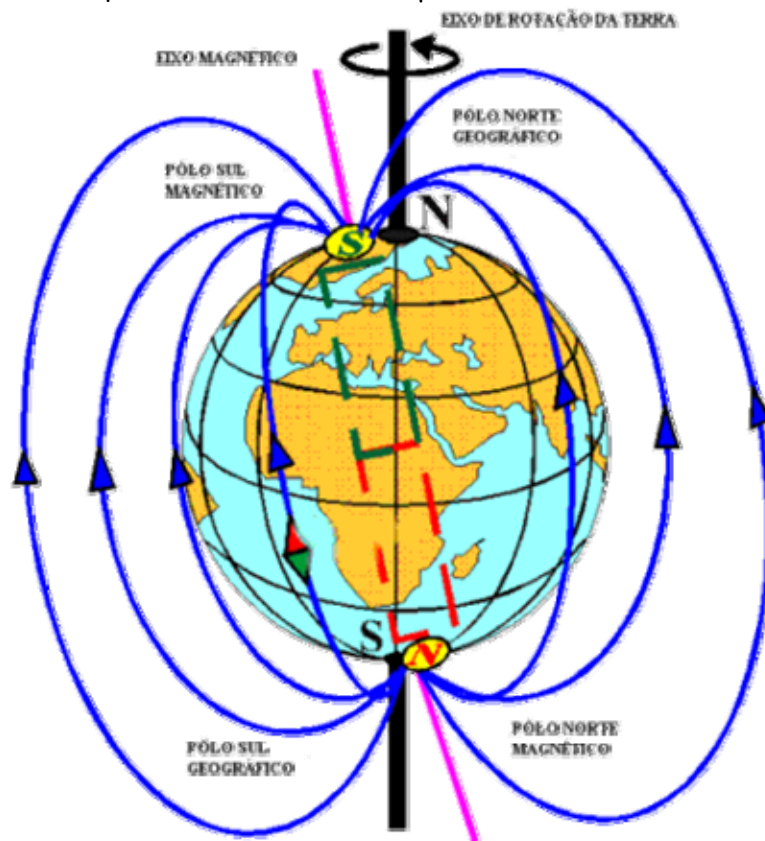


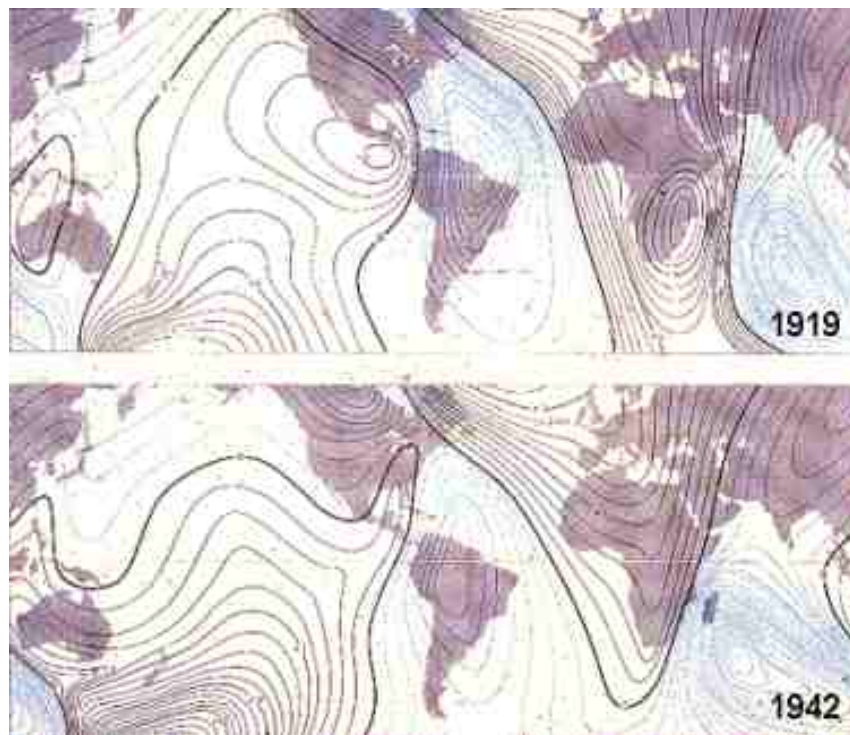
Figura A1 – magnetismo terrestre.

Por convenção, chamamos de pólo norte da agulha magnética aquele que aponta para a região próxima do pólo norte geográfico. Entretanto, como sabemos, pólos de mesmo nome se repelem e de nomes contrários se atraem. Então podemos concluir que: I) se a agulha magnética aponta para uma região próxima do pólo norte geográfico é porque nessa região existe um pólo sul magnético; II) a mesma agulha aponta, o seu pólo sul magnético, para uma região próxima do pólo sul geográfico. Logo, nas proximidades do pólo sul geográfico existe o pólo norte magnético.

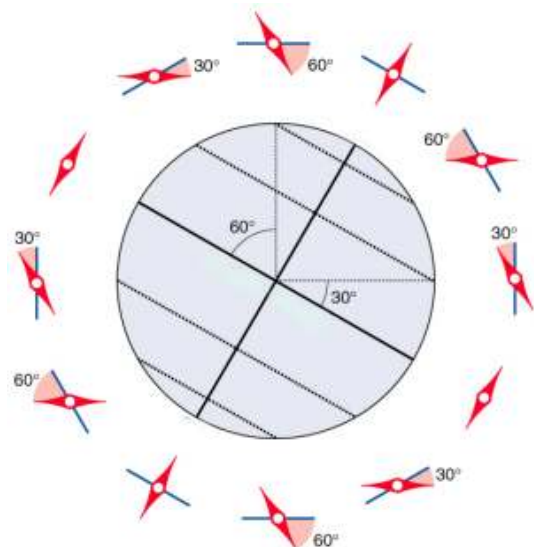
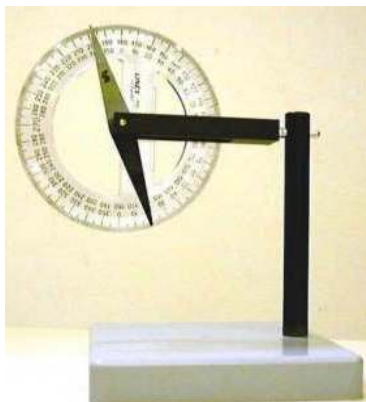
Em vários locais da Terra, os pólos norte geográfico e sul magnético têm seus sentidos coincidentes. Na maioria dos lugares, entretanto, forma-se um ângulo entre a direção do norte geográfico, ou norte verdadeiro, e a direção indicada pela bússola. Este ângulo entre as direções do pólo norte geográfico e do pólo sul magnético é chamado de **declinação magnética**. Essa declinação é representada em mapas, como mostra a figura A2. É importante notar que esse tipo de mapa é datado, pois a localização dos pólos magnéticos se altera com o tempo. As linhas mostram a declinação magnética média. Numa escala maior, representando regiões menores, elas podem ter traçados muito irregulares, por causa das condições geológicas da região. Nas proximidades das jazidas de ferro, por exemplo, o sentido do campo magnético terrestre é fortemente alterado.

Além da declinação magnética, a configuração do campo magnético causa outro efeito, a **inclinação magnética**. A agulha da bússola não se mantém na horizontal, mas permanece inclinada. Essa inclinação só pode ser vista com a utilização de bússolas especiais. Veja a foto da figura A3. A inclinação magnética é

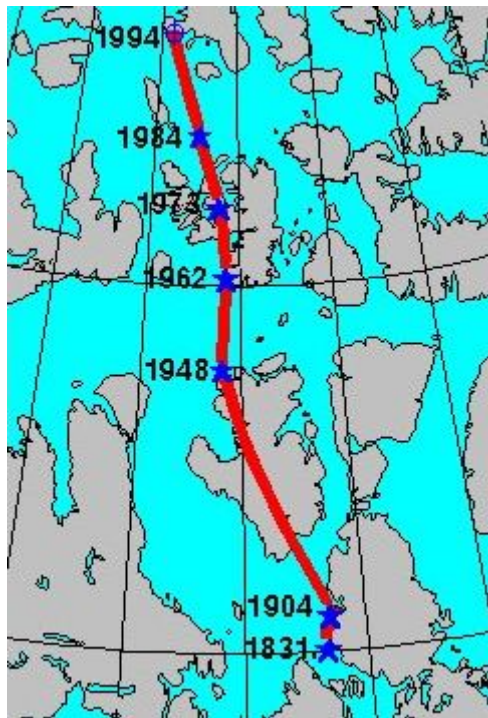
mais acentuada nas regiões de maior latitude, próximas aos pólos magnéticos. Enquanto em São Paulo ela é de cerca de  $20^\circ$  com o pólo norte da bússola apontando para cima. Perto dos pólos magnéticos, essa inclinação é próxima de  $90^\circ$ , pois nessas regiões a direção do campo magnético é praticamente vertical.



*Figura A2 - mapas de declinação magnética.*



*Figura A3 - inclinação magnética.*



*Figura A4 - posição do pólo sul magnético terrestre ao longo dos anos.*

As diversas propriedades magnéticas das rochas subsuperficiais podem causar alterações no campo magnético terrestre de um lugar para outro. Além disso, podemos notar num mesmo local, de uma época para outra, variações magnéticas bastante evidentes. Medições feitas num determinado lugar, durante um longo período de tempo, mostram que o campo magnético sofreu tanto mudanças rápidas, algumas vezes cíclicas, quantas mudanças lentas. Entretanto, a velocidade da variação é imprevisível. Já que nem a intensidade, nem a direção das variações são constantes. Os pólos magnéticos vêm mudando sua localização no decorrer do tempo. A figura A4 mostra a posição do pólo sul magnético (pólo norte geográfico) ao longo de vários anos.

## Anexo B – Tabela de Fios de Cobre Esmaltados

Fonte: BARBI, I. **Projetos de fontes chaveadas**. Florianópolis: Edição do Autor, 2001.

AWG	Diâmetro Cobre (cm)	Área Cobre (cm <sup>2</sup> )	Diâmetro Isolamento (cm)	Área Isolamento (cm <sup>2</sup> )	OHMS/CM 20 °C	OHMS/CM 100 °C	AMP. para 450A/cm <sup>2</sup>
10	0,259	0,052620	0,273	0,058572	0,000033	0,000044	23,679
11	0,231	0,041729	0,244	0,046738	0,000041	0,000055	18,778
12	0,205	0,033092	0,218	0,037309	0,000052	0,000070	14,892
13	0,183	0,026243	0,195	0,029793	0,000066	0,000080	11,809
14	0,163	0,020811	0,174	0,023800	0,000083	0,000111	9,365
15	0,145	0,016504	0,156	0,019021	0,000104	0,000140	7,427

16	0,129	0,013088	0,139	0,015207	0,000132	0,000176	5,890
17	0,115	0,010379	0,124	0,012164	0,000166	0,000222	4,671
18	0,102	0,008231	0,111	0,009735	0,000209	0,000280	3,704
19	0,091	0,006527	0,100	0,007794	0,000264	0,000353	2,937
20	0,081	0,005176	0,089	0,006244	0,000333	0,000445	2,329
21	0,072	0,004105	0,080	0,005004	0,000420	0,000561	1,847

22	0,064	0,003255	0,071	0,004013	0,000530	0,000708	1,465
23	0,057	0,002582	0,064	0,003221	0,000668	0,000892	1,162
24	0,051	0,002047	0,057	0,002586	0,000842	0,001125	0,921
25	0,045	0,001624	0,051	0,002078	0,001062	0,001419	0,731
26	0,040	0,001287	0,046	0,001671	0,001339	0,001789	0,579
27	0,036	0,001021	0,041	0,001344	0,001689	0,002256	0,459

AWG	Diâmetro Cobre (cm)	Área Cobre (cm <sup>2</sup> )	Diâmetro Isolamento (cm)	Área Isolamento (cm <sup>2</sup> )	OHMS/CM 20 °C	OHMS/CM 100 °C	AMP. para 450A/cm <sup>2</sup>
28	0,032	0,000810	0,037	0,001083	0,002129	0,002845	0,364
29	0,029	0,000642	0,033	0,000872	0,002685	0,003587	0,289
30	0,025	0,000509	0,030	0,000704	0,003386	0,004523	0,229
31	0,023	0,000404	0,027	0,000568	0,004269	0,005704	0,182
32	0,020	0,000320	0,024	0,000459	0,005384	0,007192	0,144
33	0,018	0,000254	0,022	0,000371	0,006789	0,009070	0,114

34	0,016	0,000201	0,020	0,000300	0,008560	0,011437	0,091
35	0,014	0,000160	0,018	0,000243	0,010795	0,014422	0,072
36	0,013	0,000127	0,016	0,000197	0,013612	0,018186	0,057
37	0,011	0,000100	0,014	0,000160	0,017165	0,022932	0,045
38	0,010	0,000080	0,013	0,000130	0,021644	0,028917	0,036
39	0,009	0,000063	0,012	0,000106	0,027293	0,036464	0,028

40	0,008	0,000050	0,010	0,000086	0,034417	0,045981	0,023
41	0,007	0,000040	0,009	0,000070	0,043399	0,057982	0,018

## Anexo C - Informações Relevantes:

### Alfabeto Grego:

Alfa	A	$\alpha$	Iota	I	$\iota$	Rô	P	$\rho$
Beta	B	$\beta$	Capa	K	$\kappa$	Sigma	$\Sigma$	$\sigma$ $\varsigma$
Gama	$\Gamma$	$\gamma$	Lambda	$\Lambda$	$\lambda$	Tau	T	$\tau$
Delta	$\Delta$	$\delta$	Mi	M	$\mu$	Ípsilon	Y	$\upsilon$
Epsílon	E	$\varepsilon$	Ni	N	$\nu$	Fi	$\Phi$	$\phi$ $\varphi$
Dzeta	Z	$\zeta$	Csi	$\Xi$	$\xi$	Qui	X	$\chi$
Eta	H	$\eta$	Ômicron	O	$o$	Psi	$\Psi$	$\psi$
Teta	$\Theta$	$\theta$	Pi	$\Pi$	$\pi$	Ômega	$\Omega$	$\omega$

### Constantes e Valores Importantes

Quantidade	Símbolo	Valor mais preciso	Valor Usual <sup>19</sup>
Velocidade da Luz no Vácuo	c	$2,99792458 \times 10^8$ m/s	$3,00 \times 10^8$ m/s
Aceleração Gravitacional	g	$9,80665$ m/s <sup>2</sup>	$9,8$ m/s <sup>2</sup>
Constante Gravitacional	G		$6,67 \times 10^{-11}$ Nm <sup>2</sup> /kg <sup>2</sup>
Carga do Elétron	e'	$1,60217733 \times 10^{-19}$ C	$1,60 \times 10^{-19}$ C
Permeabilidade do Vácuo	$\mu_0$		$4\pi \times 10^{-7}$ Tm/A (Wb/Am)
Permissividade do Vácuo	$\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \cdot \mu_0}$	$8,854187817 \times 10^{-12}$ C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup>	$8,85 \times 10^{-12}$ C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup>
Massa do elétron	$m_e$		$9,11 \times 10^{-31}$ kg
Massa do próton	$m_p$		$1,6726 \times 10^{-27}$ kg
Massa do nêutron	$m_n$		$1,6749 \times 10^{-27}$ kg
Massa atômica			$1,6605 \times 10^{-27}$ kg
Caloria	cal		4,186 J
Zero Absoluto	OK		-273,15 °C
Radiano	rad		57,2957795 °
Pi	$\pi$		3,1415927
Neperiano	e		2,7182818

<sup>19</sup> Os valores usuais são aproximações dos valores mais precisos obtidos atualmente e que estão disponíveis na referência bibliográfica [Giancoli].

## Múltiplos Métricos:

Prefixo	Símbolo	Valor
Yotta	Y	$10^{24}$
Zetta	Z	$10^{21}$
Exa	E	$10^{18}$
Peta	P	$10^{15}$
Tera	T	$10^{12}$
Giga	G	$10^9$
Mega	M	$10^6$
Kilo	k	$10^3$
Hecto	h	$10^2$
Deca	da	$10^1$
Deci	d	$10^{-1}$
Centi	c	$10^{-2}$
Mili	m	$10^{-3}$
Micro	$\mu$	$10^{-6}$
Nano	n	$10^{-9}$
Pico	p	$10^{-12}$
Femto	f	$10^{-15}$
Atto	a	$10^{-18}$
Zepto	Z	$10^{-21}$
Yocto	Y	$10^{-24}$

### Origem dos prefixos:

- **Exa:** deriva da palavra grega 'hexa' que significa 'seis'.
- **Penta:** deriva da palavra grega 'pente' que significa 'cinco'.
- **Tera:** do grego 'téras' que significa 'monstro'.
- **Giga:** do grego 'gígas' que significa 'gigante'.
- **Mega:** do grego 'mégas' que significa 'grande'.
- **Hecto:** do grego 'hekatón' que significa 'cem'.
- **Deca:** do grego 'déka' que significa 'dez'.
- **Deci:** do latim 'decimu' que significa 'décimo'.
- **Mili:** do latim 'millesimu' que significa 'milésimo'.
- **Micro:** do grego 'mikrós' que significa 'pequeno'.
- **Nano:** do grego 'nánnos' que significa 'anão'.
- **Pico:** do italiano 'piccolo' que significa 'pequeno'.
- **Femto:** do dinamarquês 'femten' que significa 'quinze'.
- **Atto:** do dinamarquês 'atten' que significa 'dezoito'.
- **Zepto e Zetta:** derivam do latim 'septem' que significa 'sete'.
- **Yocto e Yotta:** derivam do latim 'octo' que significa 'oito'.

## Símbolos Matemáticos:

$\propto$	é proporcional a
$=$	é igual a
$\approx$	é aproximadamente igual a
$\neq$	não é igual a (diferente de)
$>$	é maior que
$>>$	é muito maior que
$<$	é menor que
$<<$	é muito menor que
$\geq$	é maior ou igual a
$\leq$	é menor ou igual a
$\Sigma$	soma de (somatória)
$\bar{x}$	valor médio de x
$\Delta x$	variação em x
$\Delta x \rightarrow 0$	$\Delta x$ tende a zero
$\perp$	é perpendicular a



## Conversões e Equivalências de Unidades:

### Matemáticas:

$$\sqrt{2} = 1,4142136$$

$$\sqrt{3} = 1,7320508$$

$$1 \text{ rad} = 57,2957795^\circ$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rpm} = 0,1047 \text{ rad/s}$$

### Ângulo:

$$1 \text{ rad} = 57,30^\circ = 180^\circ/\pi$$

$$1^\circ = 0,01745 \text{ rad}$$

$$1 \text{ rpm} = 0,1047 \text{ rad/s}$$

### Comprimento:

$$1 \text{ polegada (in)} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ pé (ft)} = 30,48 \text{ cm}$$

$$1 \text{ milha (mi)} = 1,61 \text{ km}$$

$$1 \text{ milha marítima} = 1,852 \text{ km}$$

$$1 \text{ jarda} = 0,9144 \text{ m}$$

$$1 \text{ ângstron (\AA)} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ ano-luz} = 9,46 \times 10^{15} \text{ m}$$

### Área:

$$1 \text{ in}^2 = 6,452 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ft}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ hectare (ha)} = 10.000 \text{ m}^2$$

### Volume:

$$1 \text{ litro (L)} = 1000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ galão americano} = 3,79 \text{ L}$$

$$1 \text{ pé cúbico (ft}^3\text{)} = 0,0283 \text{ m}^3$$

$$1 \text{ pé cúbico (ft}^3\text{)} = 28,32 \text{ L}$$

### Tempo:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ dia} = 86400 \text{ s}$$

$$1 \text{ ano} = 365,24 \text{ dias}$$

### Massa:

$$1 \text{ libra (lb)} = 0,4536 \text{ kg}$$

### Velocidade:

$$1 \text{ km/h} = 0,278 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ mi/h} = 1,609 \text{ km/h}$$

$$1 \text{ m/s} = 3,60 \text{ km/h}$$

$$\text{ft/s} = 0,3048 \text{ m/s}$$

### Força:

$$1 \text{ libra força (lbf)} = 4,45 \text{ N}$$

$$1 \text{ dina (din)} = 10^{-5} \text{ N}$$

### Energia:

$$1 \text{ J} = 0,239 \text{ cal}$$

$$1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$$

$$1 \text{ kcal} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} = 3,97 \text{ BTU}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = 860 \text{ kcal}$$

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

$$1 \text{ BTU} = 1055 \text{ J}$$

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

### Potência:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 3,42 \text{ BTU/h}$$

$$1 \text{ BTU/h} = 0,293 \text{ W}$$

$$1 \text{ HP} = 746 \text{ W}$$

$$1 \text{ CV} = 736 \text{ W}$$

### Pressão:

$$1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ lb/m}^2 = 6,9 \times 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ lb/ft}^2 = 47,88 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ lb/in}^2 = 6895 \text{ Pa}$$

## Relações Matemáticas:

### Álgebra:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$
$$a^{(x+y)} = a^x \cdot a^y$$
$$a^{(x-y)} = \frac{a^x}{a^y}$$

### Logarítmos:

$$\log a = x \quad \rightarrow \quad a = 10^x$$
$$\ln a = x \quad \rightarrow \quad a = e^x$$

$$\log a + \log b = \log(a \cdot b)$$

$$\log a - \log b = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\log(a)^n = n \cdot \log(a)$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln(a)^n = n \cdot \ln(a)$$

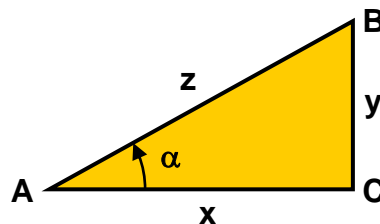
### Equações de Segundo Grau:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Série Binomial:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!} + \dots$$

### Trigonometria:



$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{z}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{z}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{y}{x}$$

### Identidades Trigonômétricas:

$$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$$



$$\begin{aligned}\sin(2\alpha) &= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2 \cdot \cos^2\alpha - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha \\ \sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pm \cos(\alpha) \\ \cos\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) &= \mp \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) \pm \cos(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) \mp \sin(\alpha) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \\ \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\end{aligned}$$

**Geometria:**

Comprimento de uma circunferência de raio  $r$ :

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Área de um círculo de raio  $r$ :

$$A = \pi \cdot r^2$$

Volume de uma esfera de raio  $r$ :

$$V = 4 \cdot \pi \cdot \frac{r^3}{3}$$

Área da superfície de uma esfera de raio  $r$ :

$$A_{\text{esfera}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Volume de um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ :

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

## Pesquisas Propostas:

Muitos equipamentos e tecnologias atuais fazem uso dos fenômenos magnéticos. Abaixo o professor apresenta apenas alguns tópicos interessantes para o aluno pesquisar e buscar a compreensão do funcionamento:

- Motor de corrente contínua e comutador do motor;
- Alto-falantes e microfones;
- Auroras Boreais;
- Tubo de Raios Catódicos (CRT) e Tubos de Imagem;
- Experimento de Millikan;
- Efeito Hall;
- Espectrômetro de Massa e Equação de Lorentz;
- Cabos Coaxiais;
- Campainhas;
- Relés e contactores Eletromagnéticos;
- *Reed Switch*;
- Cabeça de Gravação e Leitura Magnética de Cassetes, VHS, Cartões, etc.
- Discos Rígidos (HDD- *Hard Disk Drive*) e Diskettes;
- Sensores Magnéticos;
- Gerador de corrente contínua;
- Aparelho de exame médico por Ressonância Magnética;
- Detector de metais;
- Reator eletromagnético de lâmpadas fluorescentes;
- Fechadura magnética;
- Disjuntor termo-magnético;
- Motor de passo.

### Projeto de Bobinas:

	$L_1 = 50 \mu\text{H}$	$L_2 = 30 \mu\text{H}$	$L_3 = 10 \mu\text{H}$		
Diâmetro interno	1 cm	1,5 cm	2 cm		
Camadas	3	2	2		
Condutor	27	27	27		