Função Quadrática

Definição

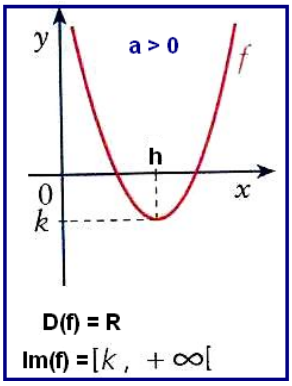
Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de IR em IR dada por uma lei da forma $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, onde a, b e c são números reais e a $\neq$ 0.

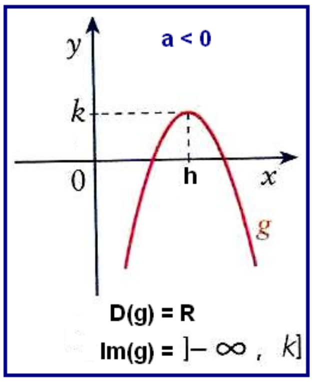
Vejamos alguns exemplos de função quadráticas:

1. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$, onde a = 3, b = - 4 e c = 1
2. $f(x) = x^2 - 1$, onde a = 1, b = 0 e c = -1
3. $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$, onde a = 2, b = 3 e c = 5
4. $f(x) = -x^2 + 8x$, onde a = -1, b = 8 e c = 0
5. $f(x) = -4x^2$, onde a = - 4, b = 0 e c = 0

<u>Gráfico da função quadrática</u>: O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **<u>parábola</u>**. Seu domínio é o conjunto dos números reais e sua imagem é um subconjunto dos números reais.

Ou seja, **D(f) = IR** e **Im(f) $\subset$ IR**.



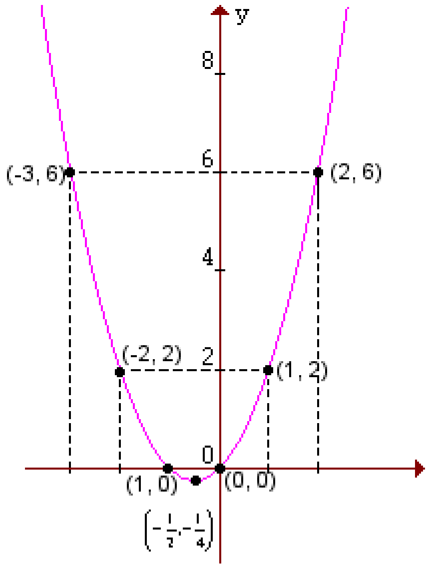


Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 + x$:

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, ligamos os pontos assim obtidos.

x	y
-3	6
-2	2
-1	0
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
0	0
1	2
2	6



Observação:

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notaremos sempre que:

- se **a > 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para cima**;
- se **a < 0**, a parábola tem a **concavidade voltada para baixo**;

Zero e Equação do 2º Grau

Chama-se zeros ou raízes da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, a $\neq$ 0, os números reais x tais que f(x) = 0.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

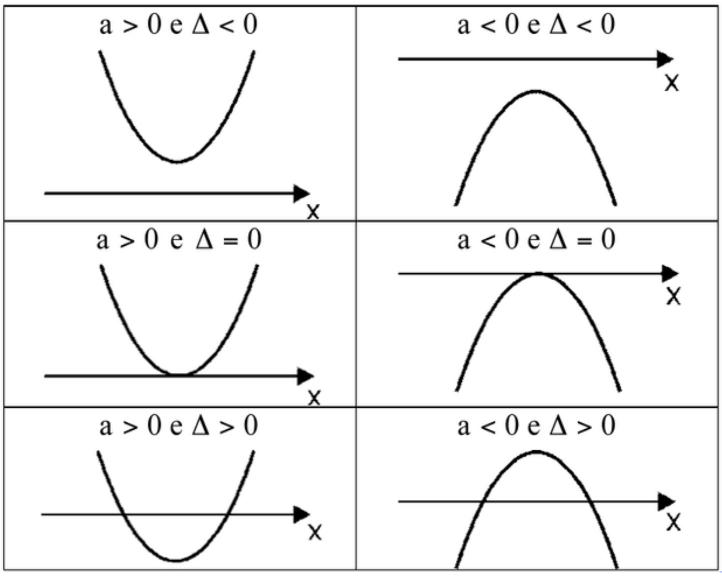
Temos:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Observação

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$, chamado discriminante, a saber:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (para ser mais preciso, há duas raízes iguais);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

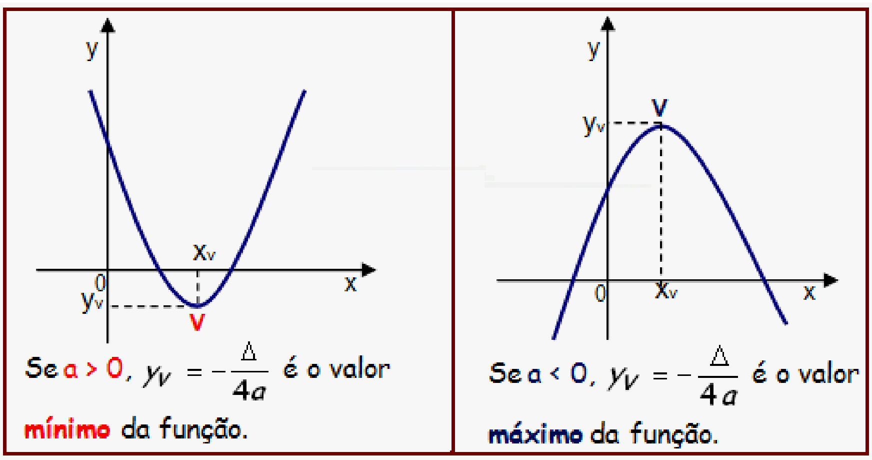


<u>Vértice da Parábola</u>: Toda parábola tem um ponto de ordenada máxima ou um ponto de ordenada mínima. A esse ponto chamaremos vértice da parábola e o representaremos por V(**x_v,y_v**) onde*:*

$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a} \text{ e } y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$. Assim: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

<u>Observação:</u> De acordo com o valor de **<u>a</u>** na função **f(x) = ax² + bx + c**, as ordenadas do vértice recebem as denominações de **valor máximo** ou **valor mínimo**.

Este conceito é importante na resolução de exercícios onde os resultados são os **maiores** ou os **menores** possíveis.



ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Determinar o sinal de uma função do 2º grau: **f(x): ax² + bx + c** (**a**, **b** e **c** reais com **a** diferente de 0 (zero)) são estudados por meio de análises do coeficiente **a** e de **delta**

Quando **f(x) >0,** **f(x) = 0** ou **f(x) < 0**

1º Iguala a função a zero, e calcule-se as raízes ou zeros da função.
2º Marca na reta numérica as raízes encontrada.
3º Fora das raízes tem o mesmo sinal do coeficiente de **a**. E dentro, isto é, entre as raízes a função terá sinal contrário ao coeficiente de **a**.

Exemplos

<table>
<tr>
<td>

1) Estude o sinal da função: y= $x^2 - 7x + 12$
Igualando a função a zero: $x^2 - 7x + 12 = 0$

Determinação do Δ e das raízes:
a=1, b=-7 e c=12
$\Delta=b^2-4.a.c$
$\Delta=(-7)^2-4.1.12$
$\Delta=49-48$
$\Delta=1$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

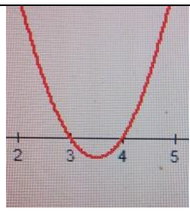
$x=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}$

$x=\frac{7\pm1}{2}$

$x'=\frac{7+1}{2}=4$

$x''=\frac{7-1}{2}=3$

</td>
<td>



Estude dos sinais:
++++ + - - - - - - + + + +
3 4

Solução:
Se x<3 ou x>4, então f(x)>0
se 3 < x < 4, então f(x) <0
se x=3 ou x=4, então f(x)=0

</td>
</tr>
<tr>
<td>

2) Estude o sinal da função: y= $-x^2 + 5x + 6$
Igualando a função a zero: $-x^2 + 5x + 6 = 0$

Resolvendo a equação:
Determinando Δ e as raízes
$\Delta=b^2-4.a.c$
$\Delta=5^2-4.(-1).6$
$\Delta=25+24$
$\Delta=49$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

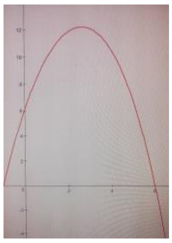
$x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{2.(-1)}$

$x=\frac{-5\pm7}{-2}$

$x'=\frac{-5+7}{-2}=\frac{2}{-2}=-1$

$x''=\frac{-5-7}{-2}=\frac{-12}{-2}=6$

</td>
<td>



Estude dos sinais:
- - - - - - + + + + + + - - - - - - -
-1 6

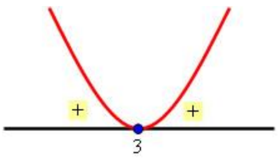
Solução
f(x)=0 para x = -1 ou x = 6
f(x) > 0 para x < -1 ou x > 6
f(x) < 0 para -1 < x < 4

</td>
</tr>
</table>

Inequações 2º grau
São expressões matemáticas que apresentam os sinais de maior (>) , maior ou igual (≥), menor (<), menor ou igual (≤) e diferente (≠) ao invés do sinal de igualdade que caracteriza as equações. Devem ser resolvidas usando a fórmula de Bháskara e comparando o resultado com o sinal da inequação, formulando assim, o resultado da inequação.EX:

<table>
<tr>
<td>

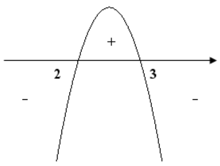
Calcule a solução da inequação $x^2 - 6x + 9 \geq 0$.



S = {x Є R }

</td>
<td>

Ex3: $-x^2 + 5x - 6 \geq 0$



$S = \{x \in R \mid 2 \leq x \leq 3\}$.

</td>
</tr>
</table>

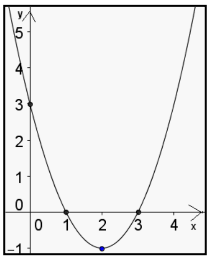
Lista de Exercícios

1. Construa um esboço dos gráficos das funções quadráticas a seguir e indique o domínio e a imagem:

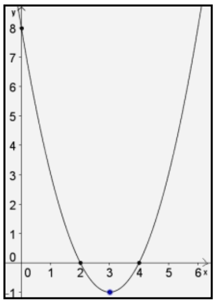
a) $f(x) = x^2 – 4x + 3$ b) $f(x) = x^2 – 6x + 8$ c) $f(x) = – x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = x^2 – 2x$

e) $f(x) = – x^2 + 8x$ f) $f(x) = – 2x^2$

Solução. Para o esboço identifica-se: f(x) = 0 (zeros da função), f(0) (intersecção com o eixo Y) e as coordenadas do vértice.

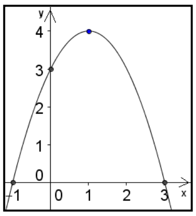


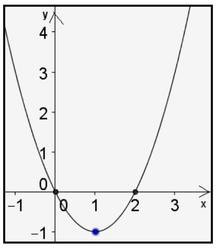
a)
$$f(x)=x^2-4x+3:\begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4(1)(3)}}{2}=\dfrac{4\pm 2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=3\end{cases} \\ f(0)=(0)^2-4(0)+3=3 \\ V=\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{(-4)}{2(1)};-\dfrac{4}{4(1)}\right)=(2;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=\mathbb{R}\\ IM(f)=[-1,+\infty[\end{cases}$$



b)
$$f(x)=x^2-6x+8:\begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{36-4(1)(8)}}{2}=\dfrac{6\pm 2}{2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=2\\ x_2=4\end{cases} \\ f(0)=(0)^2-6(0)+8=8 \\ V=\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{(-6)}{2(1)};-\dfrac{4}{4(1)}\right)=(3;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=\mathbb{R}\\ IM(f)=[-1,+\infty[\end{cases}$$

c)
$$f(x)=-x^2+2x+3:\begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4-4(-1)(3)}}{-2}=\dfrac{-2\pm 4}{-2}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases} \\ f(0)=-(0)^2+2(0)+3=3 \\ V=\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{(2)}{2(-1)};-\dfrac{16}{4(-1)}\right)=(1;4)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=\mathbb{R}\\ IM(f)=]-\infty,4]\end{cases}$$

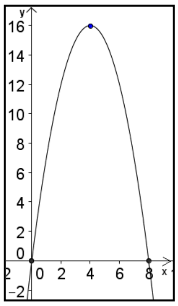




d)
$$f(x)=x^2-2x:\begin{cases} f(x)=0 \Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=2\end{cases} \\ f(0)=(0)^2-2(0)=0 \\ V=\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)=\left(-\dfrac{(-2)}{2(1)};-\dfrac{4}{4(1)}\right)=(1;-1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D(f)=\mathbb{R}\\ IM(f)=[-1,+\infty[\end{cases}$$

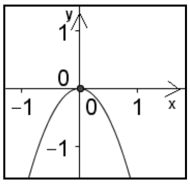
e)

$$f(x) = -x^2 + 8x : \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x(-x+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases} \\ f(0) = -(0)^2 + 8(0) = 0 \\ V = \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\dfrac{(8)}{2(-1)}; -\dfrac{64}{4(-1)}\right) = (4;16) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ IM(f) =]-\infty, 16] \end{cases}.$$



f)

$$f(x) = -2x^2 : \begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ f(0) = -2(0)^2 = 0 \\ V = \left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\dfrac{(0)}{2(-2)}; -\dfrac{0}{4(-2)}\right) = (0;0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D(f) = \mathbb{R} \\ IM(f) =]-\infty, 0] \end{cases}.$$



2. A função **f(x) = ax² + bx + c** passa pela origem. Sabendo que **f(–2) = 0**, calcule o valor de $\dfrac{a^2 + abc + b^2}{ab}$?

Solução. Se o gráfico de f(x) passa pela origem, f(0) = 0. Utilizando a informação que f(–2) = 0 vem:

$$\text{i) } f(0) = 0 \Rightarrow a.(0)^2 + b.(0) + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{ii) } f(-2) - 0 \Rightarrow a.(-2)^2 + b.(-2) = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 4a \Rightarrow b = 2a$$

$$\text{iii) } \frac{a^2 + abc + b^2}{ab} = \frac{a^2 + a(2a)(0) + (2a)^2}{a(2a)} = \frac{a^2 + 4a^2}{2a^2} = \frac{5a^2}{2a^2} = \frac{5}{2} \to (a \neq 0)$$

3. (ANGLO) O vértice da parábola **y = 2x² – 4x + 5** é o ponto:

a) (2,5) b) $\left(-1, \sqrt{11}\right)$ c) (-1,11) d) $\left(1, \sqrt{3}\right)$ **e)** (1,3)

Solução. Utilizando as fórmulas das coordenadas do vértice, temos:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 \Rightarrow V = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{(-4)}{2(2)}; -\frac{[(-4)^2 - 4(2)(5)]}{4(2)}\right) = \left(1; -\frac{[16-40]}{8}\right) = \left(1; -\frac{[-24]}{8}\right) = (1;3)$$

.

4. (ANGLO) A função **f(x) = x²- 4x + k** tem o valor mínimo igual a **8**. O valor de **k** é:

a) 8 b) 10 **c)**12 d) 14 e) 16

Solução. O valor mínimo da função é a ordenada do vértice. Igualando o valor à fórmula, temos:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + k \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 8 \end{cases} \Rightarrow -\frac{[(-4)^2 - 4(1)(k)]}{4(1)} = 8 \Rightarrow 16 - 4k = -32 \Rightarrow -4k = -16 - 32 \Rightarrow k = \frac{-48}{-4} = 12.$$

5. (ANGLO) Se o vértice da parábola dada por **y = x² – 4x + m** é o ponto (2,5), então o valor de **m** é:

a) 0 b) 5 c) -5 **d)** 9
e) - 9

Solução. A ordenada do vértice vale 5. Temos:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + m \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 5 \end{cases} \Rightarrow -\frac{[(-4)^2 - 4(1)(m)]}{4(1)} = 5 \Rightarrow 16 - 4k = -20 \Rightarrow -4k = -16 - 20 \Rightarrow k = \frac{-36}{-4} = 9.$$

6. (ANGLO) A parábola definida por **y = x² + mx + 9** será tangente aos eixos das abscissas se, e somente se:

a) m = 6 ou m = - 6 b) - 6< m < 6 c) $-6 \le m \le 6$ d) $m \ge 6$ e) $m \le -6$

Solução. O gráfico da parábola tangencia o eixo das abscissas quando suas raízes são reais e iguais. Isso ocorre se Δ = 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + mx + 9 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \Rightarrow (m)^2 - 4(1)(9) = 0 \Rightarrow m^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -6 \\ m = 6 \end{cases}.$$

7. (ANGLO) Considere a parábola de equação **y = x² – 4x + m**. Para que a abscissa e a ordenada do vértice dessa parábola sejam iguais, então <u>**m**</u> deve ser igual a:

a) -14 b) -10 c) 2 d) 4
e) 6

Solução. Igualando as expressões indicadas, temos:

$$\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 4x + m \\ \begin{cases} x_V = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2(1)} = 2 \\ y_V = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{[(-4)^2 - 4(1)(m)]}{4(1)} = -\dfrac{[16-4m]}{4} \end{cases} \Rightarrow -\dfrac{[16-4m]}{4} = 2 \Rightarrow 16 - 4m = -8 \Rightarrow m = \dfrac{-8-16}{-4} = \dfrac{-24}{-4} \Rightarrow m = 6 \end{array}$$

.8. (FATEC) A distância do vértice da parábola **y = – x² + 8x - 17** ao eixo das abscissas é:

a) 1 b) 4 c) 8 d) 17
e) 34

Solução. A distância será a diferença (positiva) entre a ordenada do vértice e o eixo X.

$$f(x) = -x^2 + 8x - 17 \Rightarrow V = \left(-\frac{(8)}{2(-1)}; -\frac{[(8)^2 - 4(-1)(-17)]}{4(-1)}\right) = \left(4; -\frac{[64-68]}{-4}\right) = \left(4; -\frac{[-4]}{-4}\right) = (4; -1).$$

D = |-1| = 1.

9. (FUVEST) Os pontos (0, 0) e (2, 1) estão no gráfico de uma função quadrática **f**. O mínimo de **f** é assumido no ponto de abscissa **x = - 1/4**. Logo, o valor de **f(1)** é:

a) 1/10 b) 2/10 **c)** 3/10 d) 4/10 e) 5/10

Solução. De acordo com as informações, temos que f(0) = 0 e f(2) = 1. Substituindo na expressão da função e utilizando o valor do mínimo, temos:

$$f(x)=ax^2+bx+c:$$

$$\text{i)}\begin{cases} f(0)=0\Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=0\Rightarrow c=0 \\ f(2)=1\Rightarrow a(2)^2+b(2)=1\Rightarrow 4a+2b=1 \qquad \Rightarrow 4(2b)+2b=1\Rightarrow 10b=1\Rightarrow b=\frac{1}{10}.\text{ Logo, } a=2\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{5} \\ x_V=-\frac{1}{4}\Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{1}{4}\Rightarrow 4b=2a\Rightarrow a=2b \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x)=\frac{x^2}{5}+\frac{x}{10}\Rightarrow f(1)=\frac{(1)^2}{5}+\frac{(1)}{10}=\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$$

.

10. (UEL) A função real **f**, de variável real, dada por **f(x) = – x² + 12x + 20**, tem um valor:

a) mínimo igual a -16, para x = 6 b) mínimo igual a 16, para x = -12 **c)** máximo igual a 56, para x = 6

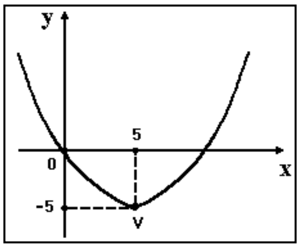
d) máximo igual a 72, para x = 12 e) máximo igual a 240, para x = 20

Solução. O coeficiente de x^2 é negativo. Encontrando as coordenadas do vértice (máximo), temos:

$$f(x)=-x^2+12x+20\Rightarrow V=\left(-\frac{(12)}{2(-1)};-\frac{[(12)^2-4(-1)(20)]}{4(-1)}\right)=\left(6;-\frac{[144+80]}{-4}\right)=\left(6;-\frac{[224]}{-4}\right)=(6;56)$$

.

11. (UFMG) Nessa figura está representada a parábola de vértice **V**, gráfico da função de segundo grau cuja expressão é:



a) $y=\frac{x^2}{5}-2x$ b) $y=x^2-10x$ c) $y=x^2+10x$ d) $y=\frac{x^2}{5}-10x$

e) $y=\frac{x^2}{5}+10x$

Solução. O gráfico passa pela origem (0,0). Logo, c = 0. Identifica-se ainda que f(5) = – 5 (vértice da parábola). Organizando essas informações, vem:

$$f(x)=ax^2+bx+c:$$

$$\text{i)}\begin{cases} f(0)=0\Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=0\Rightarrow c=0 \\ f(5)=-5\Rightarrow a(5)^2+b(5)=-5\Rightarrow 25a+5b=-5\Rightarrow 25a+5(-10a)=-5\Rightarrow -25a=-5\Rightarrow a=\frac{1}{5}.\text{ Logo, } b=-10\left(\frac{1}{5}\right)=-2 \\ x_V=5\Rightarrow -\frac{b}{2a}=5\Rightarrow -b=10a\Rightarrow b=-10a \end{cases}$$

$$\text{ii) } f(x)=\frac{x^2}{5}-2x$$

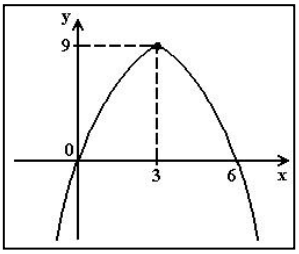
.12. (UFPE) O gráfico da função **y = ax² + bx + c** é a parábola da figura a seguir. Os valores de **a**, **b** e **c** são respectivamente:

a) 1, - 6 e 0 b) - 5, 30 e 0 c) - 1, 3 e 0 **d)** - 1, 6 e 0

e) - 2, 9 e 0

Solução. O gráfico passa pela origem (0,0). Logo, c = 0. Identifica-se ainda que f(3) = 9 (vértice da parábola). Organizando essas informações, vem:

$$f(x)=ax^2+bx+c:$$
$$\text{i) }\begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow a(0)^2+b(0)+c=0 \Rightarrow c=0 \\ f(3)=9 \Rightarrow a(3)^2+b(3)=9 \Rightarrow 9a+3b=9 \Rightarrow 9a+3(-6a)=9 \Rightarrow -9a=9 \Rightarrow a=\dfrac{-9}{9}=-1. \\ x_V=3 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a}=3 \Rightarrow -b=6a \Rightarrow b=-6a \end{cases}$$
$$\text{Logo, } b=-6(-1)=6$$



13. (UFMG) A função f(x) do segundo grau tem raízes – **3** e **1**. A ordenada do vértice da parábola, gráfico de f(x), é igual a **8**. A única afirmativa VERDADEIRA sobre f(x) é:

a) f(x)= –2(x–1)(x+3)   b) f(x) = – (x–1)(x+3)   c) f(x) = –2(x+1)(x-3)   d) f(x) = (x–1)(x+3)   e) f(x) = 2(x+1)(x–3)

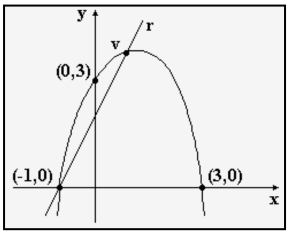
Solução 1. De acordo com as informações, temos que f(– 3) = 0 e f(1) = 0. A abscissa do vértice é a média aritmética das raízes quando elas são reais e diferentes. Logo, $\boxed{x_V=\dfrac{(-3)+1}{2}=-1}$ e f(– 1) = 8. Substituindo na expressão da função e utilizando o valor do mínimo, temos:

$$f(x)=ax^2+bx+c:$$
$$\text{i) }\begin{cases} f(-3)=0 \Rightarrow a(-3)^2+b(-3)+c=0 \\ f(1)=0 \Rightarrow a(1)^2+b(1)+c=0 \\ f(-1)=8 \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+c=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ \begin{cases} a+b+c=0 \to \times(-1) \\ a-b+c=8 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ \begin{cases} -a-b-c=0 \\ a-b+c=8 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a-3b+c=0 \\ -2b=8 \Rightarrow b=\dfrac{8}{-2}=-4 \end{cases}$$
$$\text{ii) } x_V=-1 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=-1 \Rightarrow -\frac{(-4)}{2a}=-1 \Rightarrow -2a=4 \Rightarrow a=\frac{4}{-2}=-2$$
$$\text{iii) } 9a-3b+c=0 \Rightarrow 9(-2)-3(-4)+c=0 \Rightarrow c=18-12=6$$
$$f(x)=-2x^2-4x+6=-2(x^2+2x-3)=-2(x+3).(x-1)$$

Solução 2. A função quadrática também pode ser expressa como f(x) = a(x – r_1).(x – r_2), onde r_1 e r_2 são os zeros (raízes) da função. No caso, temos:

$$\text{i) }\begin{cases} x_V=\dfrac{r_1+r_2}{2}=\dfrac{-3+1}{2}=-1 \\ y_V=8 \end{cases} \Rightarrow f(-1)=8 \Rightarrow a(-1+3).(-1-1)=8 \Rightarrow a(2).(-2)=8 \Rightarrow -4a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{-4}=-2$$
$$\text{ii) } f(x)=a(x-r_1).(x-r_2)=-2(x-(-3)).(x-1)=a(x+3).(x-1)$$

14. (UFSC) A figura a seguir representa o gráfico de uma parábola cujo vértice é o ponto **V**. A equação da reta **r** é:



a) y = - 2x + 2   b) y = x + 2   c) y = 2x + 1   **d)** y = 2x + 2   e) y = - 2x – 2

Solução. De acordo com o gráfico, f(– 1) = f(3) = 0 e f(0) = 3. Logo, c = 3.

Encontrando a expressão da função quadrática e o vértice, temos:

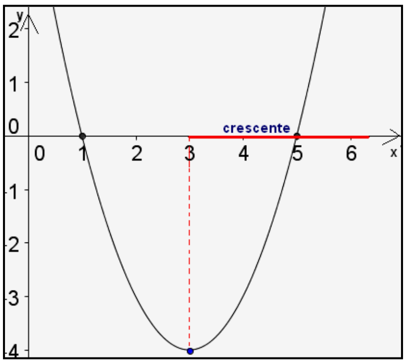
$$f(x)=ax^2+bx+3$$
$$\text{i)}\begin{cases} f(-1)=0 \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)+3=0 \Rightarrow a-b+3=0 \\ f(3)=0 \Rightarrow a(3)^2+b(3)+3=0 \Rightarrow 9a+3b+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-3 \rightarrow \times(3) \\ 9a+3b=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a-3b=-9 \\ 9a+3b=-3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 12a=-12 \Rightarrow a=-1.\text{ Logo, }(-1)-b=-3 \Rightarrow b=-1+3 \Rightarrow b=2.$$
$$\text{ii) } f(x)=-x^2+2x+3 \Rightarrow V=\left(-\frac{2}{2(-1)};-\frac{[4-4(-1)(3)]}{4(-1)}\right)=(1;4)$$

A reta pedida é a representação da função afim f(x) = ax + b, passando por (– 1,0) e (1,4).

$$f(x)=ax+b$$
$$\text{i)}\begin{cases} 0=a(-1)+b \\ 4=a(1)+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a+b=0 \Rightarrow a=b \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow a+a=4 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2.\text{ Logo, } b=2$$
$$\text{ii) Equação(reta)}=f(x)=2x+2 \text{ ou } y=2x+2$$

15. (UFMG) O intervalo no qual a função **f(x) = x² - 6x + 5** é crescente é:

a) x < 5 b) 1 < x < 5 c) x > 1 **d)** x > 3



Solução. Para analisar os intervalos de crescimento, basta verificar a concavidade da parábola e identificar a abscissa do vértice.

$$f(x)=x^2-6x+5$$
$$x_V=-\frac{(-6)}{2(1)}=3$$

O coeficiente de x^2 é positivo. Logo f(x) é crescente no intervalo [3, ∞[

16. (PUC) Ao levantar dados para a realização de um evento, a comissão organizadora observou que, se cada pessoa pagasse R\$6,00 por sua inscrição, poderia contar com 460 participantes, arrecadando um total de R\$2760,00. Entretanto, também estimou que, a cada aumento de R\$1,50 no preço de inscrição, receberia 10 participantes a menos. Considerando tais estimativas, para que a arrecadação seja a maior possível, o preço unitário, em reais, da inscrição em tal evento deve ser:

a) 15,00 b) 24,50 c) 32,75 **d)** 37,50 e) 42,50

Solução. Descrevendo a situação na tabela até uma generalização, temos:

Número de participantes	Preço do ingresso (R$)	Arrecadação (R$)
460	6	460.(6)
460 – 1.(10)	6 + 1.(1,50)	(460 – 1.10).(6 + 1.(1,50))
460 – 2.(10)	6 + 2.(1,50)	(460 – 2.10).(6 + 2.(1,50))
460 – 3.(10)	6 + 3.(1,50)	(460 – 3.10).(6 + 3.(1,50))
...	...	...
460 – x.(10)	6 + x.(1,50)	(460 – x.10).(6 + x.(1,50))

A expressão, então da arrecadação é:

A(x) = (460 – 10x).(6 + 1,50x) = 2760 + 690x – 60x – 15x² = – 15x² + 630x + 2760. Uma função quadrática.

A maior arrecadação ocorrerá com máximo número de aumentos x dados.

Esse valor corresponde à abscissa do vértice da função:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(630)}{2(-15)} = -\frac{(630)}{(-30)} = 21.$$

Com 21 aumentos de R$1,50 o preço do ingresso será: P = 6 + 21.(1,50) = 6 +31,50 = R$37,50.

17. (PUC) Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é **x – 10**, sendo **x** o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a **70 – x**. Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de **x**, cujo valor máximo, na unidade monetária usada, é:

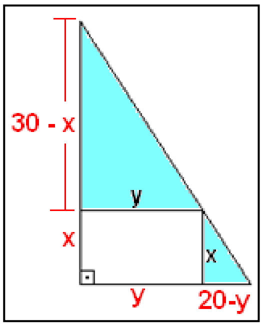
a) 1200 b) 1000 **c)** 900 d) 800 e) 600

Solução. De acordo com as informações, o custo total da produção é C(x) = 10.(70 – x), pois 10 é o preço unitário e (70 – x) a quantidade produzida. O total obtido pela venda do produto será V(x) = x.(70 – x). Sendo o lucro a diferença entre o valor arrecadado na venda e o custo, temos:

$$L(x) = x.(70-x) - 10.(70-x) = 70x - x^2 - 700 + 10x = -x^2 + 80x - 700$$

$$L(\text{máximo}) = y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[6400 - 4(-1)(-700)]}{4(-1)} = -\frac{[6400-2800]}{-4} = \frac{3600}{4} = 900.$$

18. (VUNESP) Num terreno, na forma de um triângulo retângulo com catetos com medidas 20 e 30 metros, deseja-se construir uma casa retangular de dimensões **x** e **y**, como indicado na figura.



a) Exprima **y** em função de **x**.

Solução. Observando a semelhança nos triângulos assinalados, temos:

$$\frac{30-x}{y} = \frac{x}{20-y} \Rightarrow 600 - 30y - 20x + xy = xy \Rightarrow 600 - 30y - 20x = 0 \Rightarrow y = \frac{600-20x}{30} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{60-2x}{3}.$$

b) Para que valores de **x** e de **y** a área ocupada pela casa será máxima?

Solução. A área ocupada será A(x) = (x.y). Será máxima para um valor máximo das medidas. Substituindo e calculando a abscissa do vértice, temos:

$$A = x.y = x.\left(\frac{60-2x}{3}\right) = \frac{60x-2x^2}{3} = -\frac{2x^2}{3} + 20x \Rightarrow x_V = \frac{-(20)}{2\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-20}{-\frac{4}{3}} = (-20).\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{60}{4} = 15$$

$$\text{Logo, } y = \frac{60-2(15)}{3} = \frac{60-30}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

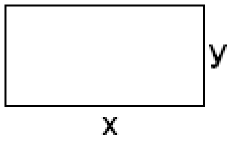
.A área será máxima se as dimensões ocupadas forem x = 15m e y = 10m.

19. (VUNESP) Um retângulo possui perímetro é 10cm e a medida de um dos lados é **x**. Determine:

a) a área do retângulo em função de **x**; b) o valor de **x** para o qual a área do retângulo seja máxima.

Solução. Considere a outra medida do retângulo como y. Temos:

a)
$$\text{i)}\begin{cases}2P = 10\\ 2P = 2x + 2y\end{cases} \Rightarrow 2x + 2y = 10 \Rightarrow x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - x$$
$$\text{ii)}\ A = x.y = x.(5 - x) = -x^2 + 5x$$
.



OBS: Repare que <u>x</u> não pode ser nulo, nem maior ou igual a 5.

b)
$$A = -x^2 + 5x$$
$$A(\text{máxima}) \Rightarrow x_V = -\frac{(5)}{2(-1)} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{cm}$$
.. (UNIRIO) Em uma fábrica, o custo de produção de **<u>x</u>** produtos é dado por **c(x) = – x^2 + 22x + 1**. Se que cada produto é vendido por R\$10,00, o número d

e produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R\$44,00 é:

a) 3 b) 10 c) 12 d) 13
e) 15

Solução. O arrecadado com a venda é V(x) = 10x. O lucro será a diferença entre a venda e o custo. Temos:

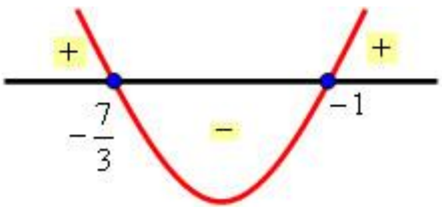
$$\begin{cases}L(x) = 10x - (-x^2 + 22x + 1) = 10x + x^2 - 22x - 1 = x^2 - 12x - 1\\ L(x) = 44\end{cases} \Rightarrow x^2 - 12x - 1 = 44 \Rightarrow x^2 - 12x - 45 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4(1)(45)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{12 \pm 18}{2} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \frac{12 - 18}{2} = -3 < 0\\ x_2 = \frac{12 \pm 18}{2} = 15\end{cases}$$

.A quantidade de produtos não pode ser negativa. Logo, x = 15.

21. Vamos resolver a inequação $3x^2 + 10x + 7 < 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 10^2 - 4*3*7$$
$$\Delta = 100 - 84$$
$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2*3}$$
$$x = \frac{-10 \pm 4}{6}$$
$$x' = \frac{-10 + 4}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$
$$x'' = \frac{-10 - 4}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

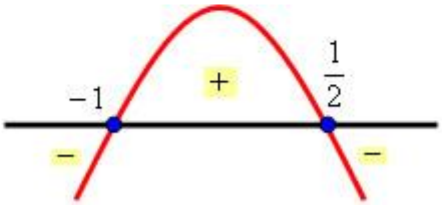


S = {x ? R / –7/3 < x < –1}

22.Determine a solução da inequação $-2x^2 - x + 1 \le 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4 * (-2) * 1$$
$$\Delta = 1 + 8$$
$$\Delta = 9$$

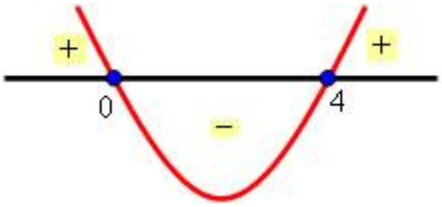
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2*(-2)}$$
$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$
$$x' = \frac{1+3}{-4} = -\frac{4}{4} = -1$$
$$x'' = \frac{1-3}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



S = {x ? R / x ≤ –1 ou x ≥ 1/2}

23.Determine a solução da inequação $x^2 - 4x \geq 0$.

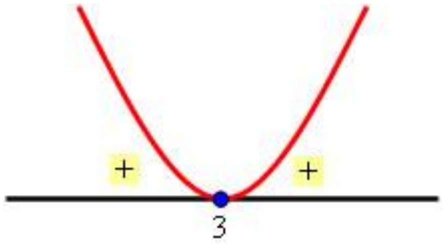
$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2*1}$$
$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$
$$x' = \frac{4+4}{2} = 4$$
$$x'' = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$



S = {x ? R / x ≤ 0 ou x ≥ 4}

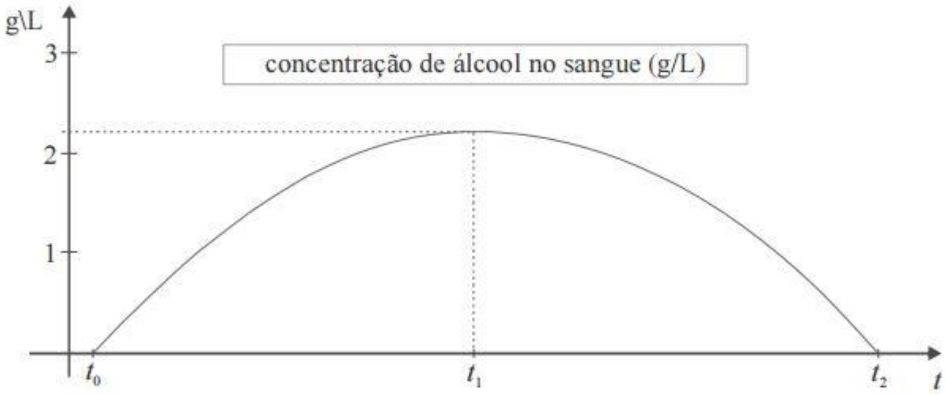
24. Calcule a solução da inequação $x^2 - 6x + 9 > 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4 * 1 * 9$$
$$\Delta = 36 - 36$$
$$\Delta = 0$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2*1}$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x' = 3$$



S = {x ? R / x < 3 e x > 3}

25. **(**Cespe). Considere que o nível de concentração de álcool na corrente sanguínea, em g/L, de uma pessoa, em função do tempo t, em horas, seja expresso por N = – 0,008(t^2 – 35t + 34). Considere, ainda, que essa pessoa tenha começado a ingerir bebida alcoólica a partir de t = t0 (N(t0 = 0), partindo de um estado de sobriedade, e que tenha parado de ingerir bebida alcoólica em t = t1, voltando a ficar sóbria em t = t2. Considere, por fim, a figura acima, que apresenta o gráfico da função N(t) para t є [t0, t2]. Com base nessas informações e tomando 24,3 como valor aproximado de √589, julgue o item a.



a) O nível de concentração de álcool na corrente sanguínea da pessoa em questão foi superior a 1 g/L por pelo menos 23 horas.
Resolução:
Sendo N = – 0,008(t^2 – 35t + 34) a função que mede a concentração de álcool em função do tempo, precisamos saber quando N > 1.
Devemos então resolver a inequação do segundo grau:
$– 0,008(t^2 – 35t + 34) > 1$
$– 8(t^2 – 35t + 34) > 1000$
$t^2 – 35t + 34 > – 125$
$t^2 – 35t + 159 > 0$

Calculando Δ:
$\Delta = b^2 – 4ac$
$\Delta = (-35)^2 – 4.1.159$
$\Delta = 1225 – 636$
$\Delta = 589$

Utilizando a fórmula de Bhaskara:
$t = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$
$t = (-(-35) \pm \sqrt{589})/2.1$
$t = (35 \pm 24,3)/2$
Assim,
$t' = (35 + 24,3)/2 = 59,3/2 = 29,65$
$t'' = (35 – 24,3)/2 = 10,7/2 = 5,35$

Pelo gráfico da função e analisando as raízes temos que o conjunto solução é:
S = {5,35 < x < 29,65}
E a diferença entre os extremos será 24,3.