

# Resistência dos Materiais II

Material elaborado pelo Prof. MSc Eng Halley Dias

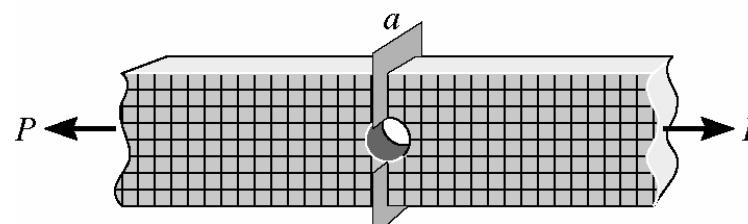
Instituto Federal de Educação Ciéncia e Tecnologia  
de Santa Catarina

Aplicado ao Curso Técnico de Eletromecânica

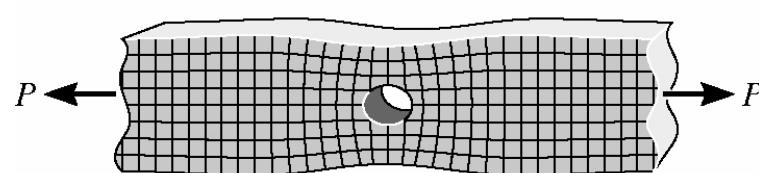
versão 2009\_1

## Concentração de Tensão

Até o presente momento foi considerado nos cálculos de dimensionamento estrutural a tensão média, figura *c*, ou seja, a razão entre força e área. Entretanto, em muitos casos esta simplificação pode não ser válida ou fornecer informações inválidas ao projetista. Quando componentes estruturais apresentarem variações ao longo da seção transversal (por exemplo furos, reduções, cantos vivos, entalhes) a tensão gerada no local onde existe a descontinuidade é superior à tensão média, figura *b*. Se o projetista não levar em consideração a variação geométrica da seção transversal, a estrutura poderá falhar abaixo da carga admissível calculada pela tensão média.



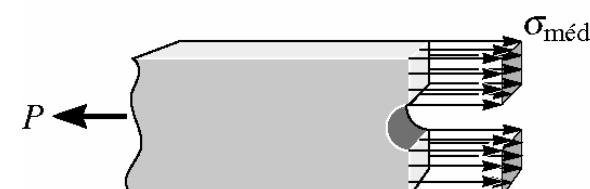
Não distorcida



Distorção  
(a)



Distribuição de tensão verdadeira  
(b)



Distribuição de tensão média  
(c)



A razão entre a tensão realmente desenvolvida ou tensão máxima e a tensão média é definida como FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO ou FATOR DE FORMA e simbolizado pela letra  $K_t$ .

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{média}}$$

$$\sigma_{med} = \frac{P}{A}$$

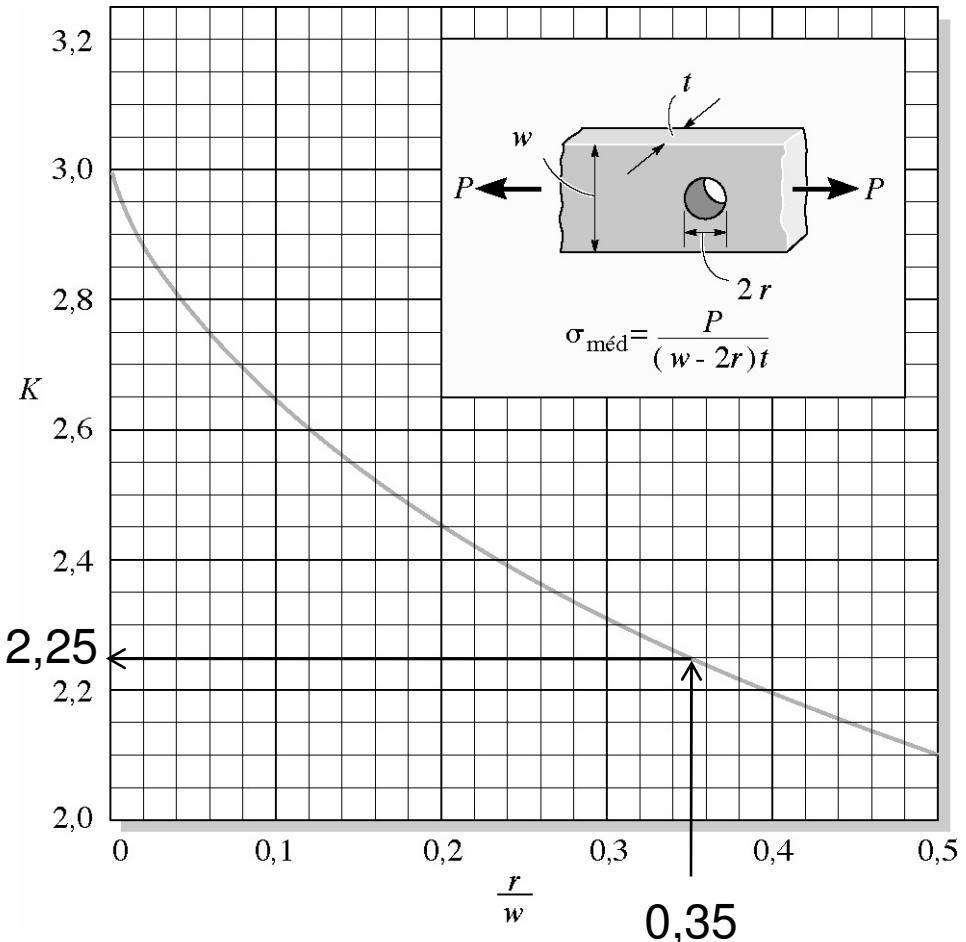
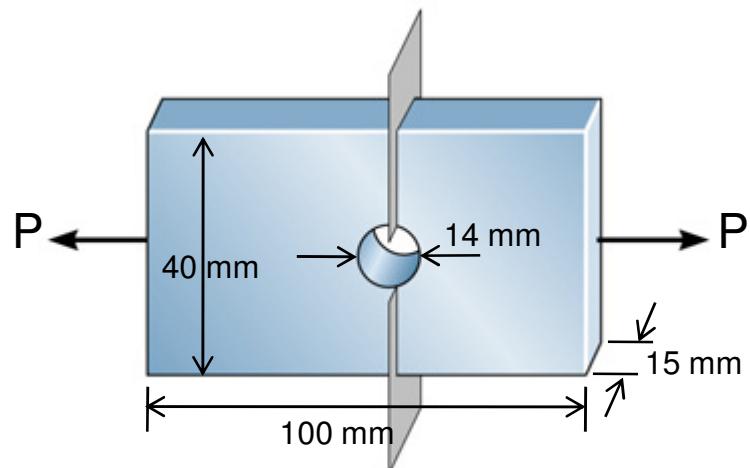
$A$  é a menor área da  
seção transversal

O fator de concentração de tensão geralmente é informado sob a forma de gráficos. Deve-se observar que o fator de concentração de tensão independe do tipo de material, mas apenas da geometria da seção transversal da estrutura e do tipo de descontinuidade.



Observe no gráfico ao lado que a medida que o valor da descontinuidade,  $r$ , decresce, a concentração de tensão aumenta.

Supor que temos uma chapa plana de 100 mm de comprimento, 40 mm de altura e 15 mm de espessura. Essa chapa contém um furo no meio com diâmetro igual a 14 mm. Determinar o valor de  $K_t$ .



$$\frac{r}{w} = \frac{14}{40} = 0,35$$

$$K_t = 2,25$$



$$\sigma_{med} = \frac{P}{A} = \frac{P}{(h - \Phi) \cdot t}$$

$$P = 5,00 \text{ kN}$$

$$h \Rightarrow \text{altura da chapa} = 40 \text{ mm}$$

$$\Phi \Rightarrow \text{diâmetro do furo} = 14 \text{ mm}$$

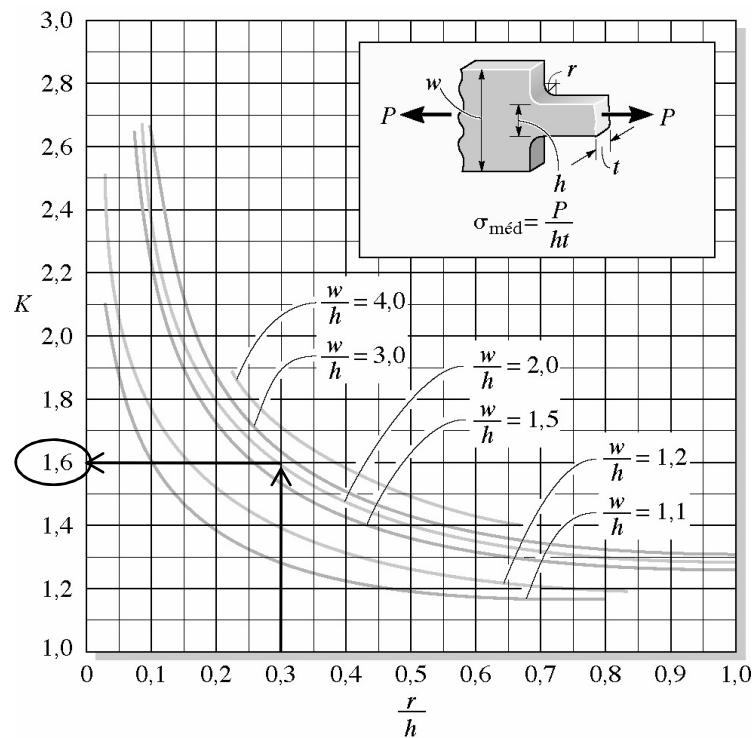
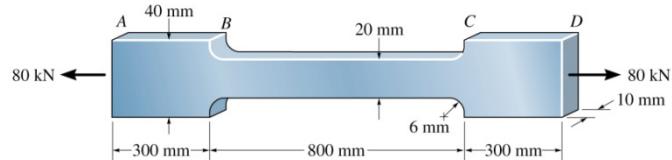
$$t \Rightarrow \text{espessura da chapa} = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma_{med} = \frac{P}{[(40 \cdot 10^{-3}) - (14 \cdot 10^{-3})] \cdot 15 \cdot 10^{-3}}$$

$$\sigma_{med} = \frac{P}{390 \cdot 10^{-6}} = 12,8 \text{ MPa}$$

Observe que: se a chapa fosse dimensionada sem levar em conta o fator de concentração de tensão e utilizasse um fator de segurança igual a 2, quanto posta em serviço a tensão real seria 2,25 vezes superior à tensão média, ou seja, acima da tensão de escoamento do material, em outras palavras sem segurança. Esse exemplo mostra a importância da análise da concentração de tensão, pois quando ignorada o projetista pode dimensionar estruturas e/ou elementos de máquinas cuja segurança pode ficar comprometida.

Exemplo: A tira de aço mostrada na figura abaixo está submetida a uma carga axial de 80 kN. Determinar a tensão normal máxima desenvolvida na tira. O aço tem limite de escoamento  $\sigma_e = 700$  MPa e módulo de elasticidade  $E_{aço} = 200$  GPa



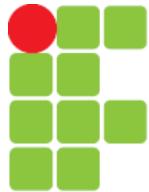
$$\frac{r}{h} = \frac{6 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 0,3; \frac{w}{h} = \frac{40 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} = 2$$

Pelo gráfico  $K_t = 1,6$

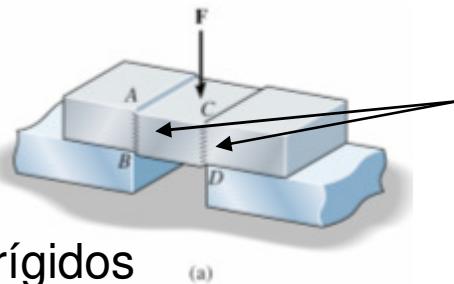
$$\sigma_{\max} = K_t \cdot \sigma_{med} = (1,6) \cdot \left( \frac{P}{A} \right)$$

$$\sigma_{\max} = 1,6 \cdot \frac{80 \cdot 10^3}{(0,02) \cdot (0,01)} = 640 \text{ MPa}$$

Como a tensão máxima é inferior a tensão de escoamento o material permanece elástico.

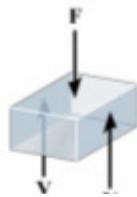


# Cisalhamento

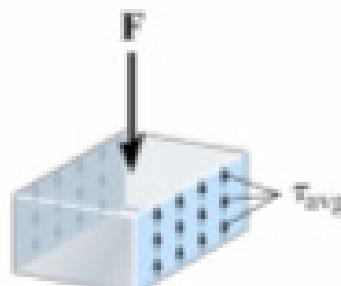


Apoios rígidos

A força  $F$  provocará deformação e falha da barra ao longo dos planos indicados com  $AB$  e  $CD$ .



Para a condição de equilíbrio a força de cisalhamento média deve ser aplicada em cada seção.



(c)

Distribuição da Tensão Cisalhante  
Média atuante na seção

$$V = \frac{F}{2}$$

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.

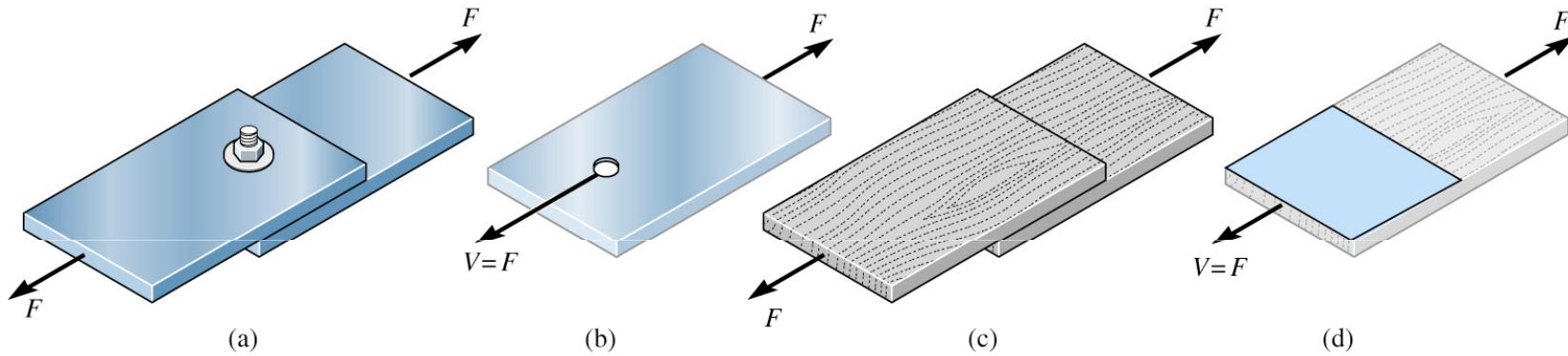
## Tensão Cisalhante Média

$$\tau_{média} = \frac{V}{A}$$

- $\tau$ : tensão cisalhante média na seção, que se supõe ser a mesma em cada ponto localizado na seção.
- V: resultante interna da força de cisalhamento na seção determinada pelas equações de equilíbrio.
- A: área da seção

# Cisalhamento Simples ou Direto

Apresenta apenas uma superfície de cisalhamento.



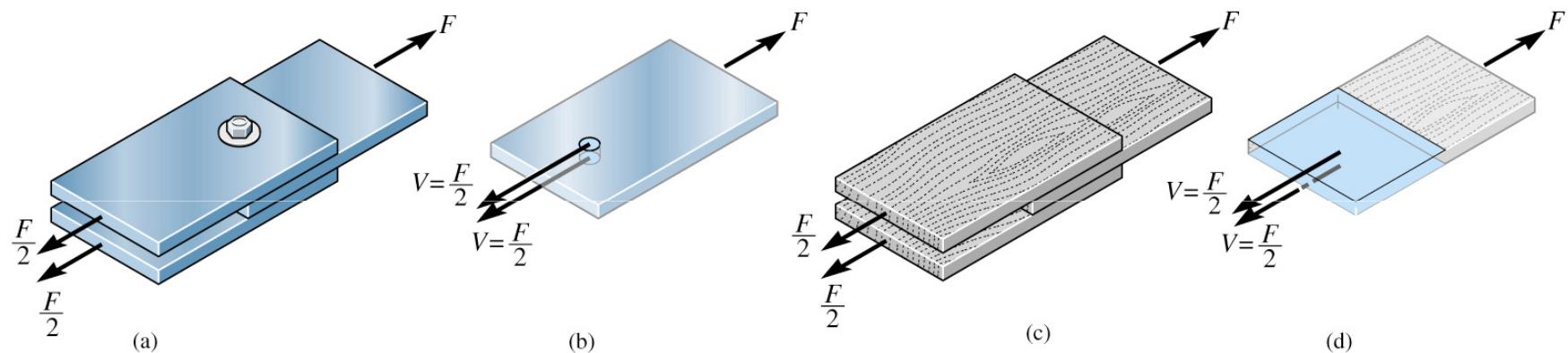
$$\tau_{média} = \frac{V}{A} = \frac{F}{A}$$

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.



# Cisalhamento Duplo

Apresenta duas superfícies de cisalhamento.



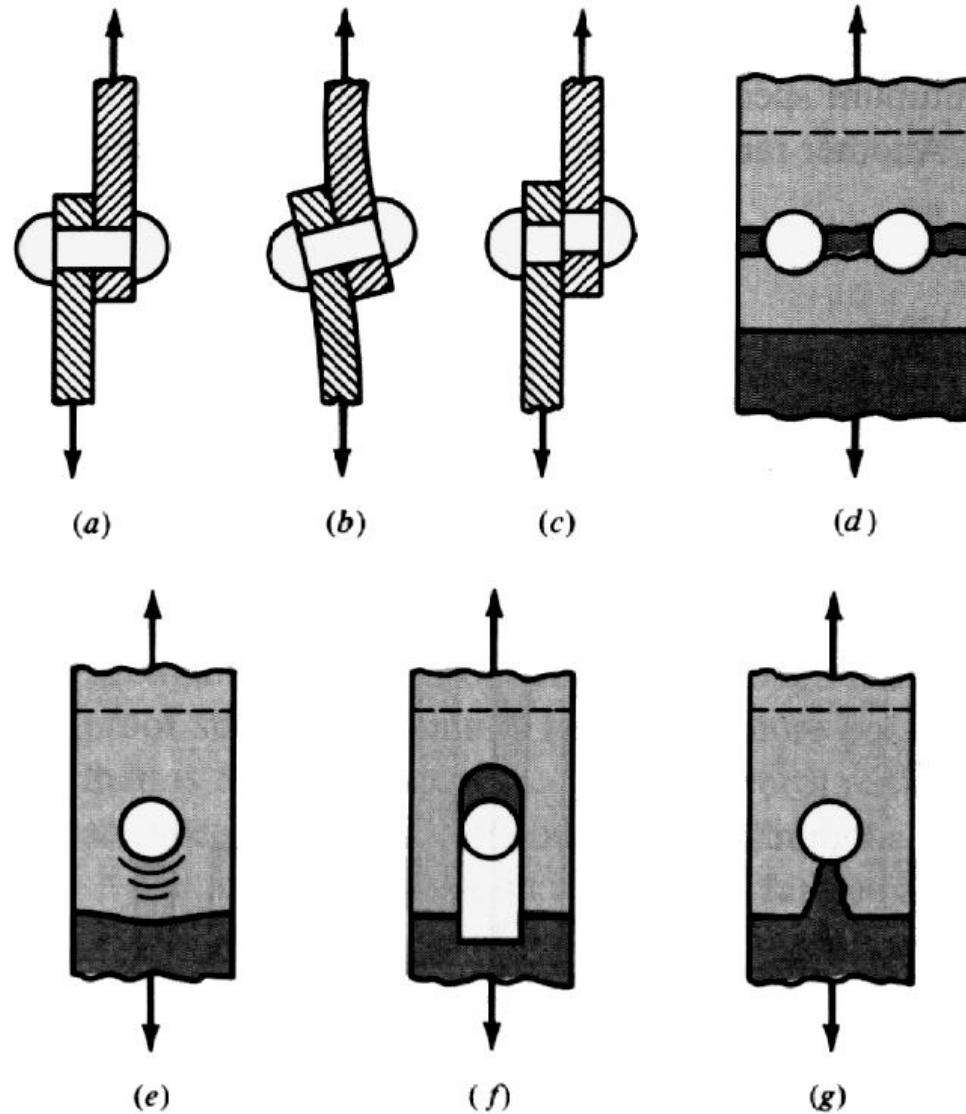
$$\tau_{média} = \frac{V}{A} = \frac{F}{2A}$$

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.

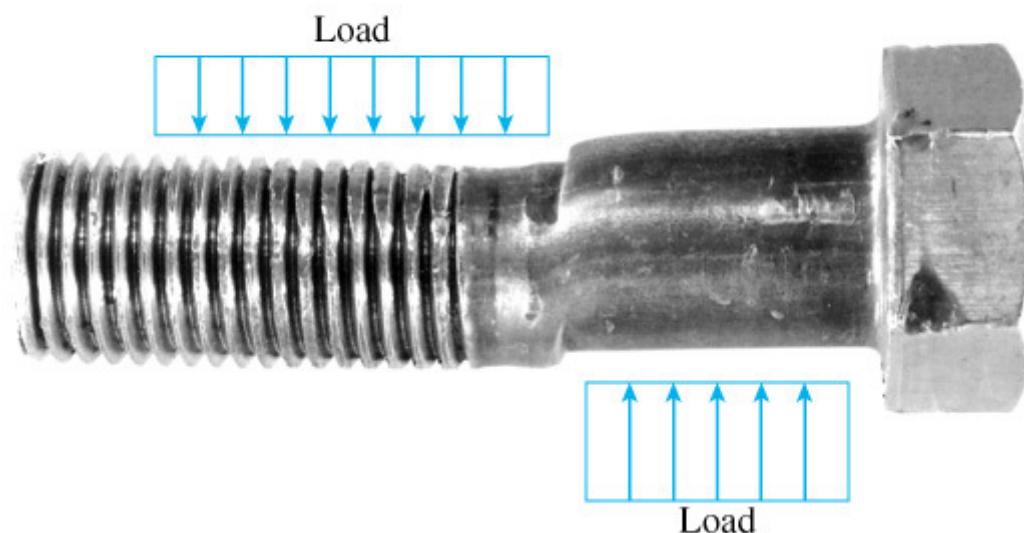
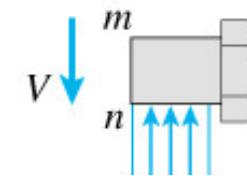
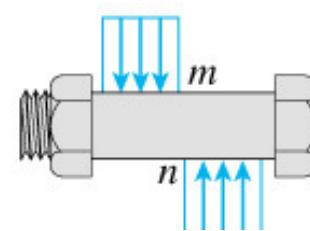
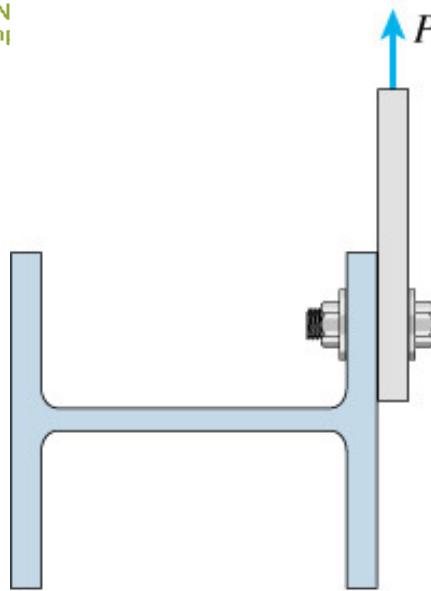
# Pressão de Esmagamento ou de Contato em Juntas Rebitadas, Parafusadas, Chavetas

No dimensionamento das juntas rebitadas, parafusadas, chavetas torna-se necessária a verificação da pressão de contato entre o elemento e a parede do furo na chapa (nas juntas). A carga de cisalhamento além da tendência de corte do elemento de junção cria esforço de compressão ou esmagamento entre o elemento (p. ex. parafuso ou rebite) e a parede do furo. Essa pressão é definida através da relação entre a carga de compressão atuante e a área da secção longitudinal do elemento, que é projetada na parede do furo.

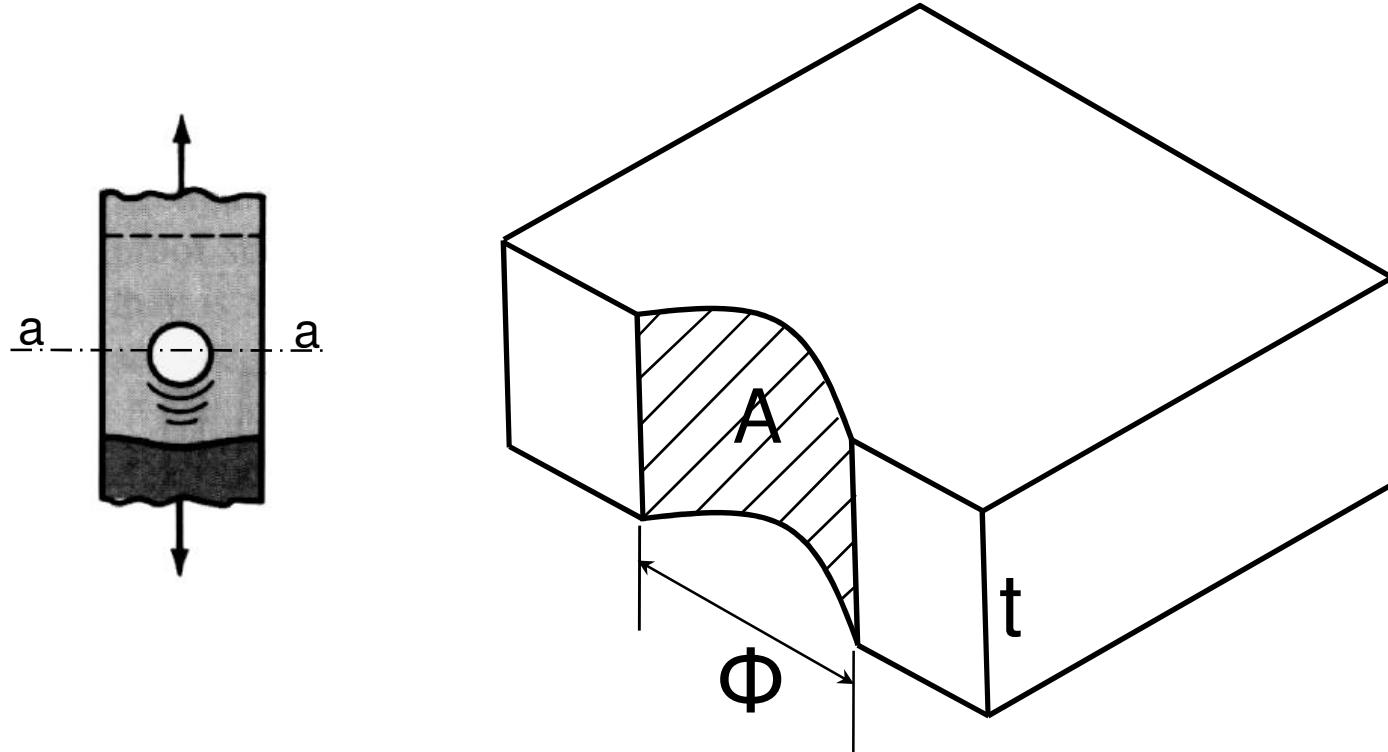
# Modos de Falha de Ligações ao Corte



- (a) Aplicação de Rebite
- (b) Flexão das Peças Ligadas
- (c) Corte do Rebite
- (d) Rotura das Peças Ligadas
- (e) Esmagamento do Rebite ou da Peça Ligada
- (f) Corte da Bainha
- (g) Rasgão da Bainha



# Análise do Esmagamento



$\tau_b$  – tensão de esmagamento

$t$  – espessura da chapa

$\Phi$  – diâmetro do furo

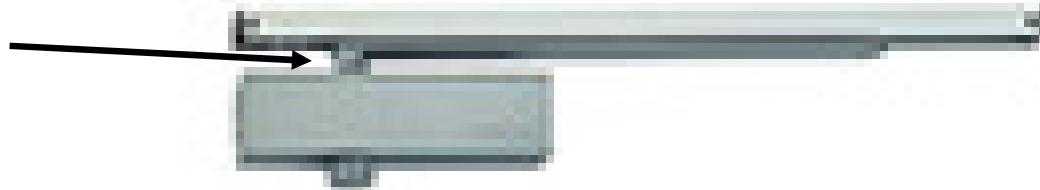
$A$  – área de esmagamento =  $t \cdot \Phi$

$$\tau_b = \frac{V}{A} = \frac{V}{\phi \cdot t}$$

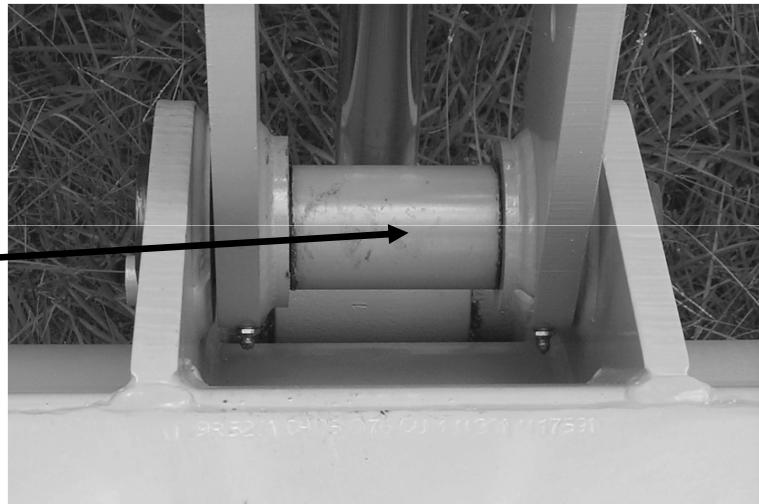


## Exemplo de Aplicação

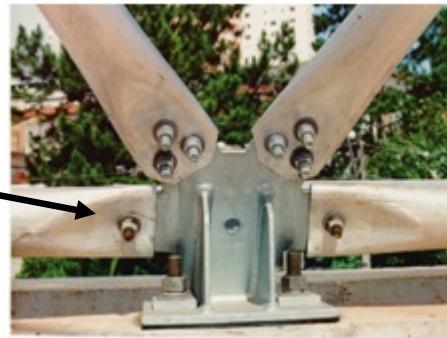
Pino da dobradiça sujeito a cisalhamento simples.



Pino deste trator submetido a cisalhamento duplo.

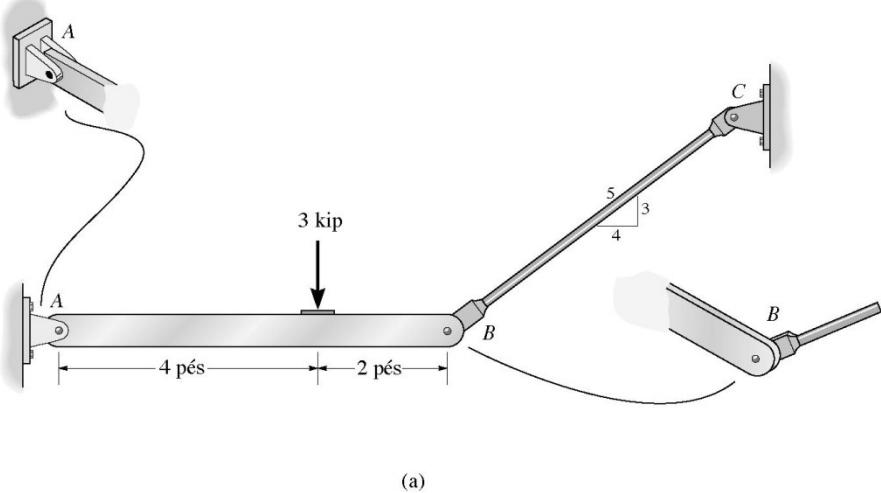


Estrutura metálica, união por parafusos – cisalhamento simples

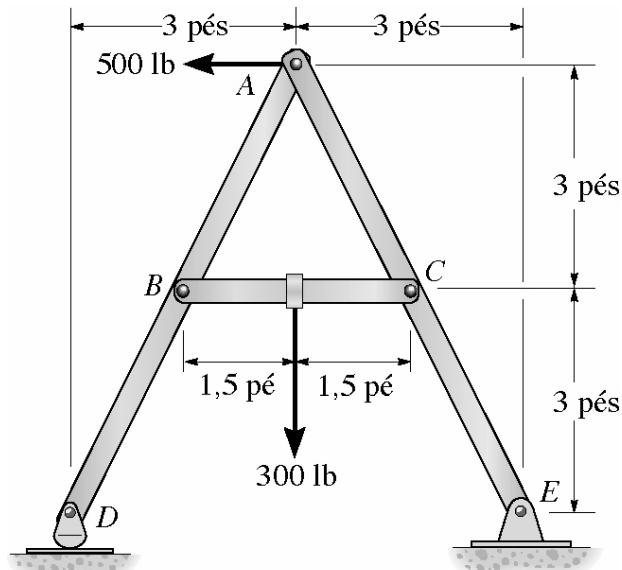


Fonte: Hibbeler,  
**Resistência dos  
Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.

Exemplo: Os dois elementos estão acoplados em B como mostra a figura. A figura também mostra o topo dos acoplamentos em A e B. Supondo que os pinos tenham tensão de cisalhamento admissível de  $\tau_{adm} = 12,5$  ksi, determinar o menor diâmetro dos pinos A e B necessário para suportar a carga



Exemplo: Os pinos em B e C da estrutura têm, cada um, um diâmetro de 0,25 pol. Supondo que os pinos estejam submetidos a *cisalhamento duplo*, determinar a tensão de cisalhamento média em cada pino. Resolver o problema para *cisalhamento simples*. Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.



Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5<sup>a</sup> ed, 2006.

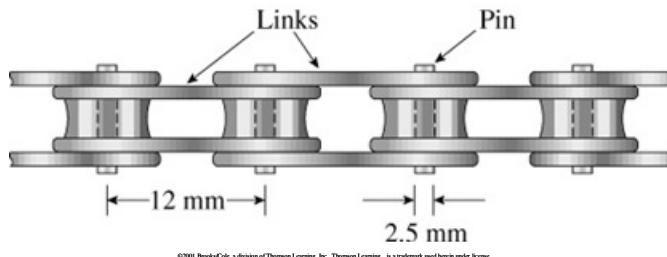
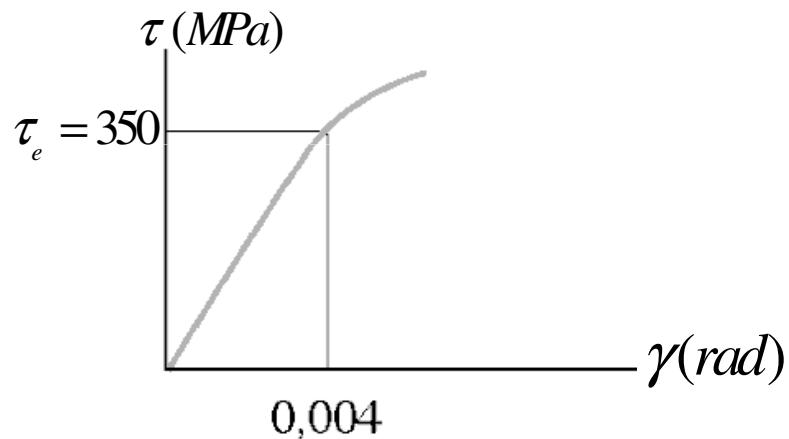


Exemplo: a corrente foi fabricada com aço SAE 1020 laminado. Determine o diâmetro do elo da corrente de modo que resista ao cisalhamento quando a corrente for submetida a uma carga estática de 8,50 kN. Dados:  $\sigma_e = 210 \text{ MPa}$ ;  $E = 210 \text{ GPa}$ . Considere que a tensão de escoamento para o cisalhamento é 60% da tensão e escoamento em tração. Caso seja requerido coeficiente de segurança igual a 2 (dois) qual deverá ser o valor do diâmetro da corrente para essa situação.

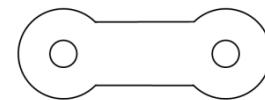


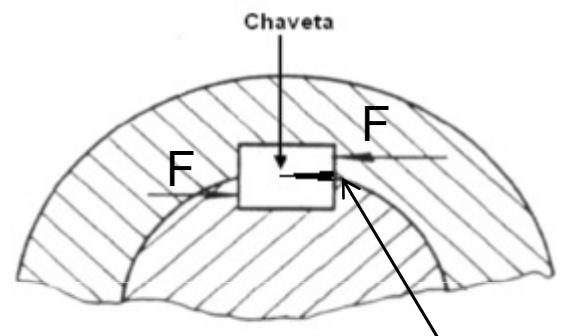
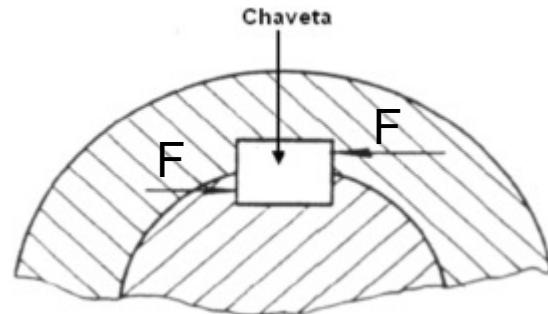


Exemplo: Uma corrente de bicicleta consiste de uma série de pequenos elos, cada um com 12 mm de comprimento entre os centros dos pinos cujo diâmetro é igual a 2,5 mm. Considere  $L$  o comprimento o braço da manivela ( $L = 300$  mm) a partir do eixo principal até o eixo do pedal e  $R$  o raio da catraca ( $R = 125$  mm). (a) determine a tração  $T$  na corrente devido à força  $P_{adm} = 800$  N aplicada a um dos pedais; (b) Calcule a tensão de cisalhamento média nos pinos; (c) pode-se afirmar que os pinos da corrente estão sofrendo apenas deformação elástica? Justifique sua resposta; (d) caso a afirmativa do item 'c' se confirme, qual o coeficiente de segurança utilizado; (e) qual a carga que causaria escoamento no pinos da corrente?

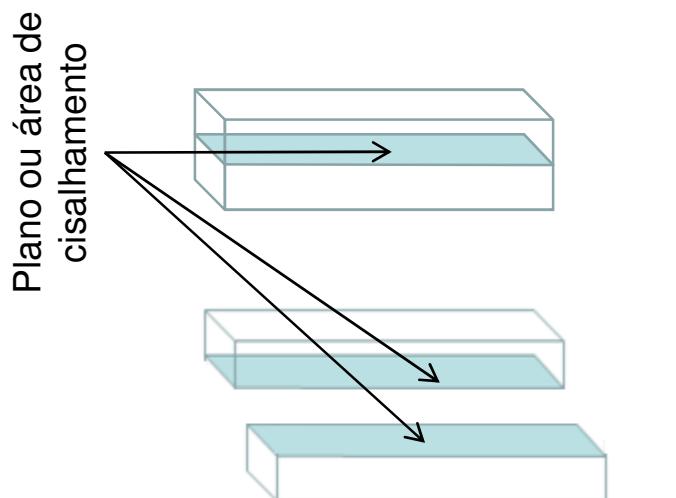
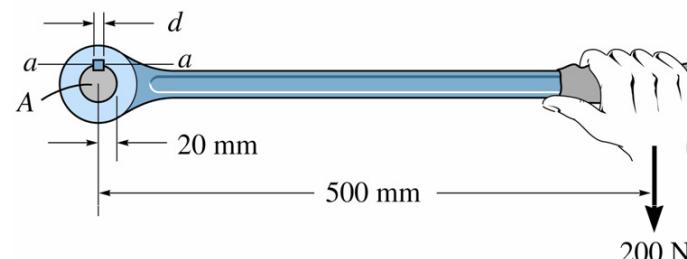


©2001 Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson Learning is a trademark and service mark under license.





Exemplo: a alavanca é presa ao eixo  $A$  por meio de uma chaveta que tem largura  $d$  e comprimento 25 mm. Supondo que o eixo esteja fixo e seja aplicada uma força vertical de 200 N perpendicular ao cabo, determinar a dimensão  $d$  se a tensão de cisalhamento admissível para a chaveta for  $T_{adm} = 35 \text{ Mpa}$ .



## 5 – Coeficiente de *Poisson*

Uma barra tracionada sofre simultaneamente alongamento axial e contração lateral e se for comprimida sofre contração axial e alongamento lateral.

Deformação Axial

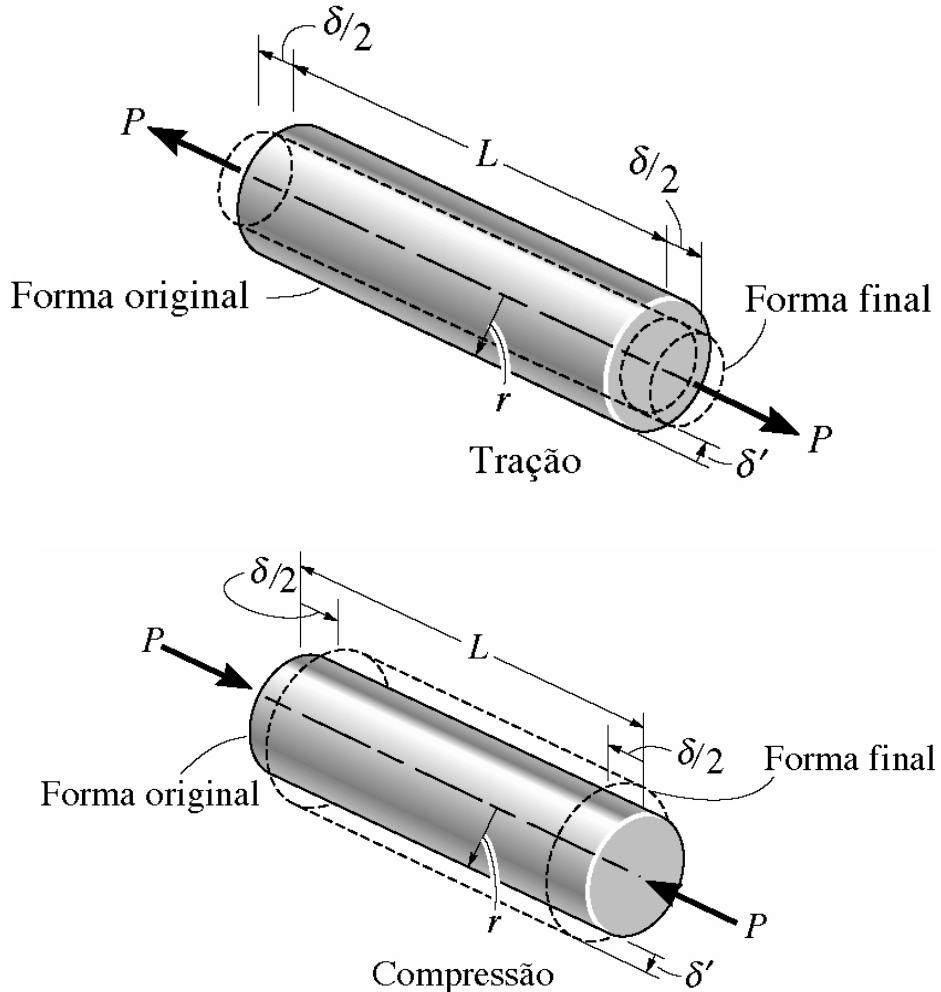
$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{\delta}{L_0}$$

Deformação Lateral

$$\varepsilon' = \frac{L'_f - L'_0}{L'_0} = \frac{\Delta L'}{L'_0} = \frac{\delta'}{L'_0}$$

Coeficiente de Poisson

$$\nu = -\frac{\text{Deformação Lateral}}{\text{Deformação Axial}}$$

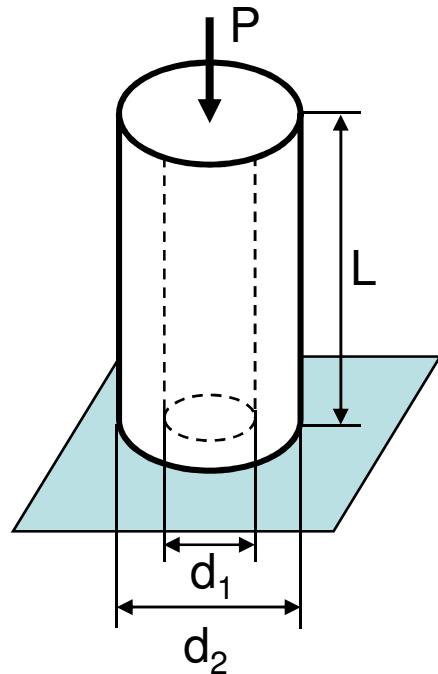


## Coeficiente de Poisson

$$\nu = - \frac{\epsilon'}{\epsilon}$$

- ❖ O sinal negativo visa compensar o fato de que as deformações apresentam sinais contrários.
- ❖ O coeficiente de *Poisson* é válido na região elástica do material.
- ❖ Valores experimentais do coeficiente de *Poisson* para a maioria dos materiais variam entre 0,25 e 0,35. A borracha é o material que apresenta o maior valor com 0,5 e a cortiça o menor valor nulo. O concreto apresenta valor entre 0,1 e 0,2.

Exemplo: Um tubo de aço de comprimento  $L = 4,0$  pés, diâmetro externo  $d_2 = 6,0$  pol e diâmetro interno  $d_1 = 4,5$  pol é comprimido por uma força axial  $P = 140$  kip. O material tem módulo de elasticidade  $E = 30.000$  ksi e coeficiente de *Poisson* igual a 0,3. Dado:  $30 \text{ ksi} < \sigma < 100 \text{ ksi}$ .



$$A = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2) = 12,34 \text{ pol}^2$$

$$\sigma = -\frac{P}{A} = -11,32 \text{ ksi} \text{ (sinal negativo indica compressão)}$$

Como a tensão desenvolvida é inferior a tensão admissível o material sofre deformação elástica, portanto vale a Lei de Hooke

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = -377,3 \times 10^{-6}$$

$$\delta = \varepsilon \cdot L = -0,018 \text{ pol}$$

$$\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon = 113,2 \times 10^{-6}$$

$$\Delta d_2 = \varepsilon' \cdot d_2 = 0,000679 \text{ pol}$$

$$\Delta d_1 = \varepsilon' \cdot d_1 = 0,000509 \text{ pol}$$

$$\Delta t = \varepsilon' \cdot t = 0,000085 \text{ pol}$$

## 6 – Lei de *Hooke* em Cisalhamento

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$\tau \Rightarrow$  Tensão Cisalhante

$G \Rightarrow$  Módulo de rigidez transversal

ou módulo de elasticidade para cisalhamento

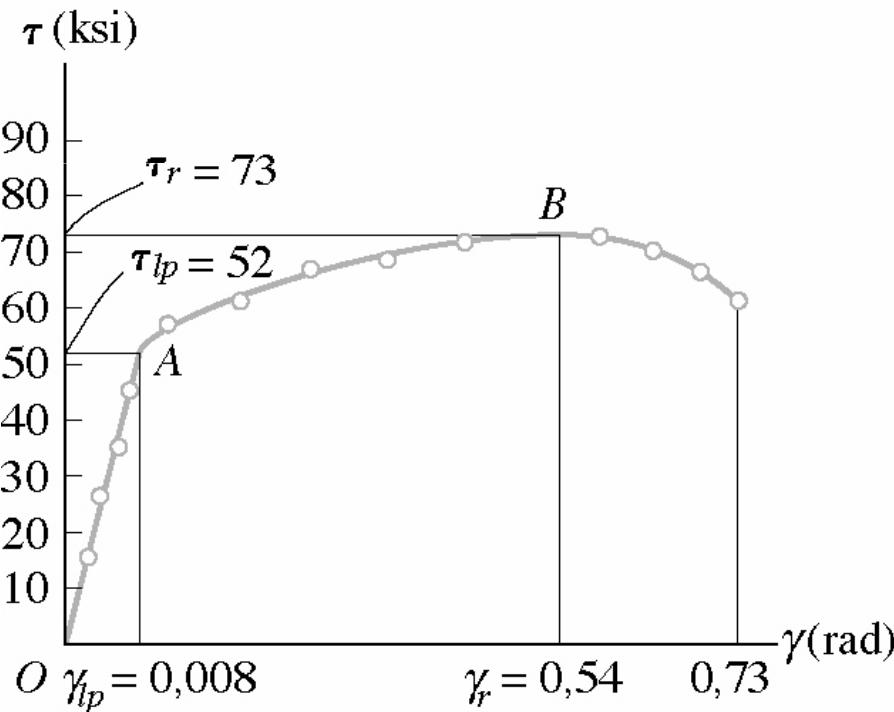
$\gamma \Rightarrow$  Deformação Cisalhante

Relação entre  $G$  e  $E$

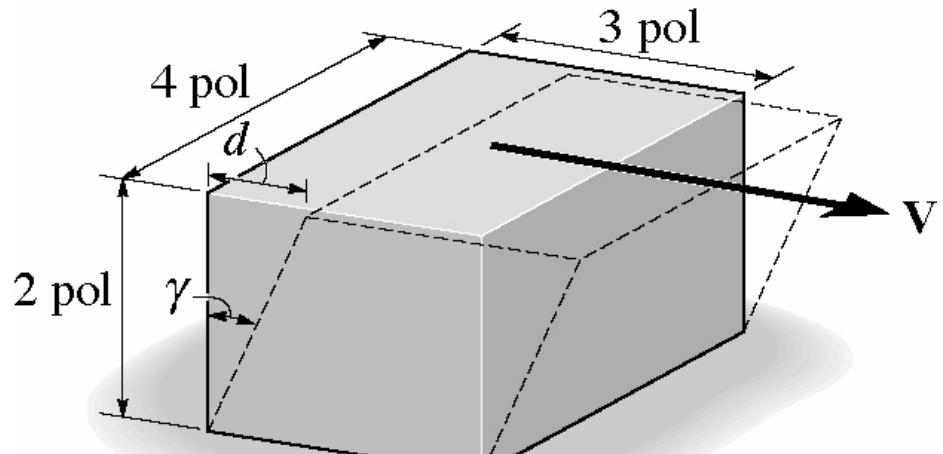
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$



Um corpo-de-prova de liga de titânio é testado em torção, e o diagrama tensão-deformação de cisalhamento é mostrado na Figura 3.25a. Determinar o módulo de cisalhamento  $G$ , o limite de proporcionalidade e o limite de resistência ao cisalhamento. Determinar também a distância máxima  $d$  que o topo de um bloco desse material, mostrado na Figura 3.25b, pode ser deslocado horizontalmente se o material comporta-se elasticamente quando submetido à força de cisalhamento  $\mathbf{V}$ . Qual é a intensidade de  $\mathbf{V}$  (força cortante ou de cisalhamento) necessária para provocar o deslocamento?



(a)



(b)

Gere, 2003.

## Solução

- ✓ Módulo de cisalhamento: representa a inclinação da reta  $AO$  do diagrama  $\zeta$ - $\gamma$ . As coordenadas do ponto  $A$  são (0,008 rad, 52 ksi).

$$G = \frac{52 \text{ ksi}}{0,008 \text{ rad}} = 6.500 \text{ ksi} \quad \text{Lei de Hooke para o cisalhamento}$$

- ✓ Limite de Proporcionalidade é obtido diretamente do diagrama.

$$\zeta_{lp} = 52 \text{ ksi}$$

- ✓ Limite de Resistência ao Cisalhamento é obtido diretamente do diagrama, ponto  $B$ .

$$\zeta_r = 73 \text{ ksi}$$

- ✓ Limite Elástico Máximo e Força de Cisalhamento

$$\gamma = \operatorname{tg} (0,008 \text{ rad}) \approx 0,008 \text{ rad} = \frac{d}{2 \text{ pol}} \Rightarrow d = 0,02 \text{ pol}$$

$$\zeta_{med} = \frac{V}{A}$$

$$52 \text{ ksi} = \frac{V}{(3 \text{ pol}).(4 \text{ pol})}$$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} V = 624 \text{ kip}$

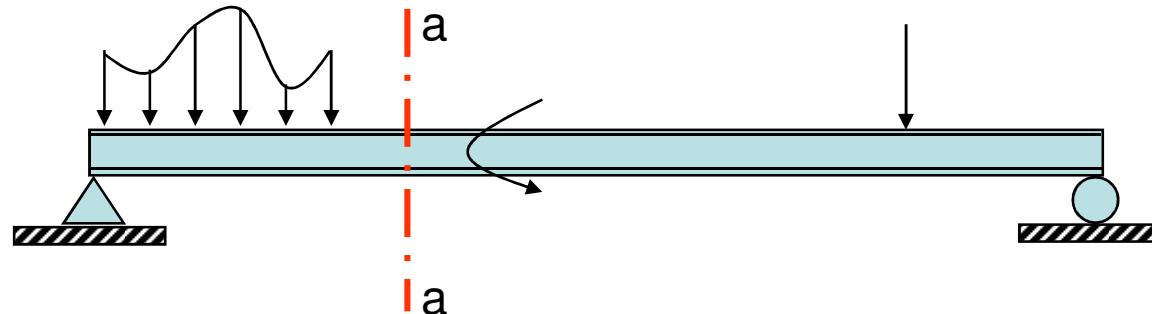
Gere, 2003.

# Introdução à Flexão

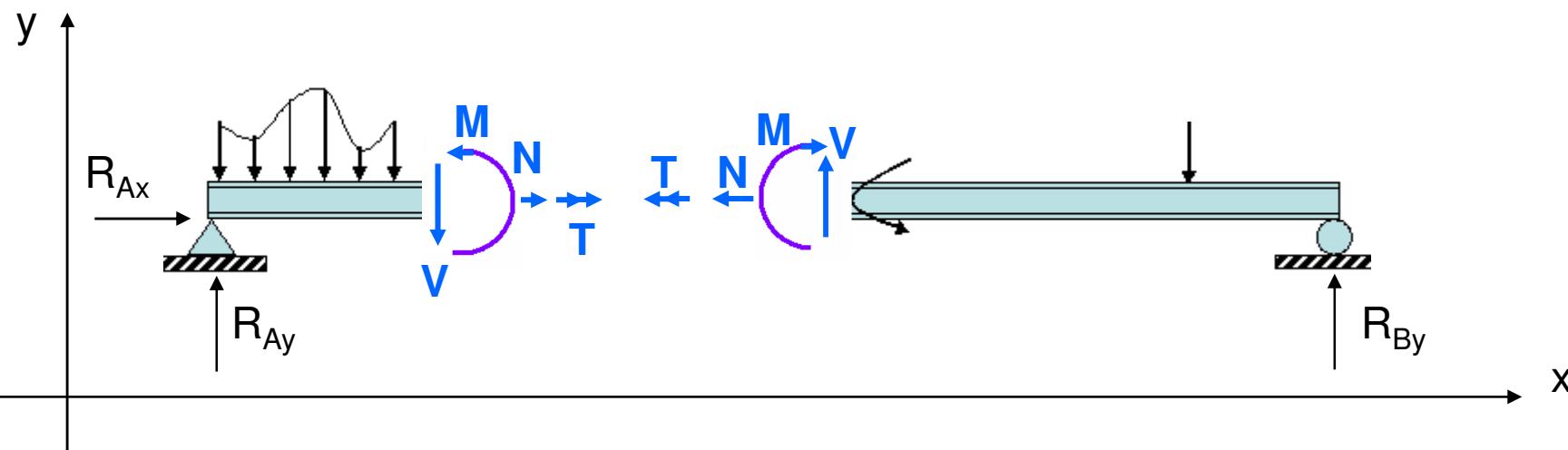
## Determinação dos Esforços Internos

### - Método das Seções -

#### Sistema Bidimensional



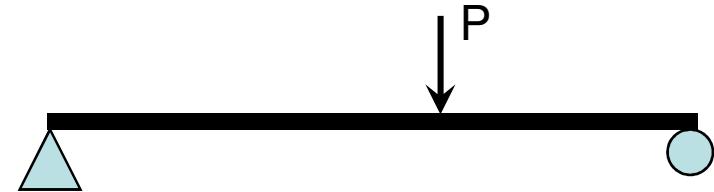
#### Seção a-a – Convenção das Solicitações Internas



# Tipos de Carregamentos

Prof. MSc Eng Halley Dias

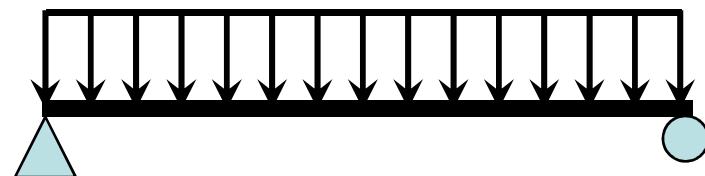
**Carga Concentrada**



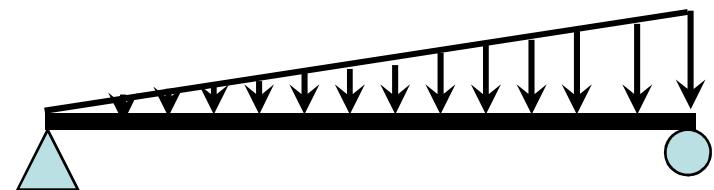
**Carga Distribuída**

**Uniformemente Distribuída**

$$q = [\text{un. de força/un. comprimento}]$$

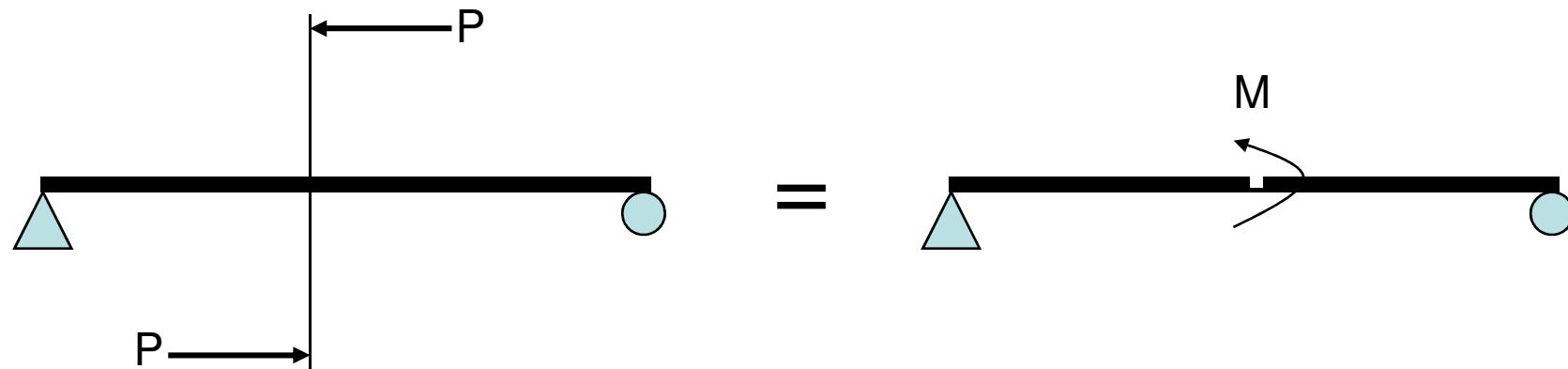


**Linearmente Distribuída**



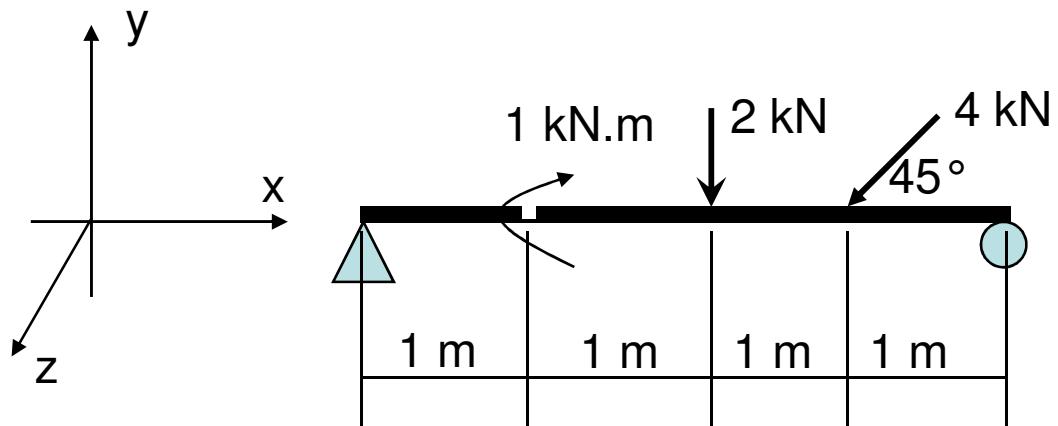
# Tipos de Carregamentos

**Momento Concentrado:  $M = [ \text{un. força} * \text{un. comprimento} ]$**



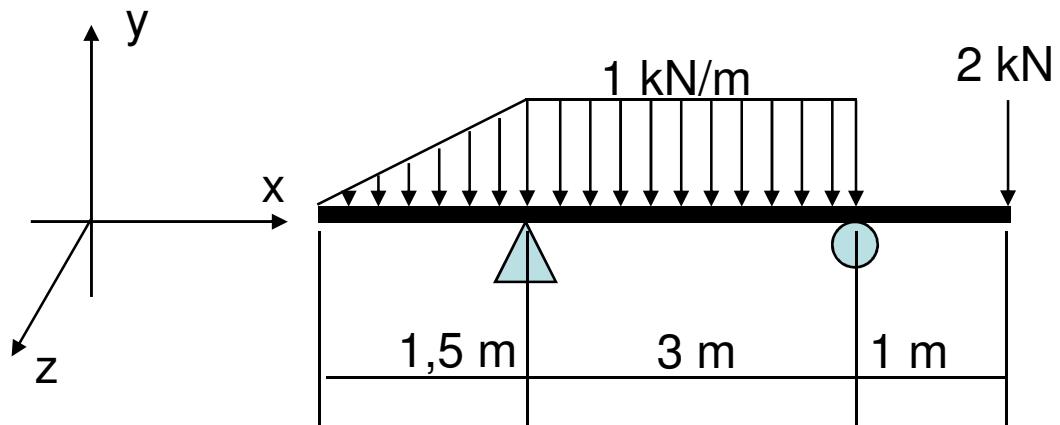
# Cálculo de Reações nos Apoios

## Exemplo (1)



# Cálculo de Reações nos Apoios

## Exemplo (2)



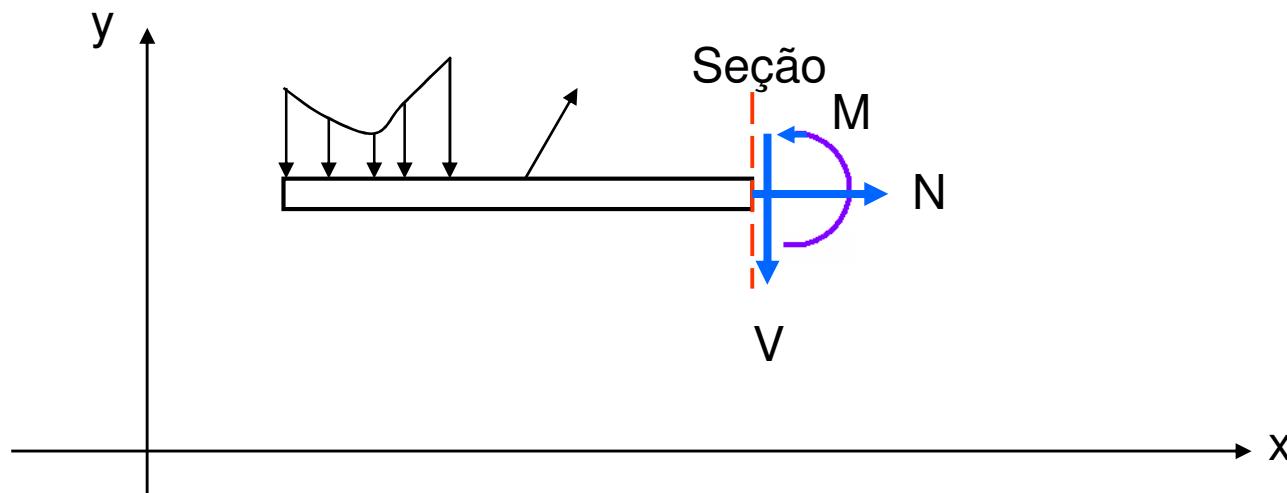
Internamente, no plano:

**N: ESFORÇO NORMAL**

**V: ESFORÇO CORTANTE**

**M: MOMENTO FLETOR**

**Convenção**



# Cálculo da Distribuição dos Esforços Internos

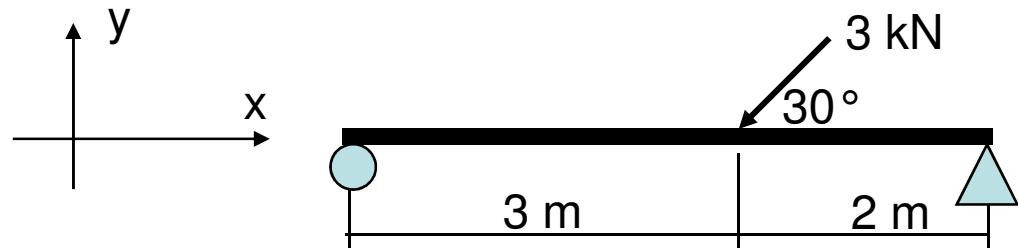
## Método Direto

No método direto estabelece-se um roteiro para a determinação das equações que regem a distribuição dos esforços internos ao longo do elemento estrutural.

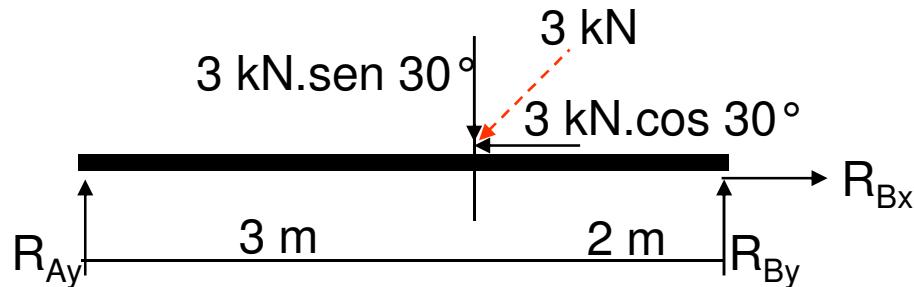
- (1) Desenhar ao diagrama de corpo livre (DCL);
- (2) Calcular as reações;
- (3) Estabelecer trechos para os quais as funções das solicitações internas são iguais. *Trecho por definição é a região da viga, onde não ocorre mudanças no carregamento, por descontinuidade ou por apoios.*
- (4) Para cada trecho aplicar as equações de equilíbrio determinando as equações para os esforços internos;
- (5) Desenhar os diagramas das solicitações.



Exemplo: Dada a viga abaixo submetida ao carregamento mostrado, determine as solicitações internas.



DCL



## Cálculo das Reações

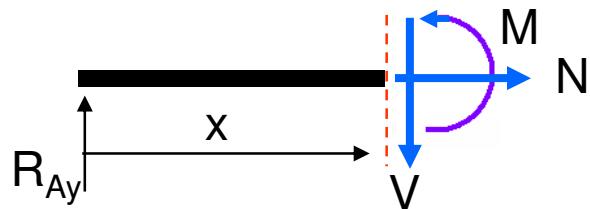
$$\sum F_x = 0; R_{Bx} - 3kN \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow R_{Bx} = 2,6kN$$

$$\sum F_y = 0; R_{Ay} + R_{By} - 3kN \cdot \sin 30^\circ = 0 \Rightarrow R_{Ay} + R_{By} = 1,50kN$$

$$\sum M_A = 0; -3kN \cdot \sin 30^\circ \cdot 3m + R_{By} \cdot 5m = 0 \Rightarrow R_{By} = 0,9kN \Rightarrow R_{Ay} = 0,6kN$$

# Cálculo das Solicitações Internas

1º Trecho:  $0 \leq x \leq 3$



$$\sum F_x = 0; N = 0 \Rightarrow N = 0$$

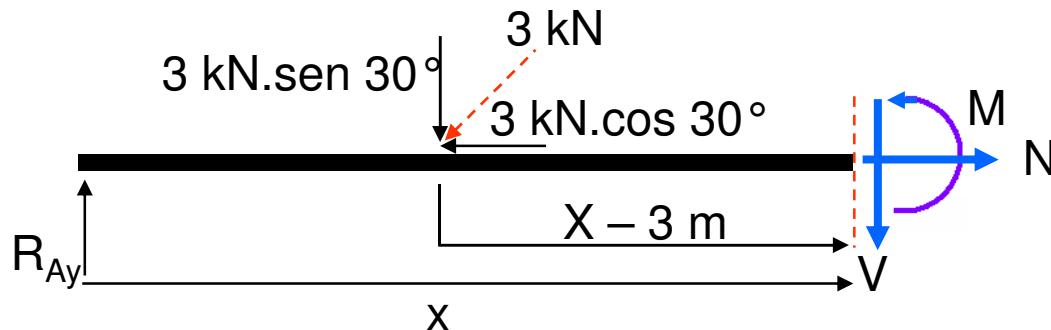
$$\sum F_y = 0; R_{Ay} - V = 0 \Rightarrow V = 0,6kN$$

$$\sum M_{seção} = 0; -R_{Ay} \cdot x + M = 0 \Rightarrow M = 0,6kN \cdot x$$

$$para \quad x = 0 \Rightarrow M = 0 \quad para \quad x = 3m \Rightarrow M = 1,8kN \cdot m$$

# Cálculo das Solicitações Internas

2º Trecho:  $3 \leq x \leq 5$



$$\sum F_x = 0; N - 2,60kN = 0 \Rightarrow N = 2,6kN$$

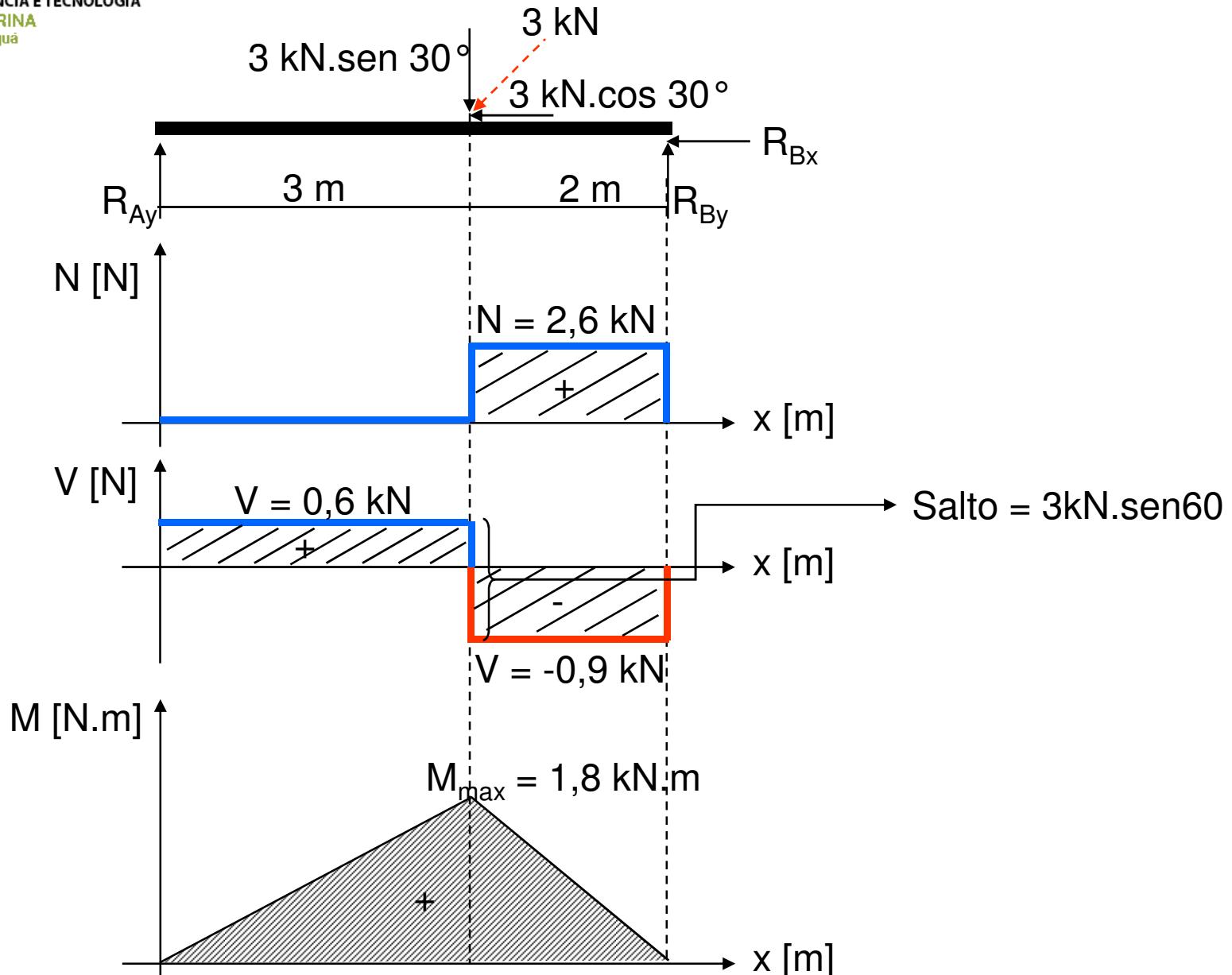
$$\sum F_y = 0; R_{Ay} - 1,50kN - V = 0 \Rightarrow V = -0,9kN$$

$$\sum M_{seção} = 0; -R_{Ay} \cdot x + 1,50kN \cdot (x - 3m) + M = 0 \Rightarrow M = 0,6kN \cdot x - 1,5kN \cdot (x - 3m)$$

$$para \ x = 3 \Rightarrow M = 1,8kN \cdot m \quad para \ x = 5m \Rightarrow M = 0N \cdot m$$



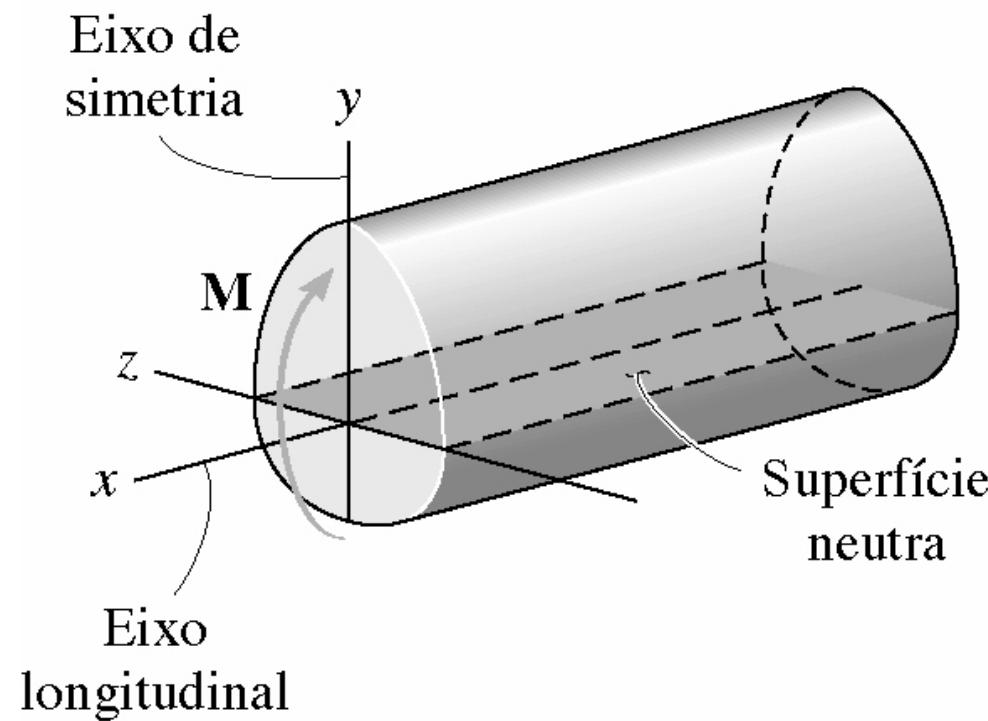
## Diagrama das Solicitações

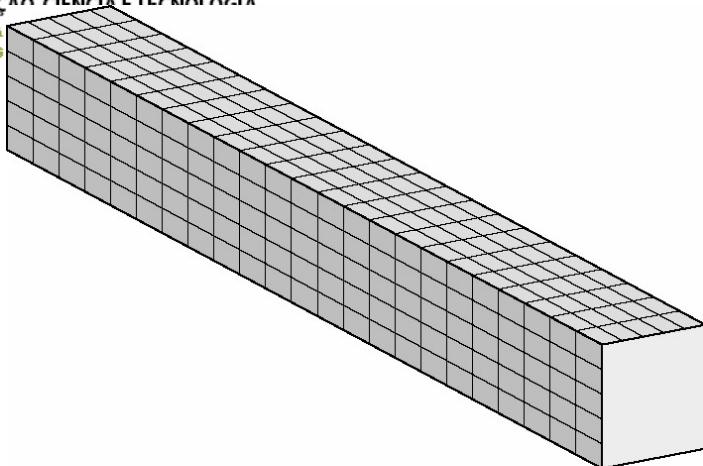




# Deformação por Flexão de um Membro Reto

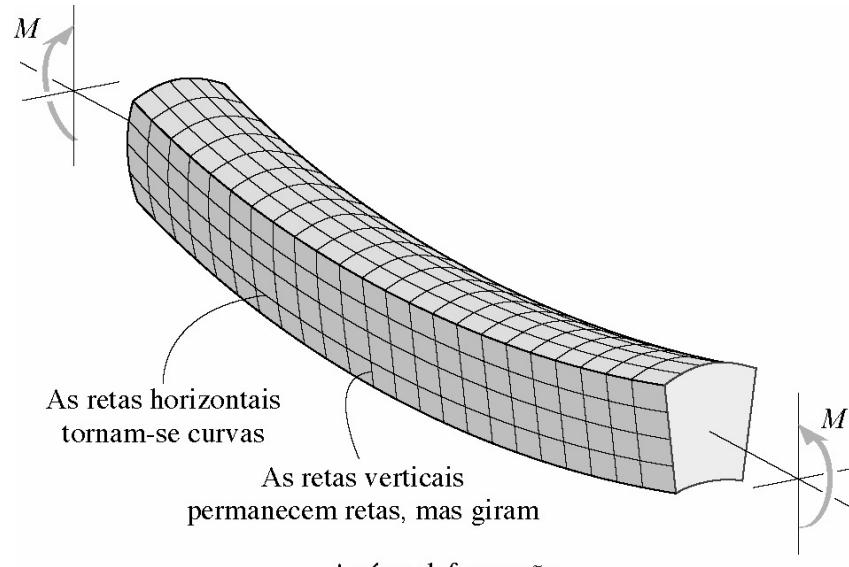
Dada uma viga prismática, feita de material homogêneo, submetida à flexão.





Antes da deformação

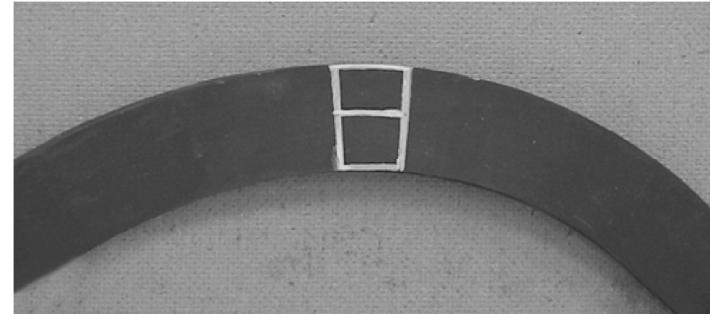
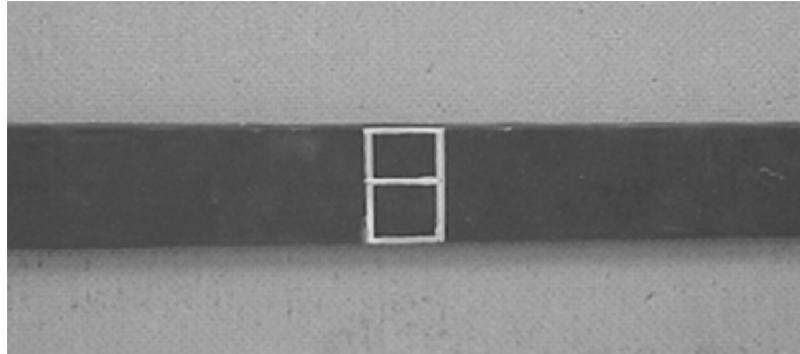
(a)



Após a deformação

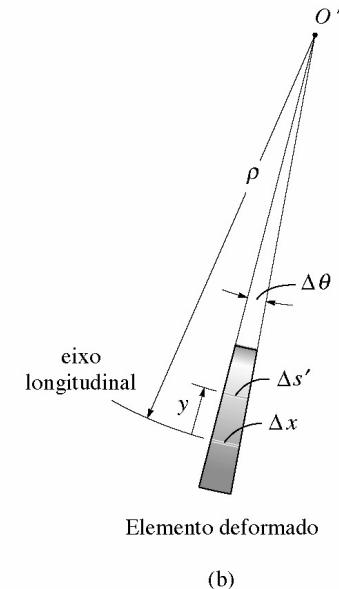
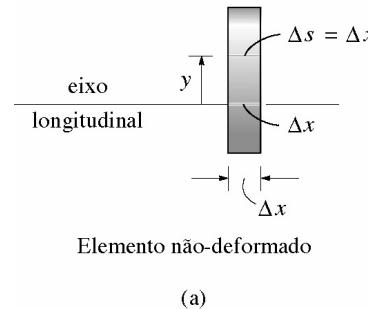
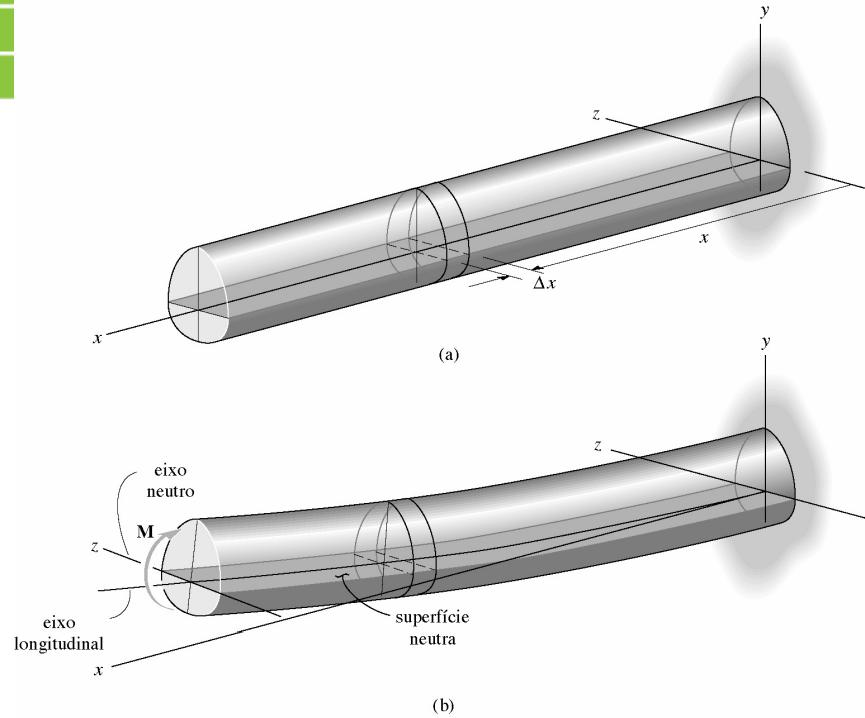
(b)

*“O comportamento de qualquer barra deformável sujeita a momento fletor faz o material da parte inferior esticar-se e o da parte superior comprimir-se. Conseqüentemente, entre as duas regiões deve existir uma superfície, chamada superfície neutra, na qual as fibras longitudinais do material não sofrem mudança de comprimento.”*



## Hipóteses Simplificativas:

- o eixo longitudinal, que fica na superfície neutra, não sofre qualquer mudança de comprimento.
- todas as seções transversais da viga permanecem planas e perpendiculares ao eixo longitudinal durante a deformação.
- qualquer deformação da seção transversal será desprezada.

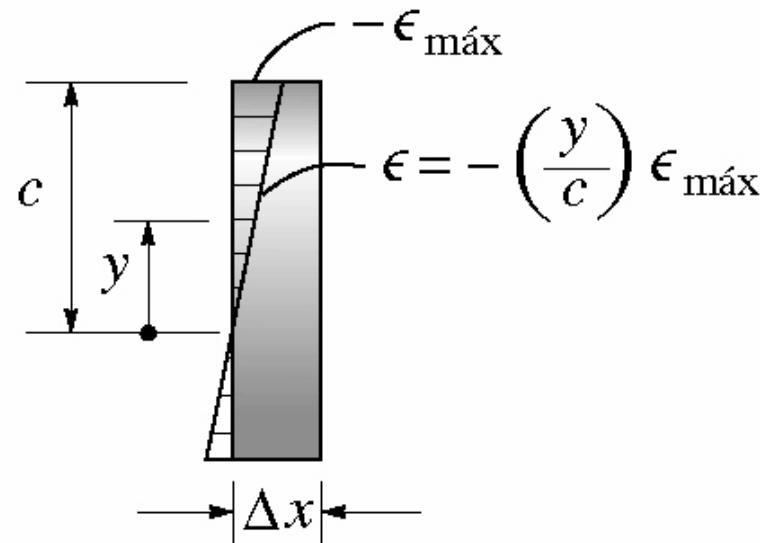


Esse resultado importante indica que a deformação normal longitudinal de qualquer elemento da viga depende de sua localização  $y$  na seção transversal e do raio de curvatura do eixo longitudinal da viga nesse ponto. Em outras palavras, para qualquer seção transversal específica, a deformação normal longitudinal varia linearmente com  $y$  a partir do eixo neutro. Ocorre contração ( $-\varepsilon$ ) nas fibras localizadas acima do eixo neutro ( $+y$ ), enquanto ocorre alongamento ( $+\varepsilon$ ) nas fibras localizadas abaixo do eixo ( $-y$ ).

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{(\rho - y)\Delta\theta - \rho\Delta\theta}{\rho\Delta\theta}$$

$$\varepsilon = -\frac{y}{\rho}$$



Distribuição da deformação normal

$$\epsilon = -\left(\frac{y}{c}\right) \cdot \epsilon_{\text{max}}$$



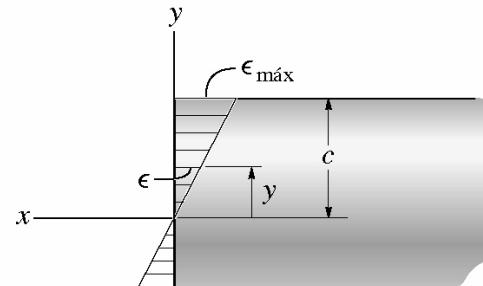
# Fórmula da Flexão

Considerar que o material tem comportamento linear-elástico de modo que a lei de Hooke possa ser aplicada.

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

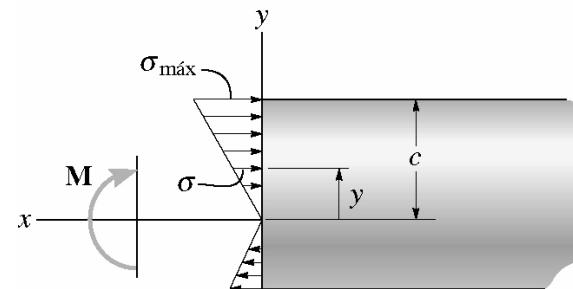
$$\sigma = E \cdot \left( \frac{(-y)}{c} \right) \cdot \epsilon_{\text{máx}}$$

$$\sigma = - \left( \frac{y}{c} \right) \cdot \sigma_{\text{máx}}$$



Variação da deformação normal  
(vista lateral)

(a)



Variação da tensão de flexão  
(vista lateral)

(b)



$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot c}{I}$$

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$

$\sigma_{\max}$ : tensão normal máxima no elemento, que ocorre no ponto da área da seção transversal mais afastado do eixo neutro.

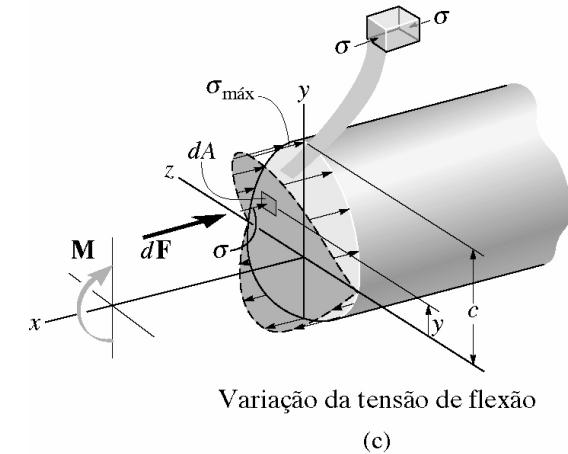
$\sigma$ : tensão normal na distância intermediária  $y$  dos eixo neutro.

$M$ : momento interno resultante, determinado pelo método das seções e pelas equações de equilíbrios, e calculado em torno do eixo neutro da seção transversal.

$I$ : momento de inércia da área da seção transversal calculado em torno do eixo neutro.

$y$ : distância perpendicular qualquer do eixo neutro, onde  $\sigma$  atua.

$c$ : distância perpendicular do eixo neutro ao ponto mais afastado desse eixo, no qual  $\sigma_{\max}$  atua.



# Momento de Inércia

$$I = \sum (\bar{I} + A \cdot d^2)$$

$I$  : momento de inércia da área composta

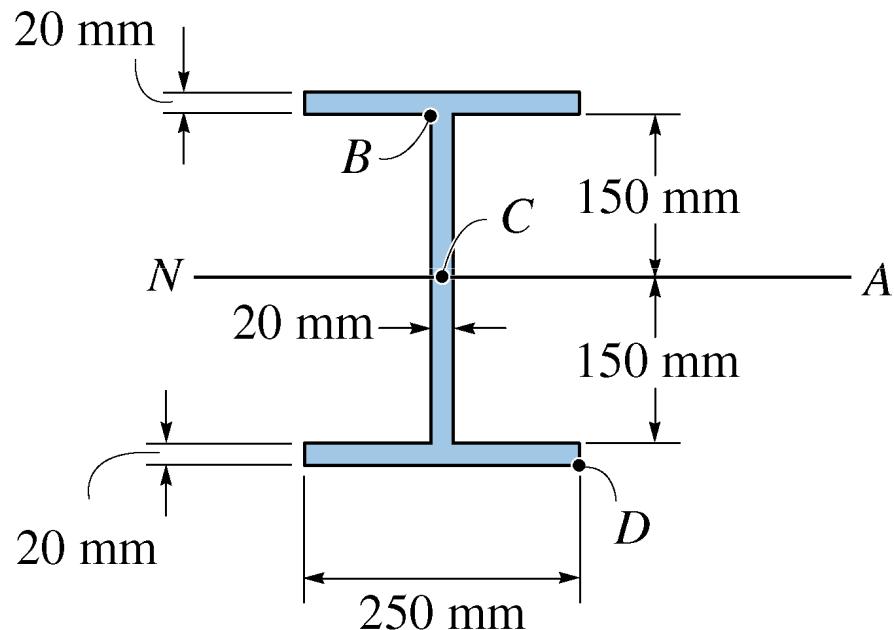
$A$  : área da seção particular.

$d$ : distância do eixo que passa pelo centróide

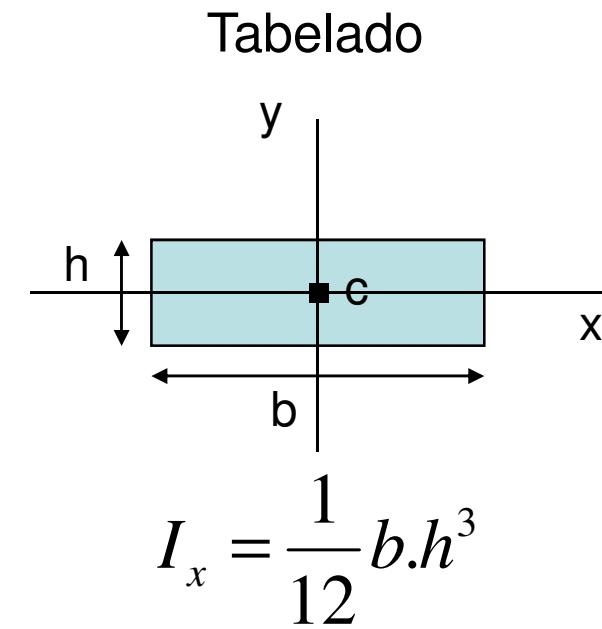
da área composta ao eixo que passa pelo contróide  
da área particular.



Exemplo: Determinar o momento de inércia do perfil I mostrado na figura abaixo.

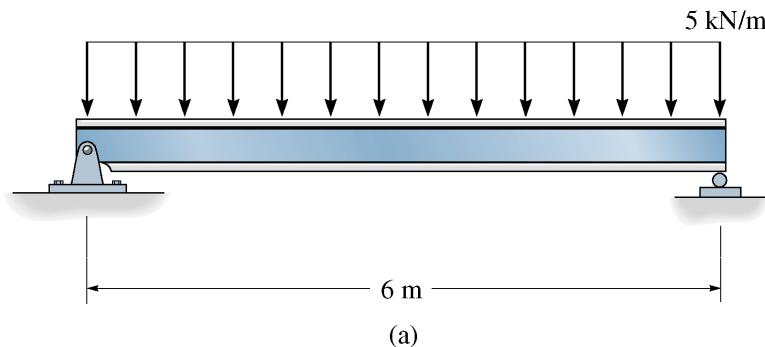


(b)

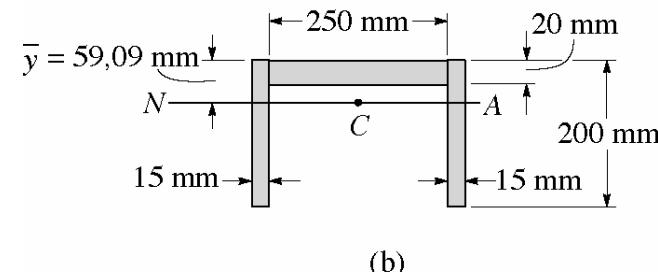
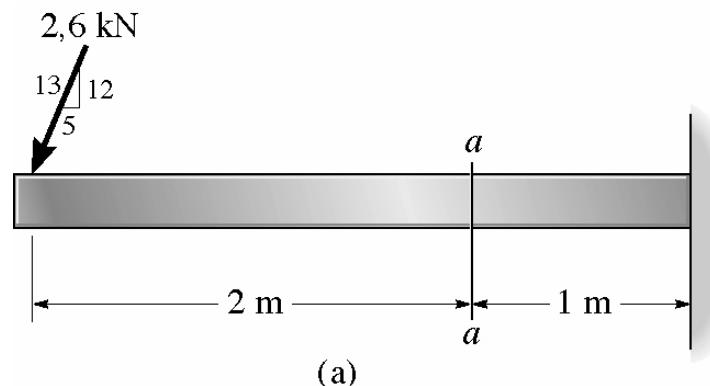


$$I_y = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$

Exemplo 01: A viga simplesmente apoiada da figura tem área da seção transversal mostrada no exemplo anterior. Determinar a tensão de flexão máxima absoluta na viga e desenhar a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



Exemplo 02: A viga mostrada na figura tem área da seção transversal com perfil em forma de U. Determinar a tensão de flexão máxima que ocorre na seção a-a da viga.



# TORÇÃO

Estudo de tensões e deformações produzidas em peças de seção transversal circular, sujeitas a ação de conjugados que tendem a torcer essas peças.

Tais conjugados são chamados de:

Momentos de torção

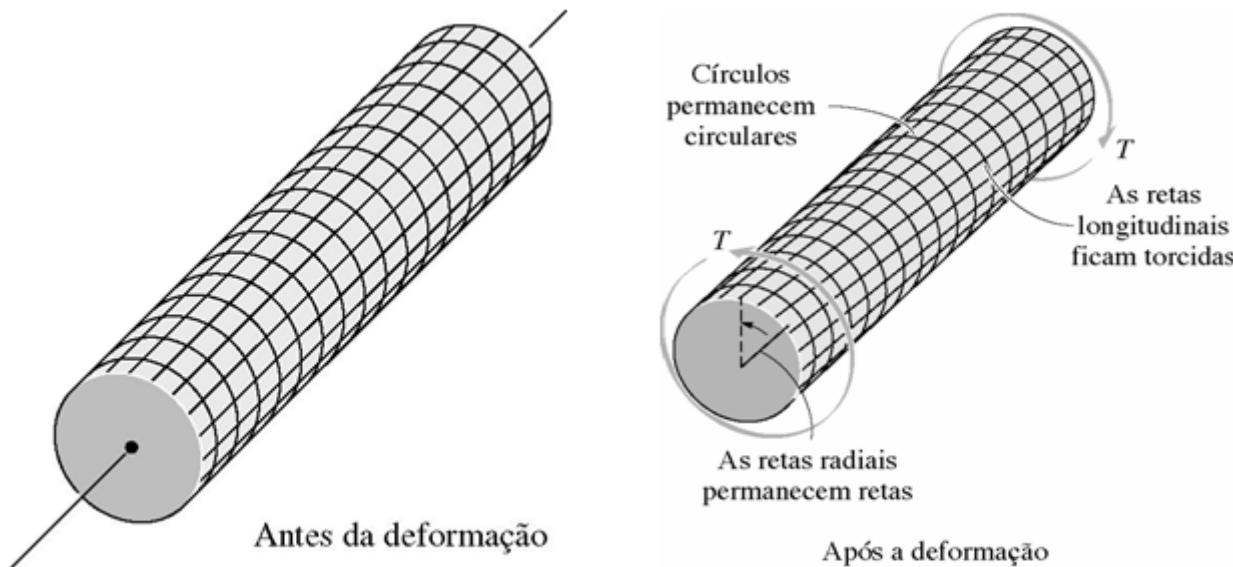
Momentos torcionais

Torque: é o momento que tende a torcer o membro em torno de seu eixo longitudinal.

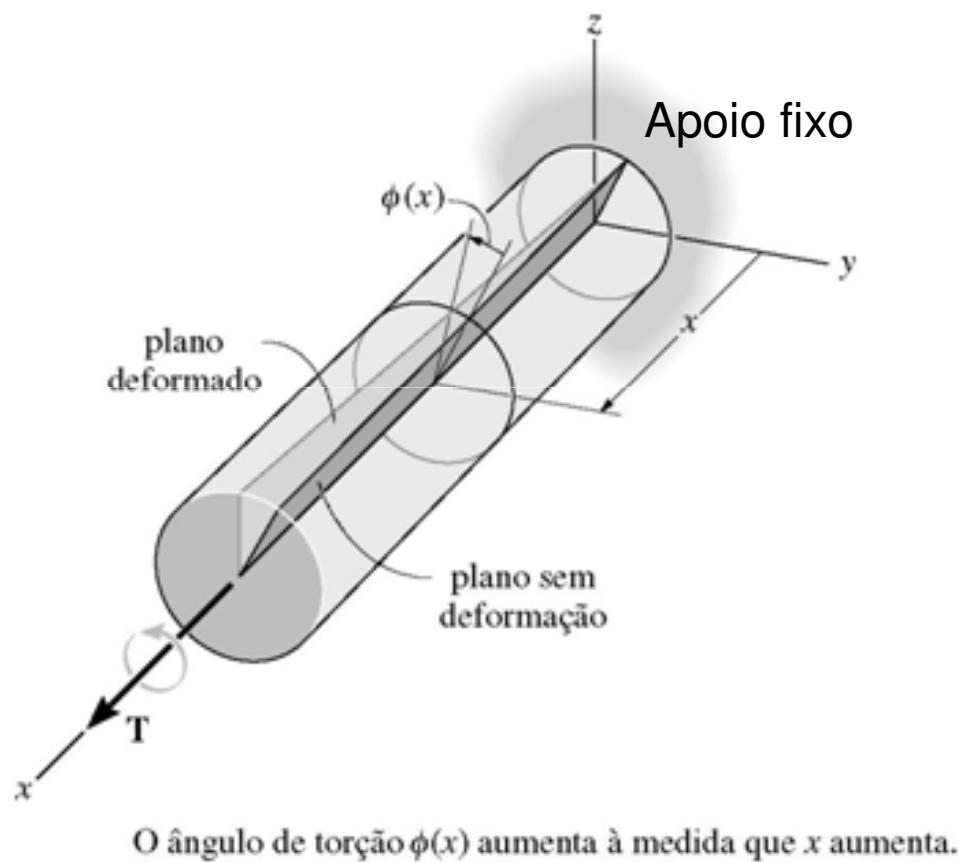
# Hipóteses Simplificativas

## para eixos de seção circular uniforme

- 1) Uma seção inicialmente plana, perpendicular ao eixo da seção circular, permanece plana após a aplicação dos torques.
- 2) Em um membro circular sujeito à ação de um torque, as deformações angulares  $\gamma$  variam linearmente a partir do eixo central. Isso significa que as linhas radiais no plano ao longo do eixo longitudinal permanecem retas após a deformação.

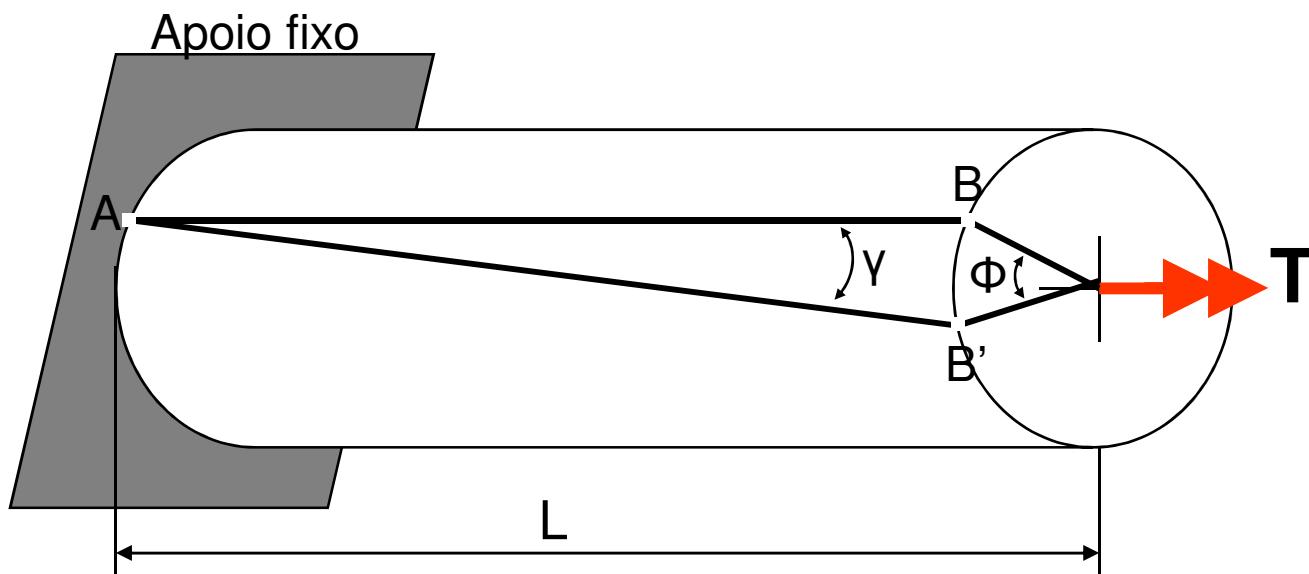
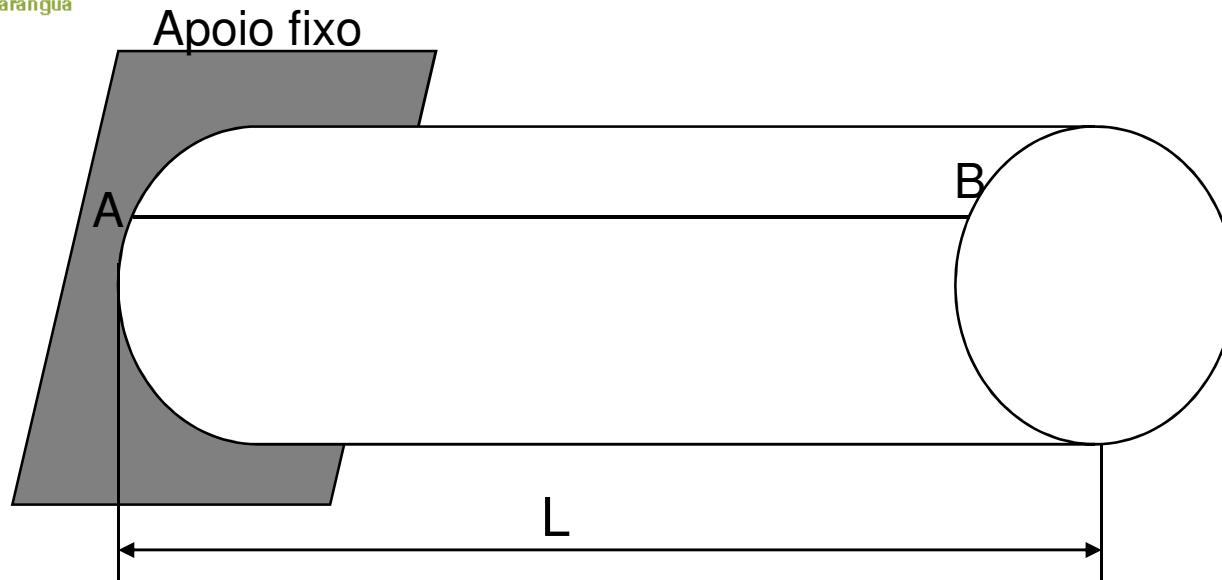


# Análise de Deformação em um Eixo



Se o eixo estiver preso em uma extremidade e for aplicar um torque na outra extremidade, o plano sombreado da figura ao lado se distorcerá e assumirá uma forma oblíqua como mostrado. Nesse caso, uma linha radial localizada na seção transversal a uma distância  $x$  da extremidade fixa, do eixo girará por meio de um ângulo  $\Phi(x)$ . O ângulo  $\Phi(x)$ , assim definido, é denominado **ângulo de torção**. Ele depende da posição  $x$  e varia ao longo do eixo como mostrado.

# Análise de Deformação em um Eixo



## $\gamma$ : Deformação de Cisalhamento

## $\Phi$ : Ângulo de Torção

Para o arco BB' temos:

$$BB' = L \cdot \operatorname{tg} \gamma \quad \text{e} \quad BB' = \rho \cdot \operatorname{tg} \Phi$$

onde  $\gamma$  e  $\Phi$  são medidos em radianos. Se consideramos as deformações no regime elástico, ou seja, muito pequenas, isso implica que a tangente do ângulo é o próprio ângulo quando medidos em radianos, assim:

$$\operatorname{tg} \gamma = \gamma \text{ e } \operatorname{tg} \Phi = \Phi$$

∴

$$\gamma \cdot L = \Phi \cdot \rho \Rightarrow \gamma = \frac{\rho \cdot \Phi}{L}$$

$\rho$  é um raio qualquer entre o centro do eixo e a superfície externa.

# Deformação Cisalhante Máxima

Seja um eixo de raio “c”

$$\gamma_{\max} = \frac{c \cdot \Phi}{L}$$

Deformação Cisalhante no Interior do Eixo

$$\gamma = \frac{\rho}{c} \cdot \gamma_{\max}$$

# Equação da Torção

## Regime Elástico

Lei de Hooke para tensões e deformações de Cisalhamento

$$\tau = G \cdot \gamma$$

$$\tau = G \cdot \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}; \text{ como } G \cdot \gamma_{\max} = \tau_{\max}$$

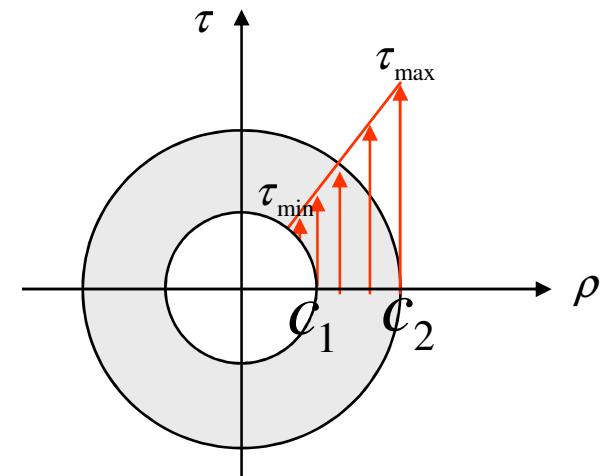
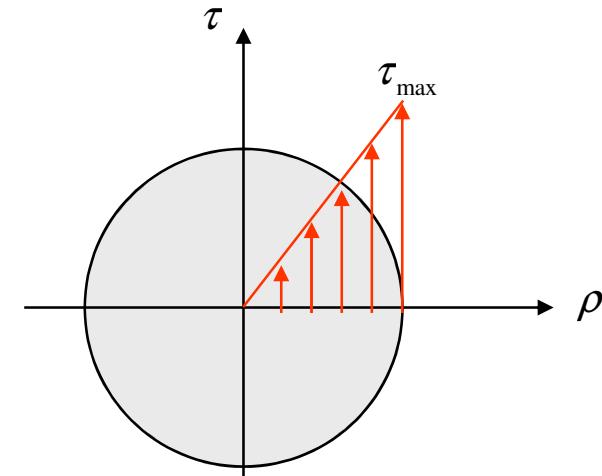
∴

$$\tau = \frac{\rho}{c} \cdot \tau_{\max}$$

Para eixo Vazado

$$\tau_{\min} = \frac{c_1}{c_2} \cdot \tau_{\max}$$

Onde  $c_2$  é o raio externo e  $c_1$  o raio interno



# Equação da Torção

## Eixo submetido a um Torque “T”

$$\int \rho \cdot dF = T$$

$$dF = \tau \cdot dA$$

$$\int \rho \cdot \tau \cdot dA = T$$

$$\int \rho \cdot \tau_{\max} \cdot \frac{\rho}{c} \cdot dA = T$$

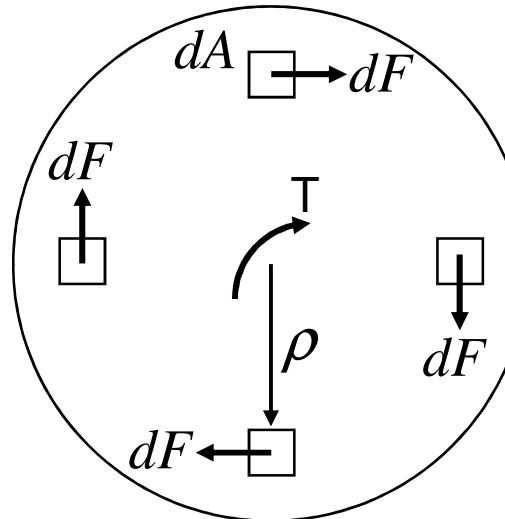
∴

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \cdot \int \rho^2 \cdot dA$$

onde,  $\int \rho^2 dA$  é definido como momento Polar de Inércia

da Seção Transversal  $\equiv J$

$$\therefore T = \frac{\tau_{\max} \cdot J}{c} \quad e \quad \tau_{\max} = \frac{T \cdot c}{J}$$



Para Eixo Maciço

$$J = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot c^4$$

Para Eixo Vazado

$$J = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (c_2^4 - c_1^4)$$

# Ângulo de Torção no Regime Elástico

$$\gamma_{\max} = \frac{c \cdot \Phi}{L} \quad e \quad \gamma_{\max} = \frac{\tau_{\max}}{G} = \frac{T \cdot c}{J \cdot G}$$

∴

$$\Phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad [rad]$$

No regime elástico o ângulo de torção  $\Phi$  é proporcional ao momento de torção  $T$  aplicado ao eixo circular.