Limites **Material Básico: Calculo A, Diva Fleming**

O conceito de Limite é importante na construção de muitos outros conceitos no cálculo diferencial e integral, por exemplo, as noções de derivada e de integral, que são os suportes de toda a construção das variáveis físicas, além da importância no cálculo de área e volumes.

A noção de limite fornece um caminho preciso para distinguir o comportamento de algumas funções que variam continuamente e o comportamento de outras funções que podem variar independente do modo como se controla as variáveis.

Na matemática, o limite tem o objetivo de determinar o comportamento de uma função à medida que ela se aproxima de alguns valores, sempre relacionando os pontos x e y. Utilizando a função $y = x + 1$, vamos determinar os valores de y à medida que x assume alguns valores. Veja:

x	$y = x + 1$
-2	-1
-1	0
1	2
2	3

Note que à medida que x se aproxima de –2, o valor de y se aproxima de –1, isto é, quando x tende a –2 ($x \to -2$), y tende a –1 ($y \to -1$). Portanto:

$x \to -1$, $y \to 0$

$x \to 1$, $y \to 2$

$x \to 2$, $y \to 3$

A utilização de limites ajuda na compreensão de diversas situações envolvendo funções, através de pontos notáveis como mínimo e máximo ou até mesmo os pontos de intersecção entre funções, a continuidade de funções também utiliza as noções de limites, bem como os problemas envolvendo séries numéricas convergentes ou divergentes.

Observe a função $f(x) = x^2$, mostrando que à medida que os valores de x aproximam de 3, pela esquerda ou pela direita, a função se aproxima do valor 9.

Pela direita

$f(3,1) = (3,1)^2 = 9,61$

$f(3,01) = (3,01)^2 = 9,06$

$f(3,001) = (3,001)^2 = 9,006001$

$f(3,0001) = (3,0001)^2 = 9,00060001$

Pela esquerda

$f(2,9) = (2,9)^2 = 8,41$

$f(2,99) = (2,99)^2 = 8,9401$

$f(2,999) = (2,999)^2 = 8,994001$

$f(2,9999) = (2,9999)^2 = 8,99940001$

Observe que à medida que os valores se aproximam de 3, tanto pela direita quanto pela esquerda, a imagem da função $f(x) = x^2$, fica mais próxima do valor 8.

Exemplo

Dada a função f(x) = 4x + 1, determine a sua imagem à medida que o valor de x tende a 2.

$$\lim_{x \to 2}(4x+1) = 4 * 2 + 1 = 9$$

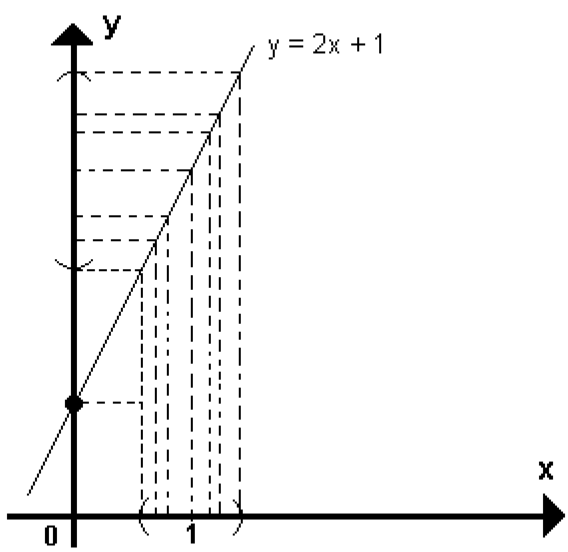
f(x) = 4x + 1 f(2) = 4 * 2 + 1 f(2) = 9

LIMITE DE UMA FUNÇÃO

Seja a função f(x)=2x+1. Vamos dar valores a **x** que se aproximem de 1, pela sua direita (valores maiores que 1) e pela esquerda (valores menores que 1) e calcular o valor correspondente de **y**:

x	*y* = 2*x* + 1
1,5	4
1,3	3,6
1,1	3,2
1,05	3,1
1,02	3,04
1,01	3,02

x	*y* = 2*x* + 1
0,5	2
0,7	2,4
0,9	2,8
0,95	2,9
0,98	2,96
0,99	2,98



Notamos que à medida que *x* se aproxima de 1, *y* se aproxima de 3, ou seja, quando *x* tende para 1 ($x \to 1$), *y* tende para 3 ($y \to 3$), ou seja:

$$\boxed{\lim_{x\to 1}(2x+1)=3}$$

Esse é o estudo do comportamento de f(*x*) quando *x* tende para 1 ($x \to 1$). Nem é preciso que *x*assuma o valor 1. Se f(*x*) tende para 3 (f(*x*) $\to$ 3), dizemos que o limite de f(*x*) quando $x \to 1$ é 3, embora possam ocorrer casos em que para $x = 1$ o valor de f(*x*) não seja 3.

De forma geral, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$$

se, quando *x* se aproxima de *a* ($x \to a$), f(*x*) se aproxima de *b* (f(*x*)$\to$*b*).

Agora seja a função **f(x) = x²** e uma sucessão qualquer que convirja para **2** pela **direita** ou pela **esquerda**.

Calculando **f(x)** para cada um dos infinitos valores à direita de 2 dados pela sucessão (2,1 ; 2,01 ; 2,001 ; ...), teremos por exemplo:

$f(2,1) = (2,1)^2 = 4,41$ $\quad f(2,01) = (2,01)^2 = 4,0401$ $\quad f(2,001) = (2,001)^2 = 4,004001$

Observa-se desta forma, que a medida que **x** aproxima-se de **2** pela direita a imagem **f(x)** aproxima-se de **4**, e escreve-se:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2) = 4$$

De outro modo, se **x** for assumindo os infinitos valores à esquerda de **2** dados pela sucessão (1,9 ; 1,99 ; 1,999 ; ...), termos para **f(x)**:

$f(1,9) = (1,9)^2 = 3,61$ $\quad f(1,99) = (1,99)^2 = 3,9601$ $\quad f(1,999) = (1,999)^2 = 3,9960010$

Onde os valores de **x** ao aproximar-se de **2** pela esquerda produz imagens **f(x)** cada vez mais próximas de **4**.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x^2) = 4$$

Quando os limites laterais (pela direita e pela esquerda) são iguais, diz-se que o limite da função no ponto é dado por esse valor comum e indica-se por:

$$\lim_{x\to 2}(x^2) = 4$$

No exemplo (02), está apresenta uma situação onde não existe o limite da função num ponto.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & se \quad x \le 3 \\ 2x+2 & se \quad x > 3 \end{cases}$$

Fazendo **x** aproximar-se de **3** pela direita e pela esquerda, observa-se que os limites laterais apresentam valores diferentes. Isto permite concluir sobre a inexistência do limite da função no ponto **x** considerado. Vejamos:

Se x assumir pela esquerda os valores da sucessão (2; 2,5; 2,9; 2,99; ...), teremos:

f(2) = 2 + 2 = 4 f(2,5) = 2,5 + 2 = 4,5 f(2,9) = 2,9 +2 = 4 f(2,99) = 2,99 +2 = 4,99

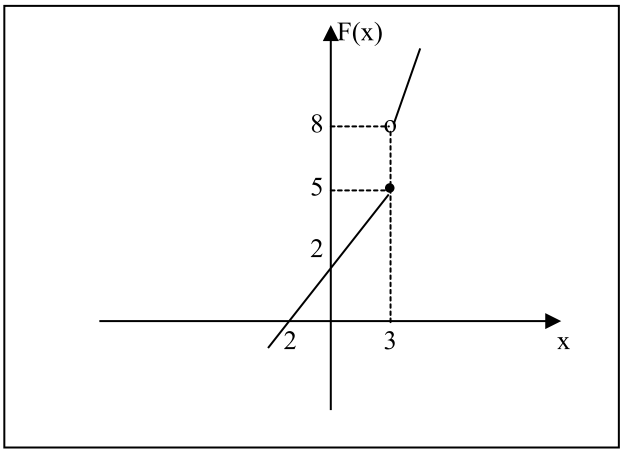
Repetindo o procedimento para a sucessão de valores à direita de **3** dada por (4; 3,5; 3,01; 3,001; ...), teremos:

f(4) = 2.4 + 2 = 10 f(3,5) = 2.(3,5) + 2 = 9 f(3,1) = 2.(3,1) +2 = 8,2

f (3,01) = 2.(3,01) + 2 = 8,02 f(3,001) = 2.(3,001) + 2 = 8,002 Assim

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 \ \text{é} \quad \textit{diferente} \quad \textit{de} \ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 8$$

O esboço gráfico ajuda a concluir sobre a inexistência do limite da função no ponto x = 3



Exemplo (03). Nada a função $f(x) = \dfrac{5}{|x-3|}$ cujo domínio é R – {3}, faça x percorrer pela direita o conjunto (3,1; 3,01; 3,001; 3,0001; ...) e pela esquerda o conjunto (2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; ...) e represente a conclusão por meio da forma própria dos limites.

Solução: $f(3{,}1) = \dfrac{5}{0{,}1} = 50$ $\qquad f(2{,}9) = \dfrac{5}{0{,}1} = 50$

$$f(3{,}01) = \frac{5}{0{,}01} = 500 \qquad f(2{,}99) = \frac{5}{0{,}01} = 500$$

$$f(3{,}001) = \frac{5}{0{,}001} = 5000 \qquad f(2{,}999) = \frac{5}{0{,}001} = 5000$$

$$f(3{,}0001)=\frac{5}{0{,}0001}=50000 \qquad f(2{,}9999)=\frac{5}{0{,}0001}=50000$$

Das duas sucessões obtidas, vê-se que x converge para 3, pela direita ou pela esquerda, f(x) tende para mais infinito (+ ∞). Tal fato pode ser representado por:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{5}{|x-3|} = +\infty$$

Limites Laterais

Se *x* se aproxima de ***a*** através de valores maiores que ***a*** ou pela sua direita, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a+} f(x) = b}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à direita*** de ***a***.

Se *x* se aproxima de a através de valores menores que ***a*** ou pela sua esquerda, escrevemos:

$$\boxed{\lim_{x\to a-} f(x) = c}$$

Esse limite é chamado de ***limite lateral à esquerda*** de ***a***.

O limite de f(*x*) para *x*→a existe se, e somente se, os limites laterais à direita a esquerda são iguais, ou sejas:

- Se $\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = b$, então $\lim_{x\to a} f(x) = b$.
- Se $\lim_{x\to a+} f(x) \neq \lim_{x\to a-} f(x) = b$, então $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$.

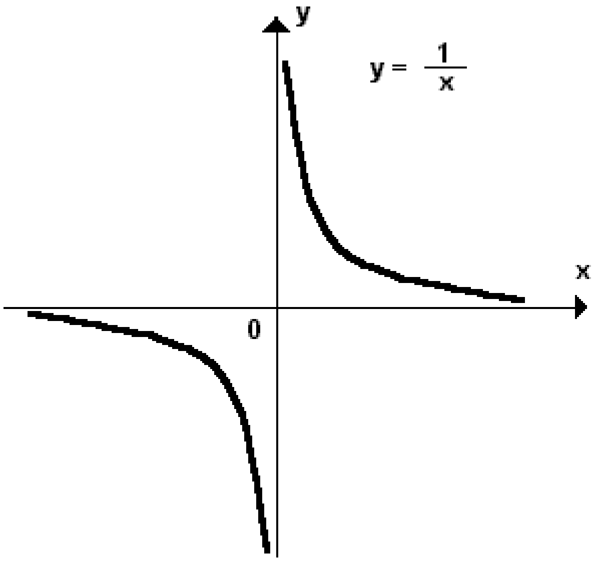
LIMITES NOS EXTREMOS DO DOMÍNIO- Limites envolvendo infinito

São os limites em que a variável independente x tende a assumir, em módulo, valores muito grandes positivos (+ ∞) ou negativos (– ∞). Simbolicamente, teríamos:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) \quad ou \quad \lim_{x\to +\infty} f(x)$$

Conforme sabemos, a expressão *x* → ∞ (*x* tende para infinito) significa que *x* assume valores superiores a qualquer número real e *x*→ − ∞ (*x* tende para menos infinitos), da mesma forma, indica que*x* assume valores menores que qualquer número real.

Exemplo:



a) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* aumenta, *y* tende para zero e o limite é zero.

b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, ou seja, à medida que *x* diminui, *y* tende para zero e o limite é zero.

c) $\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty$, ou seja, quando *x* se aproxima de zero pela direita de zero $(x \to 0_+)$ ou por valores maiores que zero, *y* tende para o infinito e o limite é infinito.

d) $\lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$, ou seja, quando *x* tende para zero pela esquerda ou por valores menores que zero, *y* tende para menos infinito

OBSERVAÇÕES IMPORTANTES:

* Quando x $\to +\infty$ ou x $\to -\infty$, o limite de um polinômio é igual ao limite do seu termo de maior grau.

* Quando x $\to +\infty$ ou x $\to -\infty$, o limite da função racional é igual ao limite do quociente do termo de maior grau do numerador pelo termo de maior grau do denominador.

Exemplos:

1) $\lim_{x \to \infty} (2x^2 + x - 3) = \lim_{x \to \infty} 2x^2 = \infty$

2) $\lim_{x \to -\infty} (3x^3 - 4x^2 + 2x + 1) = \lim_{x \to -\infty} 3x^3 = -\infty$

3) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + x - 1}{x^3 + x^2 + 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4}{x^3} = \lim_{x \to \infty} 2x = \infty$

OPERAÇÕES COM LIMITES

Supondo que $\lim_{x\to a} f(x) = f$ e $\lim_{x\to a} g(x) = g$, onde (f e g são finitos), verificam-se para os limites as seguintes propriedades:

a) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f + g$

b) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = f - g$

c) $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x) = f \times g$

d) $\lim_{x\to a}[f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} g(x) = f \div g \;\; com \;\; g \neq 0$

e) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n = f^n$

Propriedades dos Limites

1ª) $\lim_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

O limite da soma é a soma dos limites.
O limite da diferença é a diferença dos limites.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1}\left[x^2 \pm 3x^3\right] = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 3x^3 = 1 + 3 = 4$$

2ª) $\lim_{x\to a}\left[f(x).\ g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} g(x)$

O limite do produto é o produto dos limites.

Exemplo:

3ª) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$

O limite do quociente é o quociente dos limites desde que o denominador não seja zero.

Exemplo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} x^2 + 1} = \frac{\cos 0}{0^2+1} = \frac{1}{1} = 1$$

4ª) $\lim_{x\to a} f(x)^n = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n, n \in \mathbb{N}^*$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 1} (x^2+3)^2 = \left(\lim_{x\to 1} (x^2+3)\right)^2 = (1+3)^2 = 16$$

5ª) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}, n \in \mathbb{N}^* \text{ e } f(x) > 0. \text{ (Se } f(x) \leq 0, n \text{ é impar.)}$

Exemplo:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{\lim_{x\to 2} x^3 + x^2 - 1} = \sqrt{2^3 + 2^2 - 1} = \sqrt{11}$$

6ª) $\lim_{x \to a} (\ln f(x)) = \ln[\lim_{x \to a} f(x)]$, se $\lim_{x \to a} f(x) > 0$

Exemplo:

$$\lim_{x \to e} (\ln x^2) = \ln[\lim_{x \to e} x^2] = \ln e^2 = 2.\ln e = 2.1 = 2$$

7ª) $\lim_{x \to a} \text{sen}(f(x)) = \text{sen}(\lim_{x \to a} f(x))$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \text{sen}(x^2 + 3x) = \text{sen}[\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x)] = \text{sen}\ 4$$

8ª) $\lim_{x \to a} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \to a} f(x)}$

Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} e^{x^2+3x} = e^{\lim_{x \to 1} x^2+3x} = e^4$$

Mais Exemplos

Vamos determinar o limite da função f(x) = x^2 – 5x + 3, quando x tende a 4.

Nesse caso devemos aplicar a seguinte regra: o limite das somas é a soma dos limites. Portanto, devemos determinar o limite de cada monômio e depois realizar a soma entre eles.

$$\lim_{x \to 4} x^2 = 4^2 = 16$$
$$\lim_{x \to 4} -5x = -5 * 4 = -20$$
$$\lim_{x \to 4} 3 = 3$$
$$16 - 20 + 3 = -1$$
$$\lim_{x \to 4} x^2 - 5x + 3 = -1$$

Exemplo

Calcular o limite da função $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$, quando x tende a –2.

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x-3}{x-2}$$
$$\lim_{x \to -2} 2x - 3 = 2 * (-2) - 3 = -4 - 3 = -7$$
$$\lim_{x \to -2} x - 2 = -2 - 2 = -4$$
$$\lim_{x \to -2} \frac{2x-3}{x-2} = \frac{-7}{-4} = \frac{7}{4}$$

Exemplo

Determine o limite da função $f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2+3} - 10x$, à medida que x se aproxima de 1.

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x-1}{x^2+3} - 10x$$

$$\lim_{x \to 1} 5x - 1 = 5*1 - 1 = 4$$

$$\lim_{x \to 1} x^2 + 3 = 1^2 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \to 1} -10x = -10*(1) = -10$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{5x-1}{x^2+3} - 10x = \frac{4}{4} - 10 = 1 - 10 = -9$$

Observação importante: **Continuidade de uma Função**

Uma função f(x) definida em um intervalo **I**, com a $\in$ **I**, é contínua em x = a, se:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemplo(01): Verificar se a função $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ é contínua em x = 3.

Resolução: Cálculo de $f(3)$: $f(3) = \dfrac{3^2-4}{3-4} = 5$

Cálculo do $\lim_{x \to 3} f(x)$:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 3} (x-2) = 5$$

Como $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$, $f(x)$ é contínua no ponto x = 3.

Exemplo (02): Verificar se a função $f(x) = \dfrac{x+7}{x-1}$ é contínua no ponto x = 1

Resolução: Como não existe divisão por zero, a função é descontínua em x = 1

Exemplo (03): Verificar se a função $f(x) = \begin{cases} x+2 & se \quad x \le 3 \\ 2x+2 & se \quad x > 3 \end{cases}$ é contínua em x =3.

Resolução: Cálculo de $f(3)$: Para x = 3, tem-se $f(3) = 3 + 2 = 5$. Contudo, como

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 \ \ é \ \ diferente \ \ de \ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 8$$

Conclui-se que não existe o limite em x = 3, logo, a função é descontínua, como pode ser notada no gráfico apresentado na página 02.

FORMAS INDETERMINADAS

As **sete** formas clássicas de indeterminação são:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty,\quad 0\times\infty,\quad 0^0,\quad 1^\infty \quad e \quad \infty^0$$

Aparecendo uma destas formas no cálculo do limite, deve-se adotar técnicas com o intento de encontrar uma expressão correlata à forma inicial, a fim de, substitui-la e evitar tal situação. Exemplos:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x) = (\sqrt{\infty^2+2\infty+3}-\infty) = (\sqrt{\infty+\infty+3}-\infty) = (\sqrt{\infty}-\infty) = (\infty-\infty)$

Como o resultado obtido é uma indeterminação, deve-se substitui-lo por uma expressão correlata. A técnica adotada, consiste em multiplicar e dividir a expressão inicia pelo conjugado.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}-x)(\sqrt{x^2+2x+3}+x)}{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+2x+3-x^2)}{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\infty+3}{(\sqrt{\infty^2+2\infty+3}+\infty)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Observe que após a aplicação do primeiro procedimento, o surge outra forma de indeterminação. Este fato que nos obriga a adotar outros recursos, ou seja: divide-se numerador e denominador pela maior potência de x

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{(\sqrt{x^2+2x+3}+x)}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}+\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{0}}{\sqrt{1+\frac{2}{0}+\frac{3}{0^2}}+1}$$

$$= \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{2}{1+1} = 1$$

Conclusão: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x) = 1$

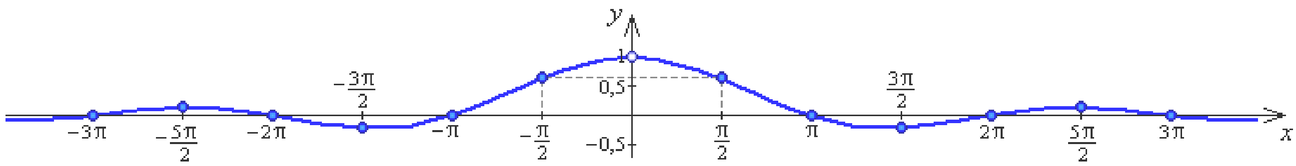
b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

A indeterminação apresentada mostra que a função não é definida para x = 3, pois o numerador e o denominador da fração tendem a zero quando x aproxima-se de 3. Contudo o problema pode ser resolvido com a aplicação da primeira parte da técnica mostrada no exemplo anterior.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = \lim_{x\to3}(x+3) = (3+3) = 6$$

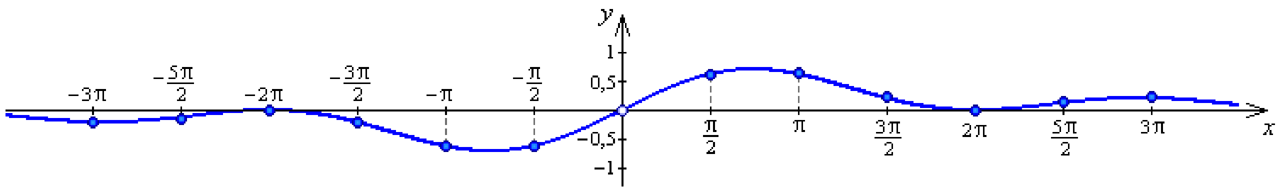
Explorando o limite da função trigonométrica

Vamos observar o gráfico da função $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$.



Note que esta função não está definida no zero e observe que seu gráfico sugere que $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$.

Vamos observar o gráfico da função $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$.



Note que esta função não está definida no zero e observe que seu gráfico sugere que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$.

Obs: É importante frisar que a maioria dos exercícios de limites trigonométricos são resolvidos com a primeira propriedade, ainda não podemos esquecer da relação fundamental da trigonometria na resolução dos exercícios: ***sen² Θ + cos² Θ = 1*** . Se sugere trabalhar a equação dada até que possamos usar a primeira propriedade.

Usar o limite fundamental e alguns artifícios :

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{\text{sen }5x}{5x} = \lim_{y\to 0}\frac{5}{2}\cdot\frac{\text{sen }y}{y} = \frac{5}{2} \qquad \text{logo} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }mx}{nx} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{n}\cdot\frac{\text{sen }mx}{mx} = \frac{m}{n}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen }y}{y} = \frac{m}{n}.1 = \frac{m}{n} \quad \text{logo} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{\text{sen }2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\text{sen }3x}{x}}{\frac{\text{sen }2x}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{3\,\frac{\text{sen }3x}{3x}}{2\,\frac{\text{sen }2x}{2x}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen }2x}{2x}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\lim_{y\to 0}\frac{\text{sen }y}{y}}{\lim_{t\to 0}\frac{\text{sen }t}{t}} = \frac{3}{2}.1 =$$

logo

Explorando o LIMITE EXPONENCIAL FUNDAMENTAL

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Onde **e** é um número irracional, chamado número de Euler em homenagem ao matemático suíço, Leonhard Euler 1707-1783), famoso por sua extensa e original produção no campo da matemática.

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Neste caso, **e** representa a base dos logaritmos naturais ou neperianos. Trata-se do número irracional **e** cujo valor aproximado é 2,7182818.

Veja a tabela com valores de *x* e de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

x	1	2	3	10	100	1 000	10 000	100 000
$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$	2	2,25	2,3703	2,5937	2,7048	2,7169	2,7181	2,7182

Notamos que à medida que $x \to \infty$, $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$.

De forma análoga, efetuando a substituição $\frac{1}{x} = y$ e $x = \frac{1}{y}$, temos:

$$\boxed{\lim_{y \to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}} = e}$$

Ainda de forma mais geral, temos :

$$\boxed{\lim_{y \to 0} (1+ky)^{\frac{l}{y}} = e^{kl}} \qquad \boxed{\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{k}{x}\right)^{lx} = e^{kl}}$$

As duas formas acima dão a solução imediata a exercícios deste tipo e evitam substituições algébricas.