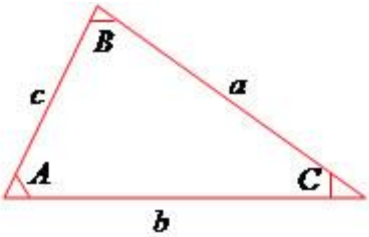
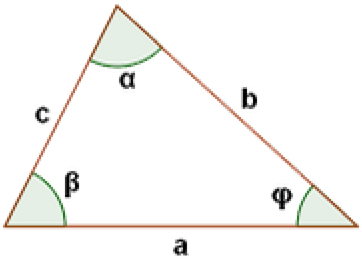
Trigonometria- Parte 2

1) <u>LEI DOS COSSENOS</u> E <u>LEI DOS SENOS em Triângulo qualquer</u>



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$$



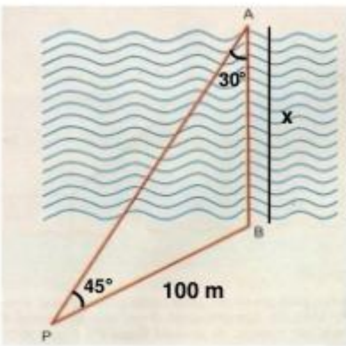
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos \varphi$$

<u>**Exemplo 1:**</u>

1. A figura mostra o trecho de um rio onde se deseja construir uma ponte AB. De um ponto P, a 100m de B, mediu-se o ângulo APB = 45º e do ponto A, mediu-se o ângulo PAB = 30º. Calcular o comprimento da ponte.



Inicialmente, vamos colocar os dados no triângulo e identificar o que se pretende calcular.

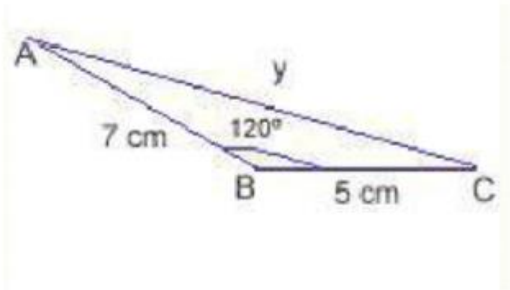
Aplicando a Lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{sen45^0} = \frac{100}{sen30^0} \Rightarrow x \cdot sen30^0 = 100 \cdot sen45^0$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{x = 100\sqrt{2}}$$

O comprimento da ponte é $100\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 141 m.

Exemplo 2. Determine o valor de y no triângulo obtusângulo abaixo.

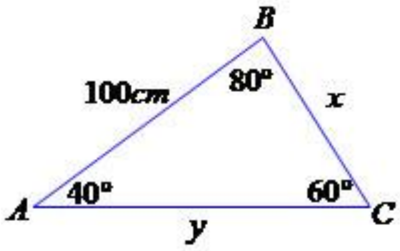


Solução: Lembrando que a lei dos cossenos também é válida para o triângulo obtusângulo, temos que:

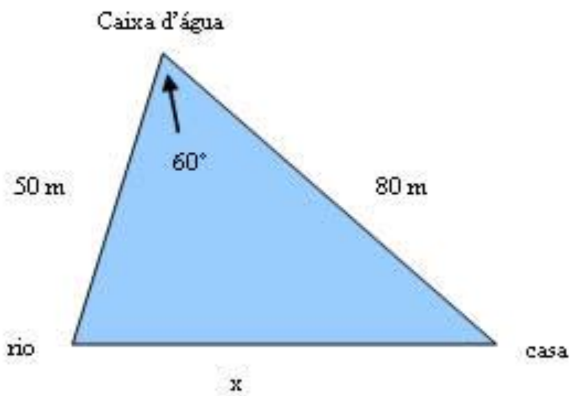
$$y^2 = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ$$
$$y^2 = 49 + 25 - 70 \cdot (-\cos 60^\circ)$$
$$y^2 = 49 + 25 + 70 \cdot \frac{1}{2}$$
$$y^2 = 74 + 35$$
$$y^2 = 109$$
$$y = \sqrt{109}$$

Exercicios:

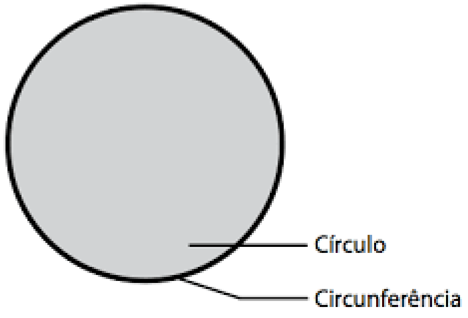
1) No triângulo a seguir, determine o valor dos segmentos x e y. x=_______ e y=________

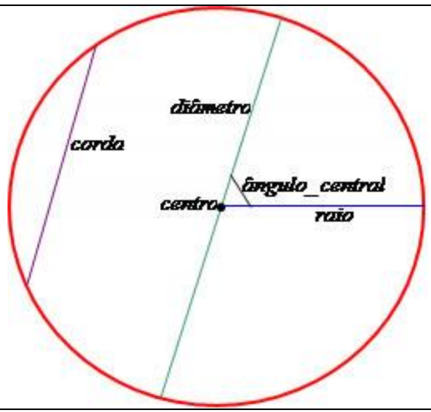


2) Se optarmos pelo bombeamento da água direto para a casa, quantos metros de cano seriam gastos?R:________



Lembrando:





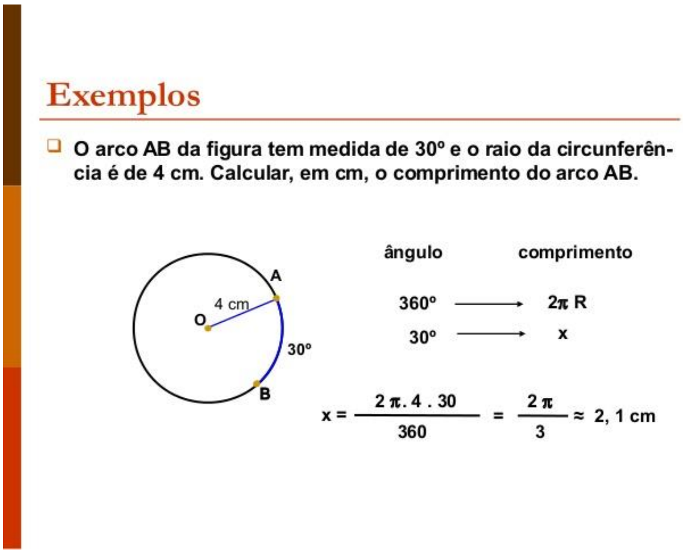
2) <u>FÓRMULAS ÚTEIS</u> **Relação fundamental** $\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$

Comprimento de uma circunferência C= $2\pi r$

Veja no exemplo a seguir:

Jm ciclista de uma prova de resistência deve percorrer 500 km sobre uma pista circular de raio 200m. Qual o número aproximado de voltas que ele deve percorrer?

Comprimento de um arco: Podemos fazer por uma proporção e usar a regra de três veja no exemplo a seguir



<u>Outras relações que podemos utilizar:</u>

Fórmulas de adição de arcos

$$sen(\alpha+\beta)=sen\alpha.\cos\beta+sen\beta.\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha.\cos\beta-sen\alpha.sen\beta$$

$$tg(\alpha+\beta\}=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta}$$

Fórmulas do arco-dobro

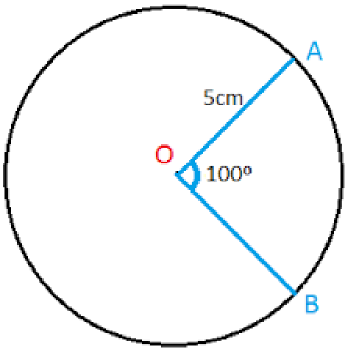
$$sen(2\alpha)=2.sen\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$$

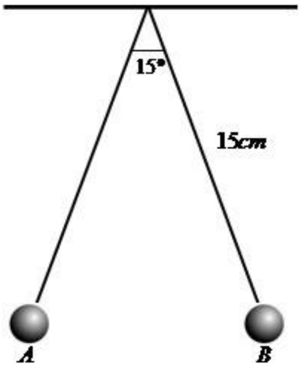
$$tg(2\alpha)=\frac{2.tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Exercícios

3) Calcule o comprimento do arco AB:



4) O pêndulo oscila entre A e B , calcule o comprimento do arco descrito por ele no deslocamento de A para B:



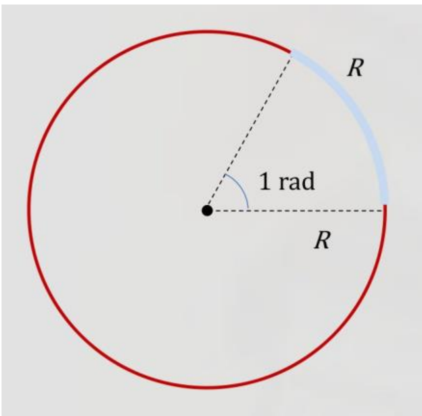
5) Uma praça circular tem raio de 40 m. Quantas metros anda uma pessoa quando dá 3 voltas na praça?

6) O raio da roda de uma bicicleta mede 25cm. Qual o comprimento da circunferência da roda?

Radiano: **RADIANO**
Um **radiano** (rad) é a amplitude de um ângulo que define em qualquer circunferência, com centro no seu vértice, um arco de circunferência igual ao raio.

CONVERSÃO ENTRE GRAUS E RADIANOS

$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ ou $\boldsymbol{\pi}$ ***rad*** **= 180°**



Exemplos :

a) 15° $\begin{matrix} 180^\circ - \pi \text{ rad} \\ 15^\circ - x \end{matrix} \rightarrow 180^\circ x = 15^\circ \pi \text{ rad} \rightarrow x = \dfrac{15^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ} \rightarrow \text{simplificando por } 15^\circ \rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} \text{rad}$

b) 20° $\begin{matrix} 180^\circ - \pi \text{ rad} \\ 20^\circ - x \end{matrix} \rightarrow 180^\circ x = 20^\circ \pi \text{ rad} \rightarrow x = \dfrac{20^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ} \rightarrow \text{simplificando por } 20^\circ \rightarrow x = \dfrac{\pi}{9} \text{rad}$

c) 10° $\begin{matrix} 180^\circ - \pi \text{ rad} \\ 10^\circ - x \end{matrix} \rightarrow 180^\circ x = 10^\circ \pi \text{ rad} \rightarrow x = \dfrac{10^\circ \pi \text{ rad}}{180^\circ} \rightarrow \text{simplificando por } 10^\circ \rightarrow x = \dfrac{\pi}{18} \text{rad}$

Exercícios:

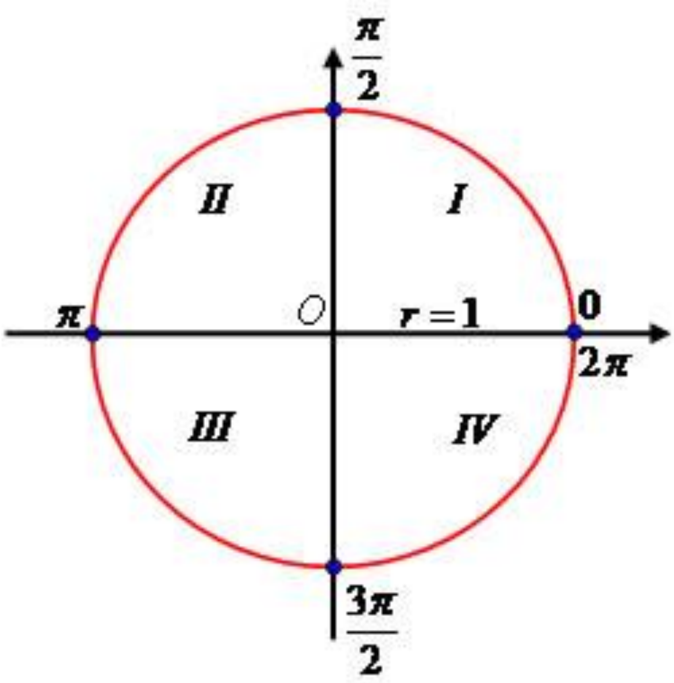
7-Converter 50º em radianos.
8-Converter 3π/4 rad em graus.
9 - Transforme as medidas em radianos:

a) 240º

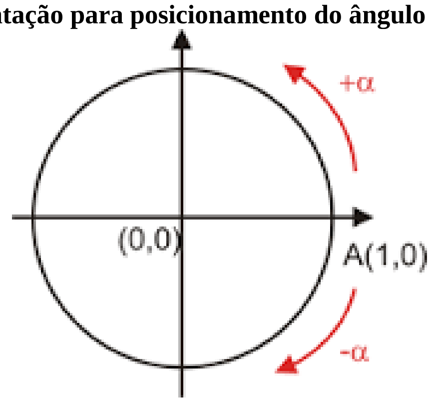
b) 315º

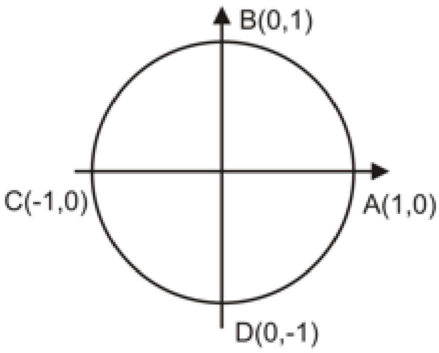
c) 45º

Ciclo Trigonométrico

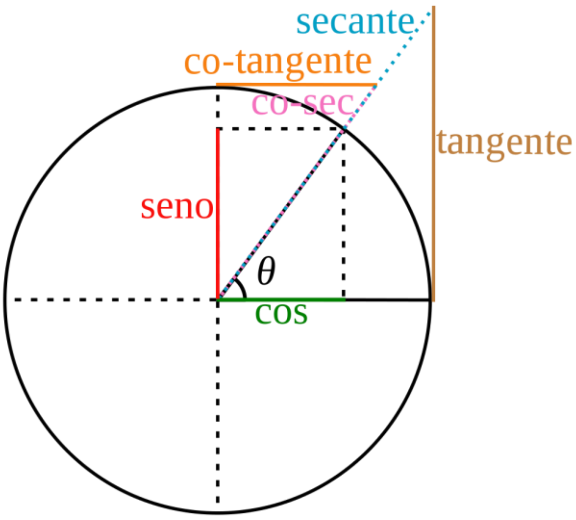


Orientação para posicionamento do ângulo central

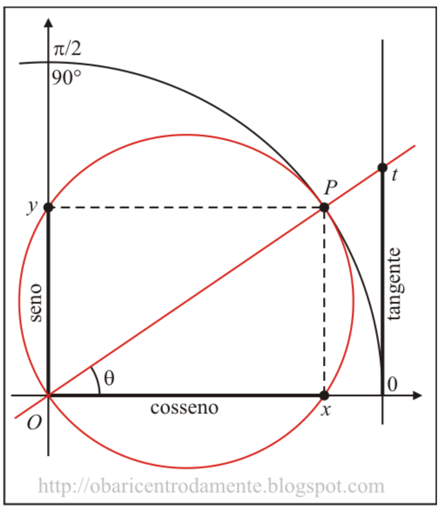




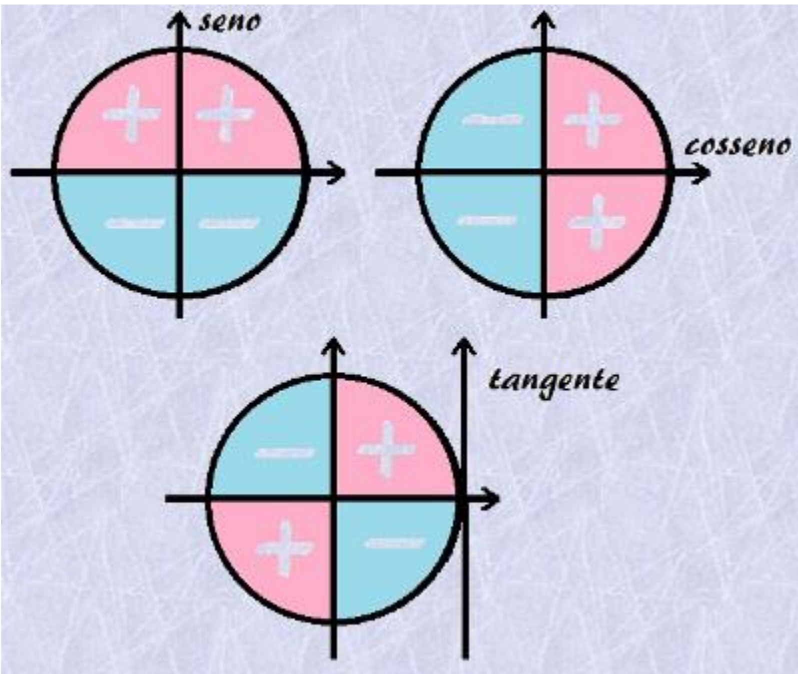
Relações Trigonométricas no Ciclo



$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{cossec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$



Temos assim que, os sinais das relações trigonométricas nos quadrantes são:



Arcos Congruos

Quando acontecem de termos dois arcos diferentes que terminam na mesma posição da circunferência, dizemos que esses arcos são arcos côngruos. Então o angulo de 45º e o de 405º são congruos pois tem a mesma extremidade.

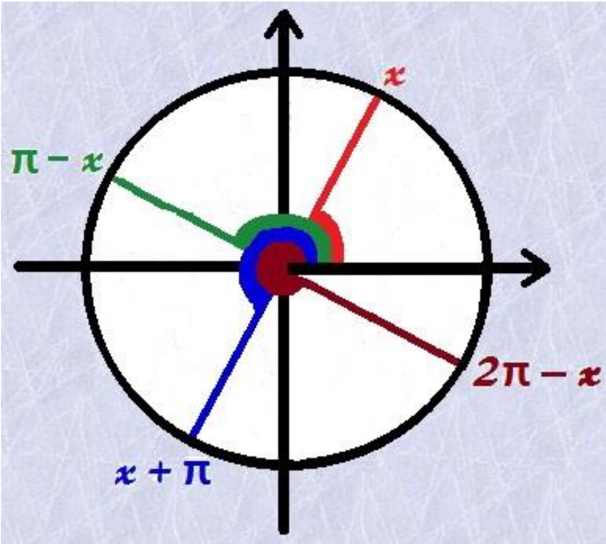
Exemplo:

Como o arco de 750º tem a mesma extremidade do arco de 30º, dizemos que esses arcos são CÔNGRUOS.

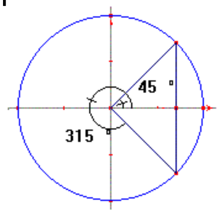
Def: **Dois arcos trigonométricos são côngruos se, e somente se, as extremidades coincidem.**

$$30^\circ = \boxed{30^\circ} + \boxed{0} \cdot 360^\circ$$
$$750^\circ = \boxed{30^\circ} + \boxed{2} \cdot 360^\circ$$
$$390^\circ = \boxed{30^\circ} + \boxed{1} \cdot 360^\circ$$

Redução ao 1º quadrante:



Exemplos:



$$\operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = -\tan 45^\circ = -1$$

Apresentamos abaixo a figura da circunferência trigonométrica em que são evidenciados os ângulos mais notáveis expressos em radianos e em graus.

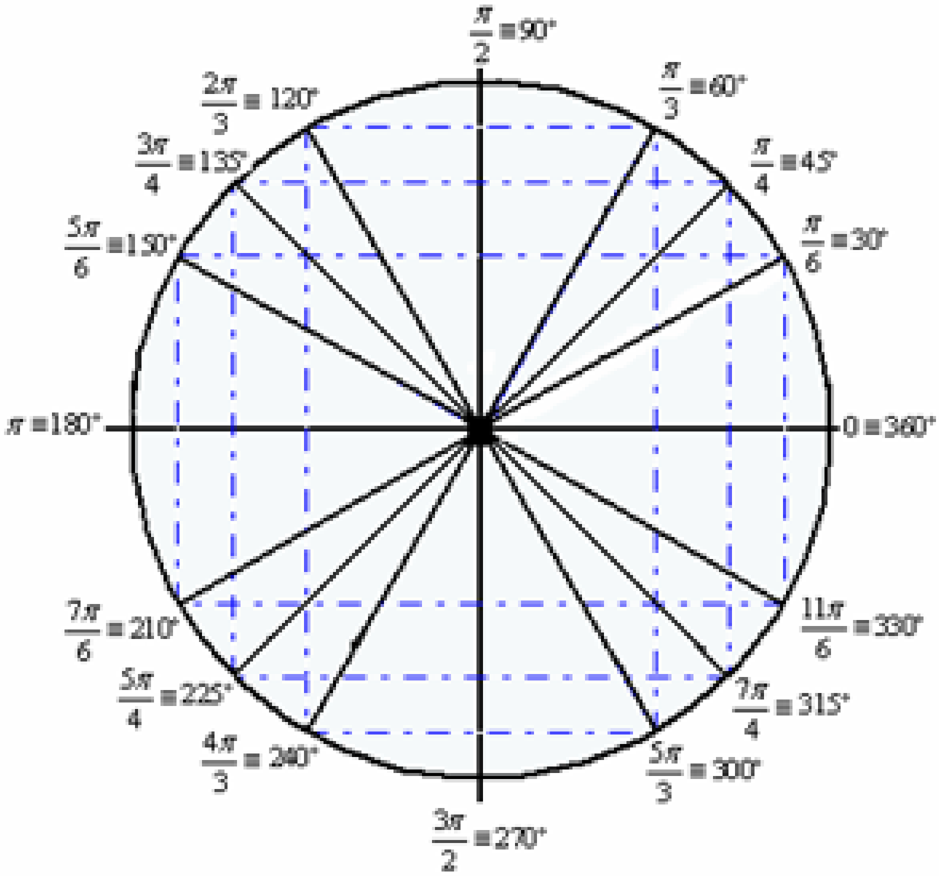


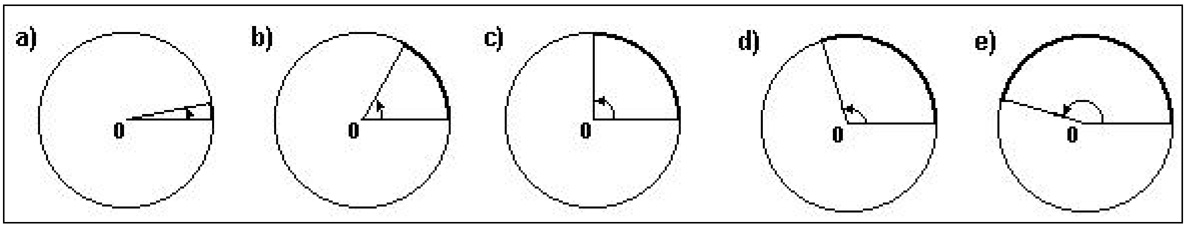
Tabela de Entes Trigonométricos

...

arco	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	2π
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	- 1	0
cosseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	- 1	0	1
tangente $\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	- - -	0	- - -	0

Exercícios:

1) Dentre os desenhos abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é:



2)Calcule as transformações de medidas de ângulos pedidas:

a) 120° em radianos; **c)** 234° em radianos;

b) $\frac{2\pi}{7}$ em graus; **d)** $\frac{3\pi}{5}$ em graus.

3) Reduzindo-se ao primeiro quadrante um arco de medida 7344°, obtém-se um arco, cuja medida, em radianos, é:

a) $\frac{\pi}{3}$	**b)** $\frac{\pi}{2}$	**c)** $\frac{2\pi}{3}$	**d)** $\frac{4\pi}{5}$	**e)** $\frac{9\pi}{10}$

4) De o seno ,o cosseno e a tangente , a sec, cossec e cotangente, se existir, para cada caso:

a)150º b) 300º c) 225º d) 720º

Respostas: 1) b

2) **a)**

$$x = \frac{2\,\pi}{3} \text{ rad}$$

b) x = 51,43°

c)

$$x = \frac{13\,\pi}{10} \text{ rad}$$

d) x = 108°

3)d

4) a) sen = 1/2 cos=-V3/2 tg =-V3/3

b) sen = -V3/2 cos= 1/2 tg =-V3

c) sen = -V2/2 cos= -V2/2 tg =1

d) sen = 0 cos +1 tg = 0