

**INSTITUTO FEDERAL  
SANTA CATARINA  
Campus Araranguá**

# **Caderno de estudos: Resistência dos Materiais**

**Este é um material de apoio para os alunos do técnico em Eletromecânica.**

**Bons estudos.**



**Prof. Lucas Boeira Michels  
2010\_1**

**Aprender é um dom natural do ser humano, e ninguém tem o direito de destruí-lo.**

# Resolvendo Problemas Utilizando Decomposição de Forças e Momento de Força

Para resolvemos esses problemas utilizaremos das leis da Estática que nos fala sobre equilíbrio de um corpo.

Segundo a primeira lei de Newton um corpo está em equilíbrio quando:

- 1)a resultante das forças que atuam sobre ele é nula
- 2)o momento resultante dos momentos que atuam sobre ele em relação a qualquer ponto, é nulo.

A Estática, que é a parte da Mecânica que aqui estudaremos, estuda os corpos em equilíbrio.

## Equilíbrio de Um Ponto Material

Inicialmente calcularemos o equilíbrio de um ponto material. Como um ponto não tem dimensão, nele não atuam momentos porque , como vimos anteriormente, para que uma força produza momento temos que ter uma distância entre o ponto de referência e o ponto da atuação da força.

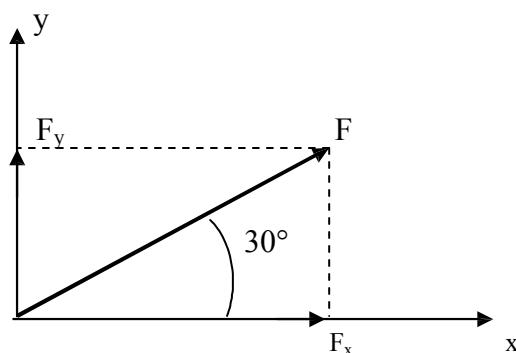
Então, utilizemos os dois princípios de equilíbrio.

1º princípio ( utilizaremos a decomposição de forças nos eixos x e y ). Portanto:

$$\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0 \\ \Sigma F_y &= 0\end{aligned}$$

## Exercícios Resolvidos

- 1) Decompor a força  $F = 2000 \text{ N}$ , em duas componentes, nos eixo x e y, conforme o esquema abaixo:

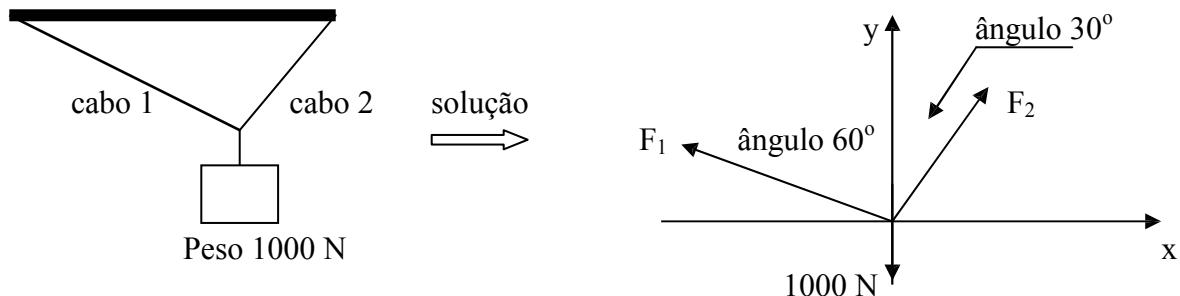


**Respostas**     $F_x = 100 \text{ N}$   
                     $F_y = 174 \text{ N}$

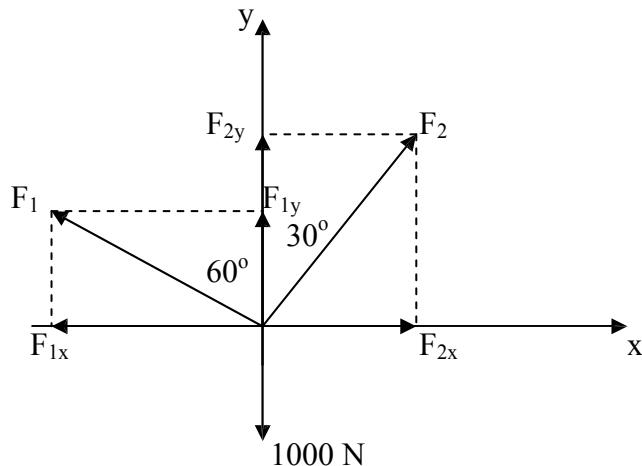
$$\begin{aligned}\text{seno } 30^\circ &= 0,50 \\ \text{co-seno } 30^\circ &= 0,87 \\ \text{seno } 60^\circ &= 0,87 \\ \text{co-seno } 60^\circ &= 0,50\end{aligned}$$

2) Calcular as forças atuantes nos cabos 1 e 2 do esquema abaixo sabendo que o peso de 1000 N está em equilíbrio.

Colocamos o esquema nos eixos x e y



Fazemos a decomposição das forças nos eixos x e y



Com esse procedimento geramos as componentes  $F_{1x}$  e  $F_{1y}$  as componentes  $F_{2x}$  e  $F_{2y}$ . Para termos equilíbrio é necessário que:

$$\Sigma F_x = 0 \text{ temos que somar as forças do eixo } x \text{ e igualar a zero}$$

$$\Sigma F_x = -F_{1x} + F_{2x} = 0 \text{ mas } F_{1x} = F_1 \cdot \sin 60^\circ$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \sin 30^\circ \text{ temos}$$

$$-F_1 \cdot \sin 60^\circ + F_2 \cdot \sin 30^\circ = 0 \text{ donde}$$

$$-F_1 \cdot 0,87 + F_2 \cdot 0,5 = 0$$

$$-0,87F_1 = -0,5F_2$$

$$F_1 = 0,5F_2 / 0,87 \text{ ou } F_1 = 0,57F_2$$

$$\text{Agora fazemos } \Sigma F_y = 0$$

$$F_1 \cdot \cos 60^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ - 1000 = 0$$

$$F_1 \cdot 0,5 + F_2 \cdot 0,87 = 1000$$

$$0,5F_1 + 0,87F_2 = 1000$$

como  $F1 = 0,5 F2 / 0,87$  fazemos a substituição:

$$\begin{aligned}0,5 ( 0,57 F_2 ) + 0,87 F_2 &= 1000 \\0,285 F_2 + 0,87 F_2 &= 1000 \\1,155 F_2 &= 1000 \\F_2 &= 1000 / 1,155 \\F_2 &= 866 \text{ N}\end{aligned}$$

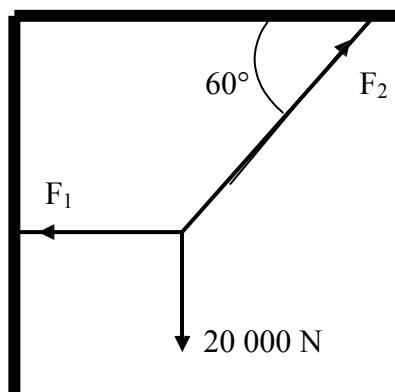
Daí resulta que  $F_1 = 0,57 F_2$   
 $F_1 = 494 \text{ N}$

$$\text{então } F_1 = 0,57 \times 866$$

Resultado: a força atuante no cabo 1 vale 494 N  
a força atuante no cabo 2 vale 866 N

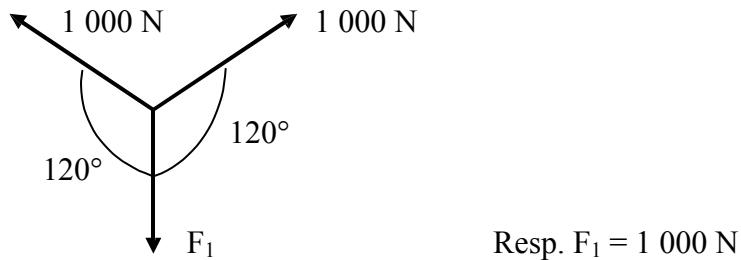
## Exercícios Propostos

1) Calcule as forças  $F_1$  e  $F_2$  no esquema abaixo.



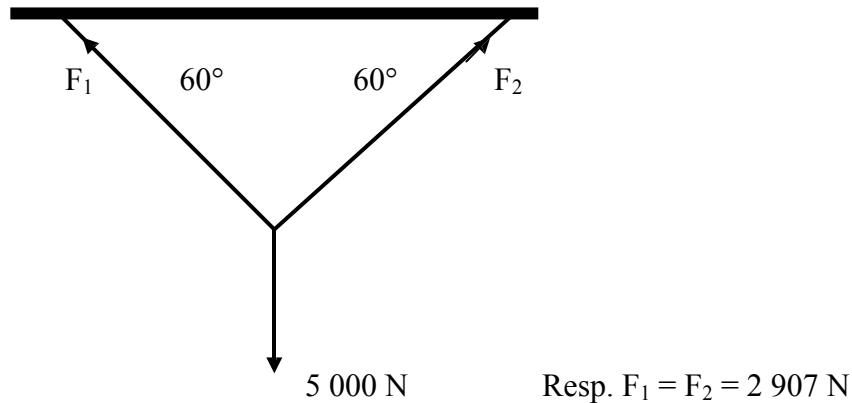
Resp F<sub>1</sub> = 11 628 N  
F<sub>2</sub> = 23 256 N

2) Calcule a Força  $F_1$ , no esquema abaixo.

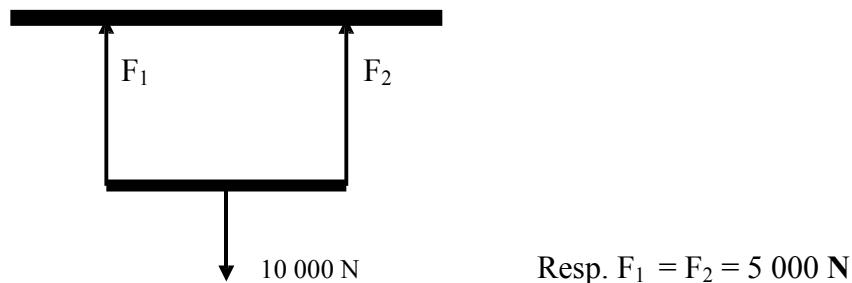


Calcule as forças  $F_1$  e  $F_2$  nos esquemas abaixo:

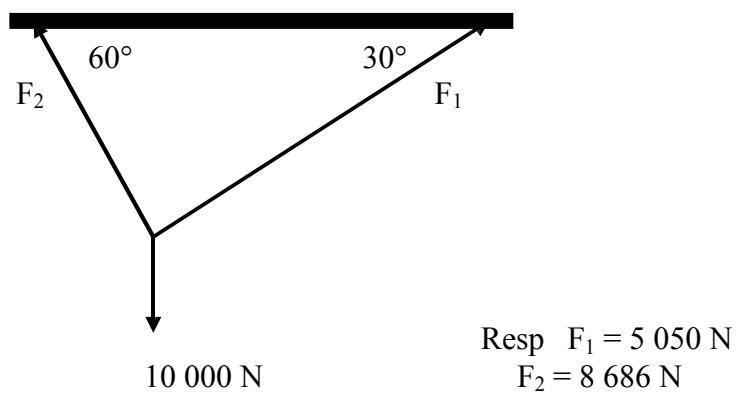
3)



4)



5)



## Equilíbrio de Um Corpo

Para calcularmos o equilíbrio de um corpo vamos utilizar as três equações anteriormente apresentadas

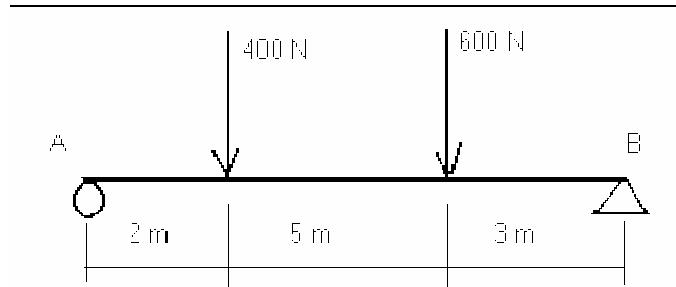
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_0 = 0$$

## Exercícios Resolvidos

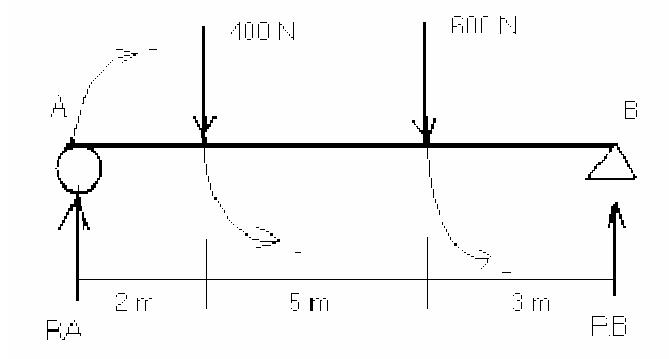
- 1) Calcular as reações nos apoios A e B no esquema abaixo sabendo que o corpo está em equilíbrio:



Para resolvermos esse exercício aplicaremos a segunda condição de equilíbrio:  
(Um corpo está em equilíbrio quando a soma dos momentos que atuam sobre ele, em relação a qualquer ponto, é nulo)

Verificamos os momentos que atuam, no corpo, em relação ao ponto B:

(Usaremos aqui a convenção: momento no sentido horário positivo e ante-horário negativo)



$$\Sigma M_B = 0$$

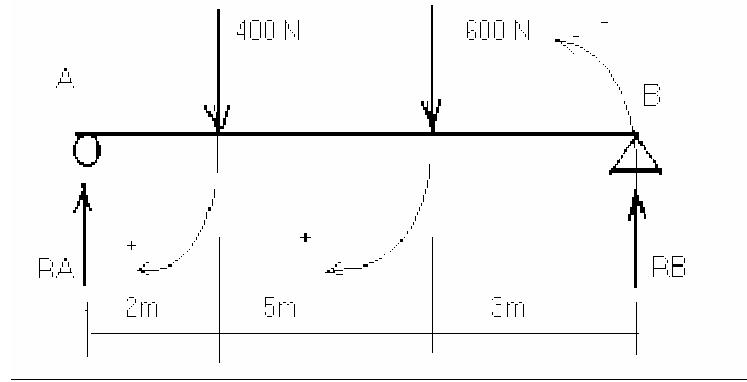
$$R_A \cdot 10 - 400 \cdot 8 - 600 \cdot 3 = 0$$

$$10 R_A - 3200 - 1800 = 0$$

$$10 R_A = 5000$$

$$R_A = 5000 / 10$$

$$R_A = 500 \text{ N}$$



$$\begin{aligned}
 \sum M_A &= 0 \\
 400 \cdot 2 + 600 \cdot 7 - R_B \cdot 10 &= 0 \\
 800 + 4200 &= 10 R_B \\
 10 R_B &= 5000 \\
 R_B &= 5000 / 10 \\
 R_B &= 500 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Podemos ainda, como forma de verificação, aplicar o  $\sum F_y = 0$  então

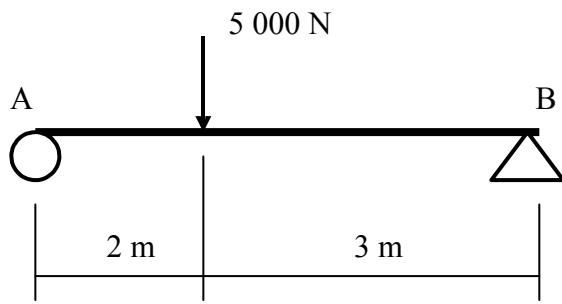
$$\begin{aligned}
 R_A + R_B - 400 - 600 &= 0 \\
 500 + 500 - 400 - 600 &= 0 \\
 1000 - 1000 &= 0
 \end{aligned}$$

Conclusão  $R_A = 500 \text{ N}$   
 $R_B = 500 \text{ N}$

## Exercícios Propostos

Calcule as reações  $R_B$  e  $R_B$  nos esquemas abaixo:

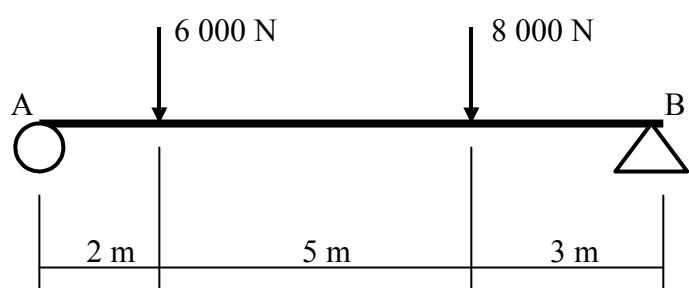
1)



Resp.

$$\begin{aligned}
 R_A &= 3\,000 \text{ N} \\
 R_B &= 2\,000 \text{ N}
 \end{aligned}$$

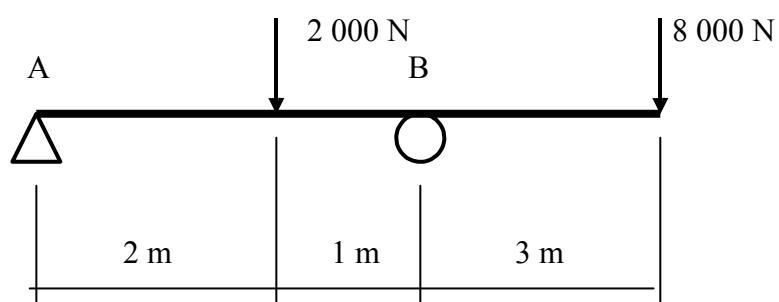
2)



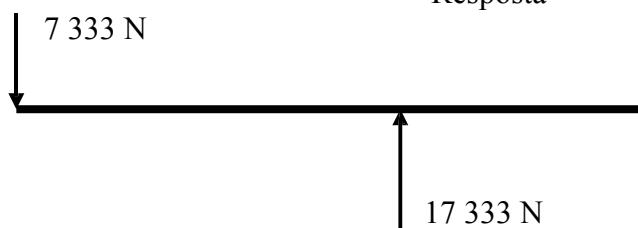
Resposta



3)



Resposta



## 1. Treliças

### Definição

Denomina-se treliça plana, o conjunto de elementos de construção (barras redondas, chatas, cantoneiras, I, U, etc.), interligados entre si, sob forma geométrica triangular, através de pinos, soldas, rebites, parafusos, que visam formar uma estrutura rígida, com a finalidade de resistir a esforços normais apenas.

A denominação treliça plana deve-se ao fato de todos os elementos do conjunto pertencerem a um único plano. A sua utilização na prática pode ser observada em pontes, viadutos, coberturas, guindastes, torres, etc.

Dois métodos de dimensionamento podem ser utilizados para as treliças:

- Método dos Nós ou Método de Cremona
- Método de Ritter ou Método das Seções (analíticos e usados com maior freqüência)

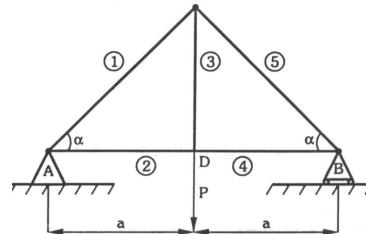
### Métodos dos Nós ou Método de Cremona

A resolução de treliças planas pelo método dos nós consiste em verificar o equilíbrio de cada nó da treliça, seguindo-se os passos descritos a seguir:

- (a) determinação das reações de apoio
- (b) identificação do tipo de solicitação em cada barra (barra tracionada ou barra comprimida)
- (c) verificação do equilíbrio de cada nó da treliça, iniciando-se sempre os cálculos pelo nó que tenha o menor número de incógnitas.

### Exemplo 1

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



---

### Solução

#### (a) Cálculo das reações de apoio

As reações de apoio em  $V_A$  e em  $V_B$  são iguais, pois a carga  $P$  está aplicada simetricamente aos apoios. Portanto,

$$V_A = V_B = \frac{P}{2}$$

#### (b) Identificação dos esforços nas barras

As barras 1 e 5 estão comprimidas, pois equilibram as reações de apoio. A barra 3 está tracionada, pois equilibra a ação da carga  $P$  no nó D. As barras 2 e 4 estão tracionadas, pois equilibram as componentes horizontais das barras 1 e 5.

#### (c) Cálculo dos esforços nas barras

Inicia-se o cálculo dos esforços pelo nó A, que juntamente com o nó B é o que possui o menor número de incógnitas.

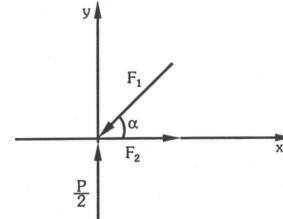
$$\sum F_y = 0$$

$$F_1 = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{P}{2} \cos \sec \alpha$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 = F_1 \cos \alpha$$

$$F_2 = \frac{P \cos \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{P}{2} \cot \alpha$$



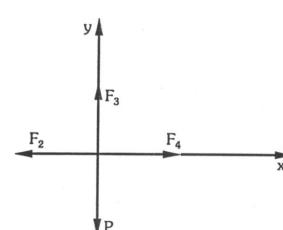
Determinada a força na barra 2, o nó que se torna mais simples para os cálculos é o nó D.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 = P$$

$$\sum F_x = 0$$

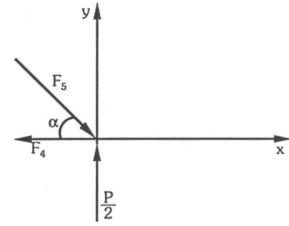
$$F_4 = F_2 = \frac{P}{2} \cot \alpha$$



Para determinar a força normal na barra 5, utiliza-se o nó B.

$$\sum F_y = 0$$

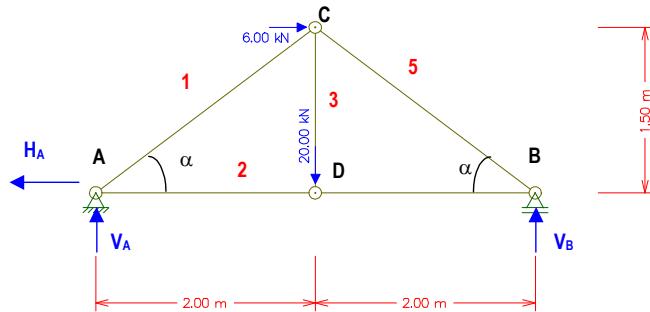
$$F_5 = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha} = \frac{P}{2} \operatorname{cosec} \alpha$$



As forças normais nas barras 4 e 5, podem ser determinadas através da simetria da estrutura e do carregamento aplicado.

### Exemplo 2

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



### Solução

O ângulo  $\alpha$  formado pelas barras 1 e 2 e pelas barras 4 e 5 deve ser determinado:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1.5}{2} = 0.75 \Rightarrow \alpha = 37^\circ \quad (\operatorname{sen} 37^\circ = 0.60 \text{ e } \cos 37^\circ = 0.80)$$

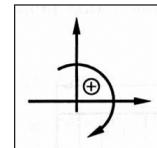
#### (a) Cálculo das reações de apoio

$$\sum M_A = \sum_{i=1}^n F_i d_i = 0$$

(a priori, adotar-se-á como positivo, o momento no sentido horário)

$$-V_B(4) + 20 \cdot 2 + 6 \cdot 1.5 = 0$$

$$V_B = 12.25 \text{ kN}$$



Agora, pode-se utilizar a equação do somatório das forças verticais para obter-se a reação vertical no apoio B.

$$V_A + V_B = 20 \Rightarrow V_A = 7,75 \text{ kN}$$

E finalmente, aplicando-se a equação do somatório das reações horizontais igual a zero, tem-se,

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ kN}$$

### (b) Cálculo dos esforços nas barras

Inicia-se o cálculo dos esforços pelo nó A, que juntamente com o nó B é o que possui o menor número de incógnitas.

$$\sum F_y = 0$$

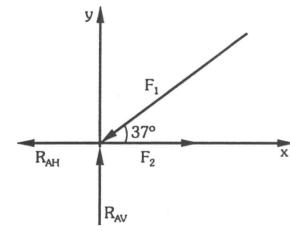
$$F_1 \operatorname{sen} 37^\circ = V_A$$

$$F_1 = \frac{7,75}{0,6} = 12,9 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 = H_A + F_1 \cos 37^\circ$$

$$F_2 = 6 + 12,9 \cdot 0,8 = 16,3 \text{ kN}$$



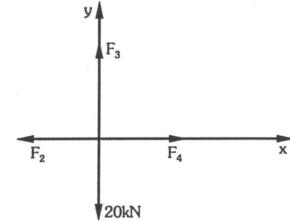
Determinada a força  $F_2$ , o nó que se torna mais simples para prosseguir os cálculos é o nó C.

$$\sum F_x = 0$$

$$F_4 = F_2 = 16,3 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$F_3 = 20 \text{ kN}$$

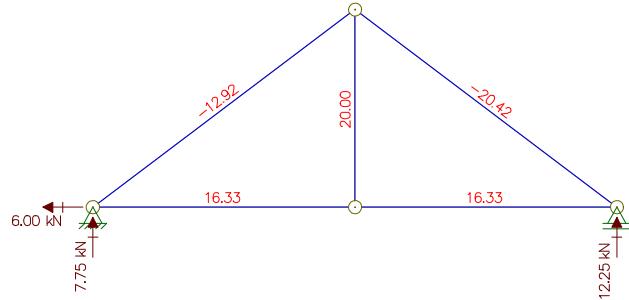
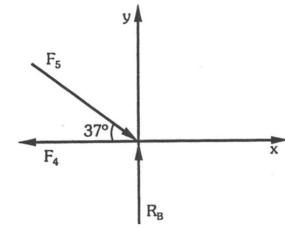


Para determinar a força normal na barra 5, utiliza-se o nó B.

$$\sum F_y = 0$$

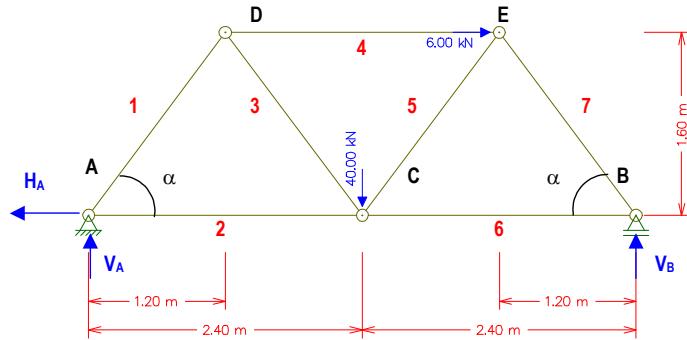
$$F_5 \operatorname{sen} 37^\circ = V_B$$

$$F_5 = 20,42 \text{ kN}$$



### Exemplo 3

Determinar as forças normais nas barras da treliça dada.



### Solução

O ângulo  $\alpha$  formado pelas barras 1 e 2 e pelas barras 4 e 5 deve ser determinado:

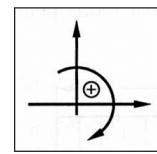
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,6}{1,2} \Rightarrow \alpha = 53^\circ \quad (\operatorname{sen} 53^\circ = 0,80 \text{ e } \cos 53^\circ = 0,60)$$

**(c) Cálculo das reações de apoio**

$$\sum M_A = \sum_{i=1}^n F_i d_i = 0$$

(a priori, adotar-se-á como positivo, o momento no sentido horário)

$$-V_B(4,8) + 40 \cdot 2,4 + 6 \cdot 1,6 = 0$$



$$V_B = 22 \text{ kN}$$

Agora, pode-se utilizar a equação do somatório das forças verticais para obter-se a reação vertical no apoio B.

$$V_A + V_B = 40 \Rightarrow V_A = 18 \text{ kN}$$

E finalmente, aplicando-se a equação do somatório das reações horizontais igual a zero, tem-se,

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_A - 6 = 0 \Rightarrow H_A = 6 \text{ kN}$$

**(d) Cálculo dos esforços nas barras**

Iniciando-se o cálculo dos esforços pelo nó A, determina-se a força normal nas barras 1 e 2.

$$\sum F_y = 0$$

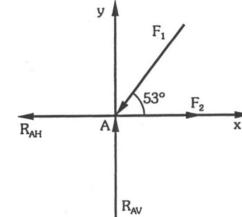
$$F_1 \sin 53^\circ = V_A$$

$$F_1 = \frac{18}{0,8} = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_2 = H_A + F_1 \cos 53^\circ$$

$$F_2 = 6 + 22,5 \cdot 0,6 = 19,5 \text{ kN}$$



Determinada a força na barra 1, pode-se utilizar o nó D para calcular F<sub>3</sub> e F<sub>4</sub>.

$$\sum F_y = 0$$

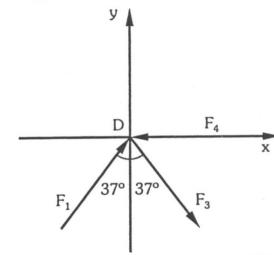
$$F_3 \cos 37^\circ = F_1 \cos 37^\circ$$

$$F_3 = F_1 = 22,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$

$$F_4 = (F_1 + F_3) \sin 37^\circ$$

$$F_4 = (2 \cdot 22,5) \cdot 0,6 = 27 \text{ kN}$$



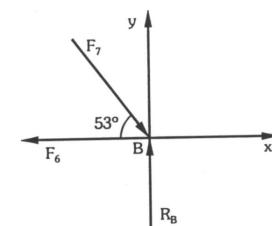
O nó B é conveniente para os cálculos das forças nas barras 6 e 7.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_7 \sin 53^\circ = V_B$$

$$F_7 = \frac{22}{0,8} = 27,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0$$



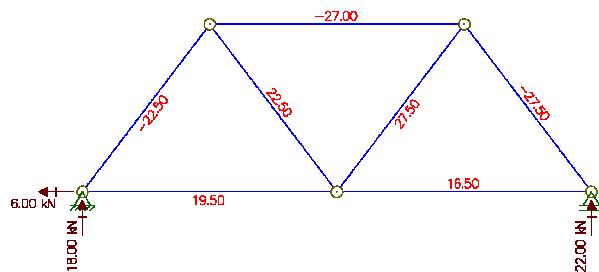
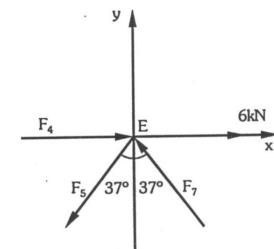
$$F_6 = F_7 \cos 53^\circ = 27,5 \cdot 0,6 = 16,5 \text{ kN}$$

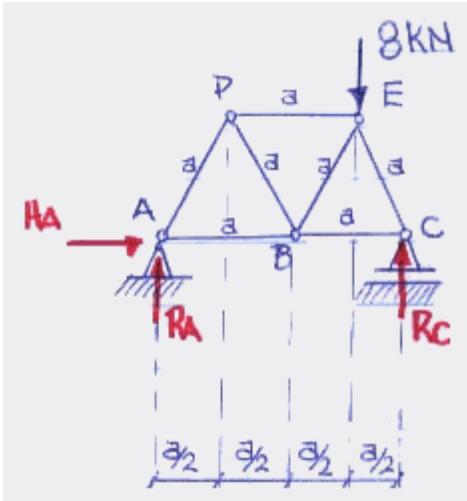
Finalmente, efetuando-se o equilíbrio do nó E, determina-se a força na barra 5.

$$\sum F_y = 0$$

$$F_5 \cos 37^\circ = F_7 \cos 37^\circ$$

$$F_5 = F_7 = 27,5 \text{ kN}$$





$$1) \sum M_{(A)} = 0 = 8 \cdot 3 \cdot a / 2 - R_C \cdot 2 \cdot a$$

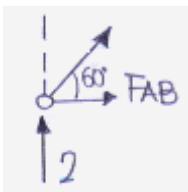
$$\Rightarrow R_C = 6 \text{ kN}$$

$$2) \sum F_V = 0 = R_A - 8 + R_C$$

$$\Rightarrow R_A = 2 \text{ kN}$$

$$3) \sum F_H = 0 = H_A$$

4) Nó A:

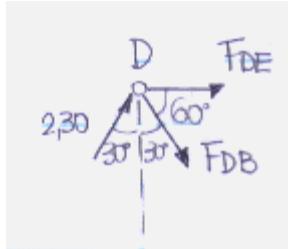


$$a) 2 + F_{AD} \cdot \sin 60^\circ = 0 \Rightarrow F_{AD} = -2,30 \text{ kN}$$

$$b) F_{AD} \cdot \cos 60^\circ + F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 1,15 \text{ kN}$$

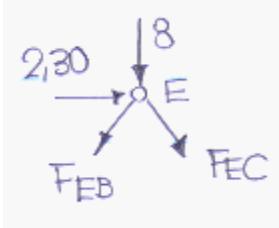
5) Nó D:

$$a) 2,30 \cdot \cos 30^\circ - F_{DB} \cdot \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow F_{DB} = 2,30 \text{ kN}$$



$$b) 2,30 \cdot \cos 60^\circ + F_{DB} \cdot \sin 30^\circ + F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{DB} = -2,30 \text{ kN}$$

6) Nó E:



$$a) 2,30 - F_{EB} \cdot \cos 60^\circ + F_{EC} \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow F_{EC} - F_{EB} = -4,60$$

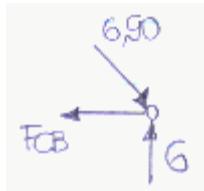
$$b) -8 - F_{EB} \cdot \cos 30^\circ - F_{EC} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$\Rightarrow -F_{EC} - F_{EB} = 9,25$$

$$\text{De (a) e (b)} \Rightarrow F_{EB} = -2,30 \text{ kN} \quad \text{e} \quad F_{EC} = -6,90 \text{ kN}$$

7) Nó C:

$$6,90 \cdot \cos 60^\circ - F_{CB} = 0 \Rightarrow F_{CB} = 3,45 \text{ kN}$$



8) Nó B: (verificação)

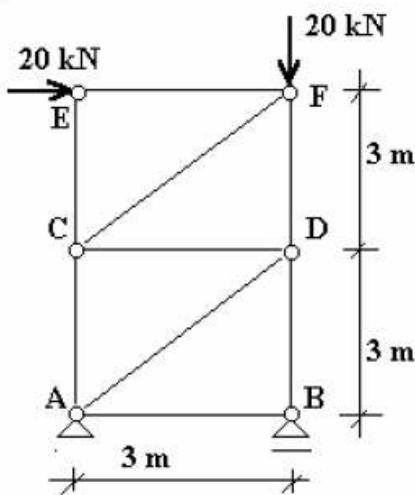
$$a) \sum F_H = -1,15 - 2,30 \cdot \cos 60^\circ - 2,30 \cdot \cos 60^\circ + 3,45 = 0$$



$$b) \sum F_V = 2,30 \cdot \sin 60^\circ - 2,30 \cdot \sin 60^\circ = 0$$

Exemplos:

1.



$$V_A = -40 \text{ kN}$$

$$V_B = 60 \text{ kN}$$

$$H_A = 20 \text{ kN} (\leftarrow)$$

R: Esforços normais:

$$N_{AB} = 0$$

$$N_{AC} = +20 \text{ kN}$$

$$N_{AD} = +28,28 \text{ kN}$$

$$N_{BD} = -60 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = -20 \text{ kN}$$

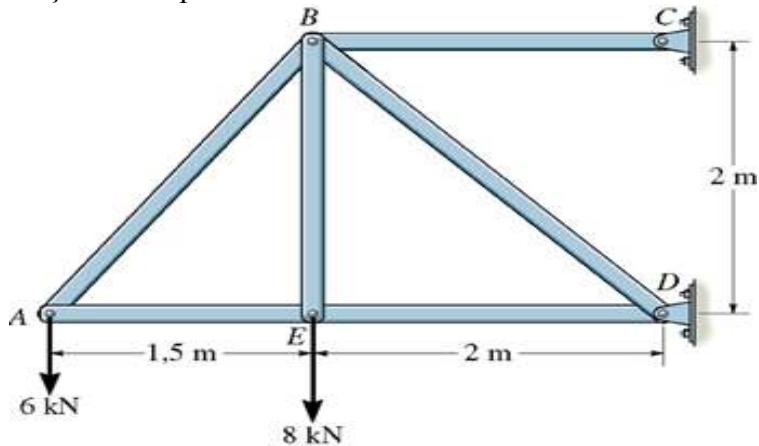
$$N_{CE} = 0$$

$$N_{CF} = +28,28 \text{ kN}$$

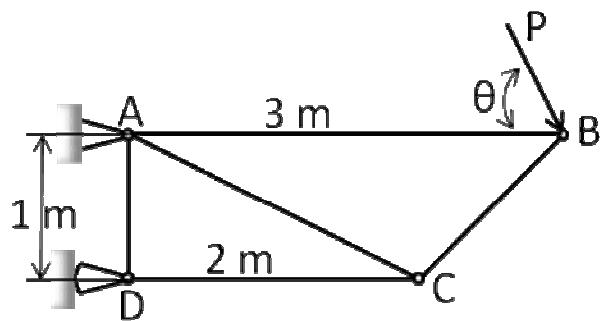
$$N_{EF} = -20 \text{ kN}$$

$$N_{DF} = -40 \text{ kN}$$

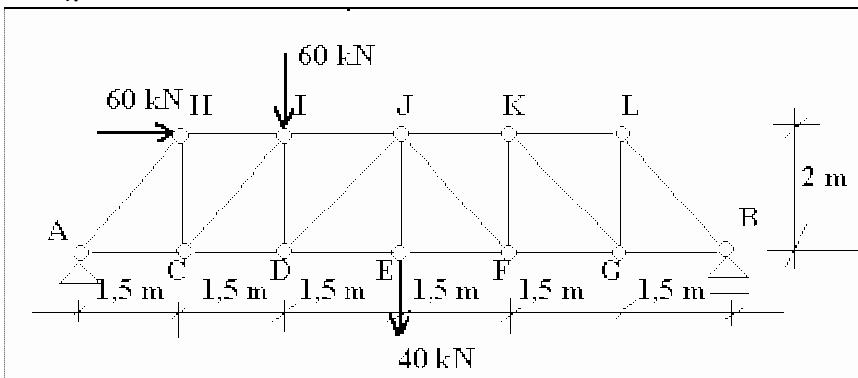
Determine os esforços nos elementos da treliça mostrada no desenho abaixo e calcule as reações nos apoios C e D.



Determine a força em cada elemento da treliça e indique se esses elementos estão sob tração ou compressão. Determine, também, as reações nos apoios A e D. Considere  $P = 5 \text{ kN}$  e  $\theta = 53,1301^\circ$ .



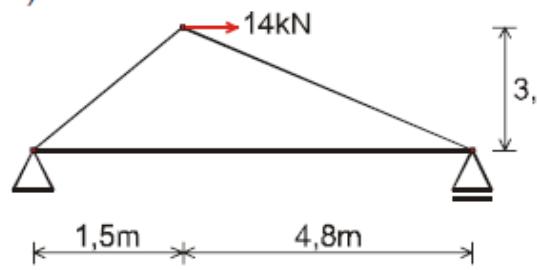
4.



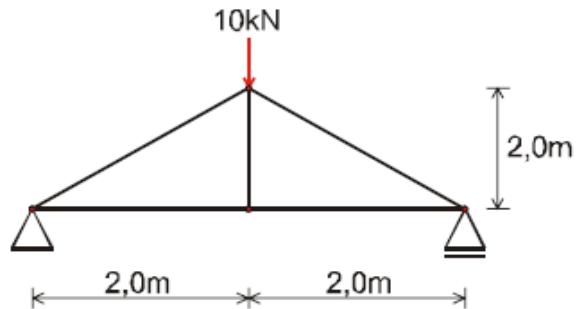
Respostas:

$$\begin{aligned}
 VA &= 50 \text{ kN} \\
 HA &= 60 \\
 KN(\leftarrow) & \\
 VB &= 50 \\
 Kn & \\
 NAH &= - \\
 70,7 \text{ kN} & \\
 NAC &= \\
 +110 \text{ kN} & \\
 NIJ &= -160 \\
 \text{kN NID} &= - \\
 10 \text{ kN NCD} & \\
 &= +160 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

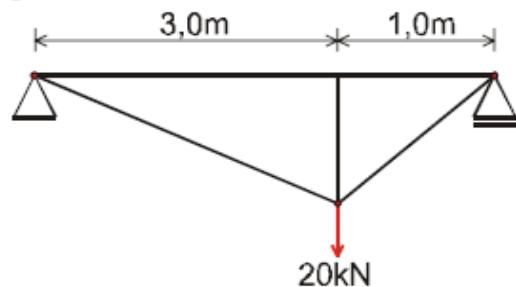
1)



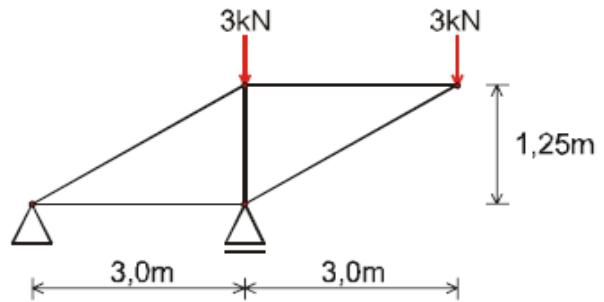
2)



3



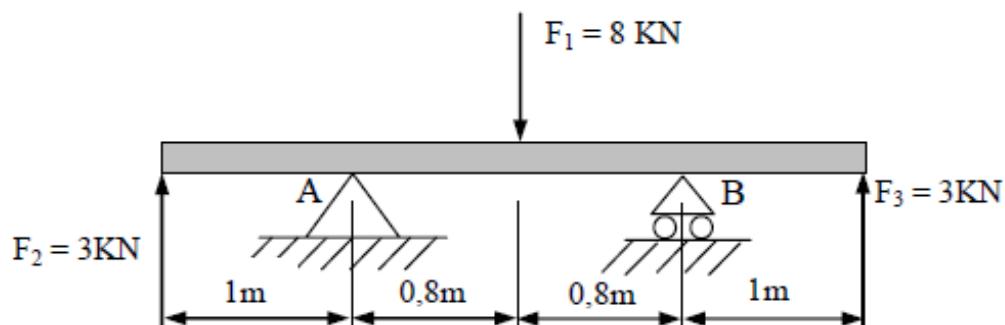
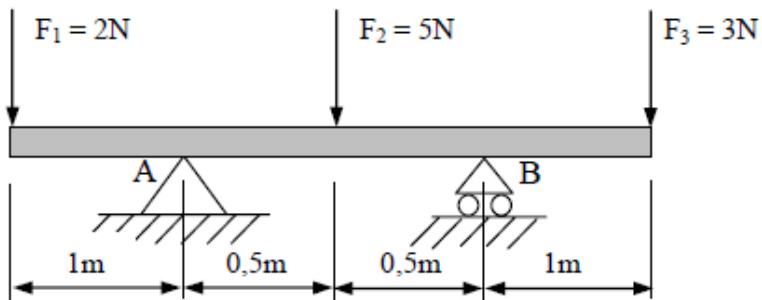
4)



### Momento de uma força

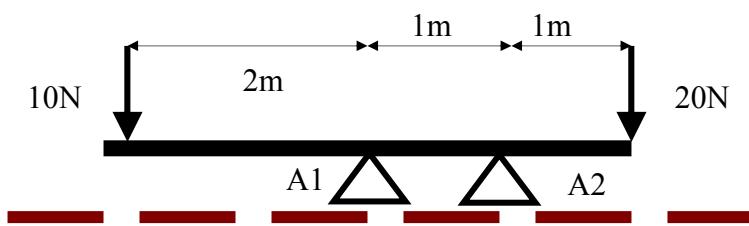
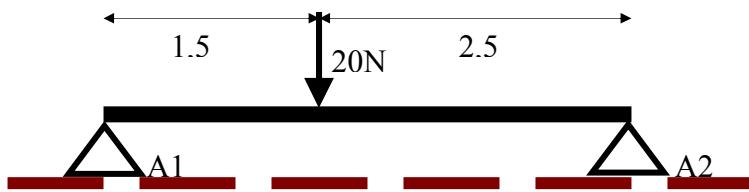
#### EXERCÍCIOS PARA FIXAÇÃO

- 1) No sistema abaixo há uma barra, que se encontra apoiada sobre dois apoios (A e B). É necessário saber qual a força de reação dos apoios abaixo.



Estes são exercícios de fixação. Calcular a força de reação nos dois apoios.

a)



## DICAS IMPORTANTES PARA ESTUDAR RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS

**Resistência dos materiais:** Estudo das tensões e das deformações que se desenvolvem nos sólidos, resultantes de forças exteriores a eles aplicadas

**Resistência:** Qualidade que têm os materiais de suportarem a aplicação de esforços externos sem cederem ou romperem.

**Força:** Todo agente capaz de alterar o módulo ou a direção da velocidade de um corpo; todo agente capaz de atribuir uma aceleração a um corpo.

**Equilíbrio:** Estado de um sistema no qual a resultante de todas as forças que atuam sobre ele é nula.

### **Unidade do sistema internacional (básico eletromecânica):**

Comprimento: metro (m)

Força: Newtons (N)

Massa: Quilograma: (kg)

Pressão ou tensão: N/m<sup>2</sup> ou Pa

Área: metros quadrados (m<sup>2</sup>);

Volume: metros cúbicos (m<sup>3</sup>);

Intensidade de corrente: Ampére (A);

### **Múltiplos e submúltiplos**

#### **Múltiplo – símbolo - nome**

**10<sup>3</sup>**        k        quilo

**10<sup>6</sup>**        M        mega

**10<sup>9</sup>**        T        Tera

**10<sup>-3</sup>**        m        mili

**10<sup>-6</sup>**        µ        Micro

**10<sup>-9</sup>**        p        pico

## TRAÇÃO OU COMPRESSÃO AXIAL

### (SIMPLES)

#### A. TENSÕES E DEFORMAÇÕES:

Sempre que tivermos uma peça de estrutura, submetida à carga externa com componente no seu eixo longitudinal, esta peça desenvolverá solicitação interna de esforço normal (N).

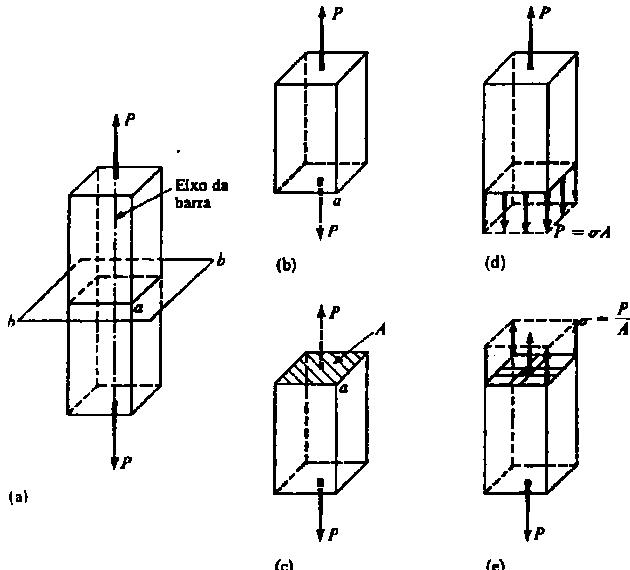
Admite-se que este esforço normal se distribui uniformemente na área em que atua (A), ficando a tensão definida pela expressão:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

sendo:

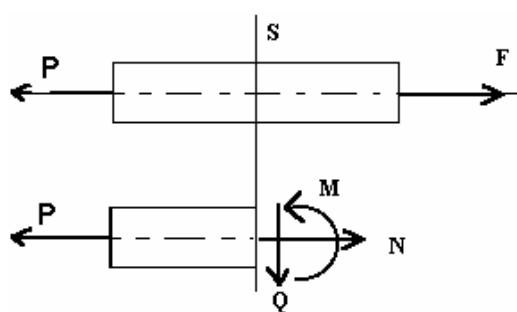
N → Esforço Normal desenvolvido

A → Área da seção transversal



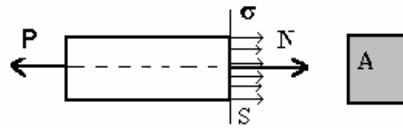
Etapas sucessivas de análise de tensão em um corpo

Na prática, vistas isométricas do corpo são raramente empregadas, sendo a visualização simplificada como:



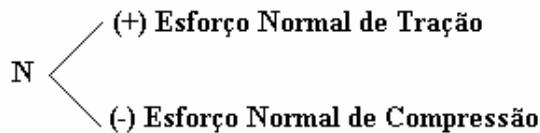
$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 & \therefore Q &= 0 \\ \Sigma M_s &= 0 & \therefore M &= 0 \\ \Sigma F_x &= 0 & \therefore N - P &= 0\end{aligned}$$

$$\boxed{N = P}$$



A tração ou Compressão axial simples pode ser observada, por exemplo, em tirantes, pilares e treliças.

Lembramos a convenção adotada para o esforço normal (N)



Nas tensões normais, adotamos a mesma convenção.

As deformações desenvolvidas podem ser calculadas diretamente pela lei de Hooke:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

$$N = P$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} \quad \therefore \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{N}{EA} \quad \text{ou :}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}}$$

OBS:

Ao aceitarmos as equações acima, deve-se ter em mente que o comportamento do material é idealizado, pois todas as partículas do corpo são consideradas com contribuição igual para o equilíbrio da força N.

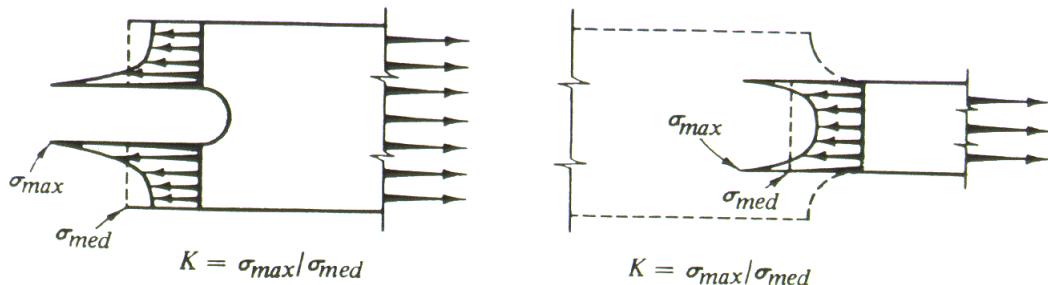
Como partimos da premissa de que em todos os elementos de área atua a mesma tensão, decorre daí que:

$$N = \sigma \cdot A$$

Nos materiais reais esta premissa não se verifica exatamente. Por exemplo, os metais consistem em grande número de grãos e as madeiras são fibrosas. Sendo assim, algumas partículas contribuirão mais para a resistência de que outras, e o diagrama exato da distribuição das tensões varia em cada caso particular e é bastante irregular.

Em termos práticos porém, os cálculos pela equação da tensão uniforme são considerados corretos.

Outros dois fatores de concentração de tensões, onde a distribuição uniforme não é válida, são mostrados abaixo, e representam peças com variações bruscas de seção.

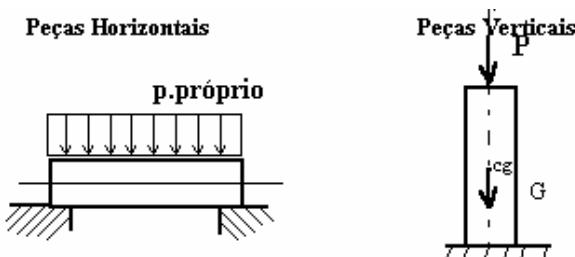


Deve-se ter um cuidado adicional para com as peças comprimidas, pois as peças esbeltas devem ser verificadas à flambagem.

A flambagem representa uma situação de desequilíbrio elasto-geométrico do sistema e pode provocar o colapso sem que se atinja o esmagamento.

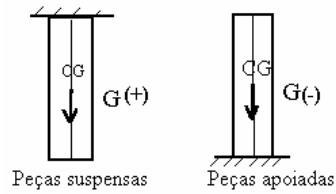
## B. PESO PRÓPRIO DAS PEÇAS

O peso próprio das peças constitui-se em uma das cargas externas ativas que devem ser resistidas. Podemos observar como se dá a ação do peso próprio:



Podemos notar que nas peças horizontais o peso próprio constitui-se em uma carga transversal ao eixo, desenvolvendo Momento Fletor e Esforço Cortante.

No caso das peças verticais o peso próprio ( $G$ ), atua na direção do eixo longitudinal da peça e provoca Esforço Normal, que pode ter um efeito diferenciado dependendo da sua vinculação:



Nas peças suspensas (tirantes) o efeito do peso é de tração e nas apoiaadas (pilares) este efeito é de compressão.

O peso próprio de uma peça ( $G$ ) pode ser calculado, multiplicando-se o volume da mesma pelo peso específico do material:

$$G = A \cdot \gamma \cdot l$$

Sen

do:

$A$  - área da seção transversal da  
peça  $l$  - comprimento

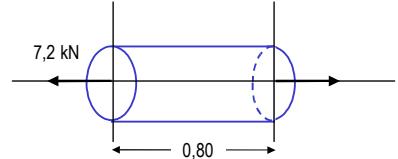
$\gamma$  - peso específico do  
material

Na tração ou compressão axial a não consideração do peso próprio é o caso mais simples.

### Exemplo 1

A barra circular de aço apresentada na figura abaixo possui  $d = 20 \text{ mm}$  e comprimento  $l = 0,80 \text{ m}$ . Encontra-se submetida à ação de uma carga axial de  $7,2 \text{ kN}$ . Pede-se determinar:

- (a) tensão normal atuante na barra
- (b) o alongamento
- (c) a deformação longitudinal
- (d) a deformação transversal



Dados:

$$E_{\text{aço}} = 210.000 \text{ MPa}$$

$$\nu_{\text{aço}} = 0,3 \text{ (coeficiente de Poisson)}$$

### Solução

- (a) tensão normal atuante

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi d^2 / 4} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\sigma = \frac{4 \cdot 7200 \text{ N}}{\pi (20 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 7200 \text{ N}}{\pi \cdot 20^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 7200}{\pi \cdot 20^2} \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

MPa

$$\sigma = 22,9 \text{ MPa}$$

- (b) alongamento da barra ( $\delta$ )

$$\delta = \frac{PL}{EA} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{22,9 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,80 \text{ m}}{210000 \cdot 10^9 \text{ Pa}}$$

$$\delta = 0,087 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,087 \text{ mm}$$

(c) a deformação longitudinal ( $\varepsilon$ )

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{0,087 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,80 \text{ m}}$$

$$\varepsilon = 0,000109 \text{ m/m} = 109 \mu\text{e}$$

(d) a deformação transversal ( $\varepsilon_t$ )

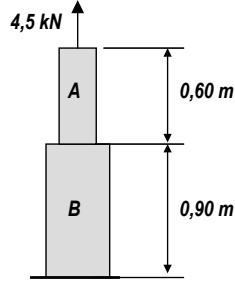
$$\varepsilon_t = -v \cdot \varepsilon = -0,3 \cdot 109$$

$$\varepsilon_t = -33 \mu\text{e}$$

### Exemplo 2

A figura apresentada a seguir representa duas barras de aço soldadas. A carga de tração que atua no conjunto é de 4,5 kN. A seção A da peça possui  $d_A = 15 \text{ mm}$  e comprimento  $l_A = 0,60 \text{ m}$ , sendo que a seção B possui  $d_B = 25 \text{ mm}$  e  $l_B = 0,90 \text{ m}$ . Desprezando-se o efeito do peso próprio do material, pede-se determinar para as seções das peças A e B:

- (a) tensão normal
- (b) o alongamento
- (c) a deformação longitudinal
- (d) a deformação transversal
- (e) o alongamento total da peça



### Solução

(a) tensão normal

$$\sigma_A = \frac{F}{A_A} = \frac{F}{\pi d_A^2 / 4} = \frac{4F}{\pi d_A^2}$$

$$\sigma_A = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi (15 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi \cdot 15^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 4500}{\pi \cdot 15^2} \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

MPa

$$\sigma_A = 25,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_B = \frac{F}{A_B} = \frac{F}{\pi d_B^2 / 4} = \frac{4F}{\pi d_B^2}$$

$$\sigma_B = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi (25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} = \frac{4 \cdot 4500 \text{ N}}{\pi \cdot 25^2 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2} = \frac{4 \cdot 4500}{\pi \cdot 25^2} \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_B = 9,2 \text{ MPa}$$

(b) alongamento da barra ( $\delta$ )

$$\delta_A = \frac{P L_A}{E A_A} = \frac{\sigma_A L_A}{E} = \frac{25,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,60 \text{ m}}{210000 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

$$\delta_A = 0,073 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,073 \text{ mm}$$

$$\delta_B = \frac{P L_B}{E A_B} = \frac{\sigma_B L_B}{E} = \frac{9,2 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot 0,90 \text{ m}}{210000 \cdot 10^6 \text{ Pa}}$$

$$\delta_B = 0,039 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,039 \text{ mm}$$

(c) a deformação longitudinal ( $\varepsilon$ )

$$\varepsilon_A = \frac{\delta_A}{L_A} = \frac{0,073 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,60 \text{ m}}$$

$$\varepsilon_A = 0,000122 \text{ m/m} = 122 \mu\varepsilon$$

$$\varepsilon_B = \frac{\delta_B}{L_B} = \frac{0,039 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0,90 \text{ m}}$$

$$\varepsilon_B = 0,000043 \text{ m/m} = 43 \mu\epsilon$$

(d) a deformação transversal ( $\varepsilon_t$ )

$$\varepsilon_{tA} = -v \cdot \varepsilon_A = -0,3 \cdot 122 \Rightarrow \varepsilon_{tA} = -37 \mu\epsilon \quad \varepsilon_{tB} =$$

$$-v \cdot \varepsilon_B = -0,3 \cdot 43 \Rightarrow \varepsilon_{tB} = -13 \mu\epsilon$$

(e) o alongamento total da peça ( $\delta$ )

$$\delta = \delta_A + \delta_B = 0,073 + 0,039$$

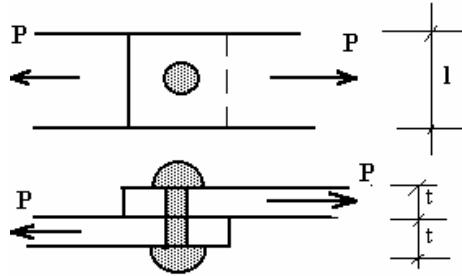
$$\delta = 0,112 \text{ mm}$$

## CISALHAMENTO CONVENCIONAL

### A. ASPECTOS GERAIS

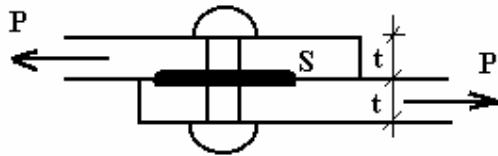
Consideremos inicialmente um sistema formado por duas chapas de espessura "t" ligadas entre si por um pino de diâmetro "d", conforme esquematizado abaixo:

A largura destas chapas é representada por "l" e a ligação está sujeita à uma carga de tração "P".



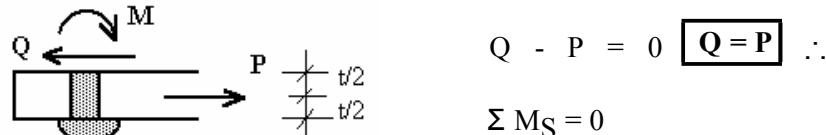
Considerando-se o método das seções, se cortarmos a estrutura por uma seção "S", perpendicular ao eixo do pino e justamente no encontro das duas chapas, nesta seção de pino cortada devem ser desenvolvidos esforços que equilibrem o sistema isolado pelo corte.

Então:



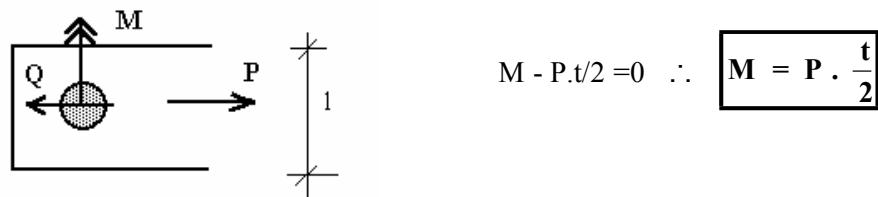
Isolando e aplicando as equações de equilíbrio:

$$\sum F_x = 0$$



$$Q - P = 0 \quad \boxed{Q = P} \quad \therefore$$

$$\sum M_S = 0$$



$$M - P \cdot t/2 = 0 \quad \therefore \quad \boxed{M = P \cdot \frac{t}{2}}$$

Vimos então que as solicitações que se desenvolvem na seção de corte do pino são de Momento Fletor e Esforço Cortante, com os valores acima calculados.

## B. CISALHAMENTO CONVENCIONAL

Conforme os cálculos acima efetuados, podemos notar que o valor do momento é pequeno já que estamos trabalhando com a união de chapas que, por definição, tem a sua espessura pequena em presença de suas demais dimensões.

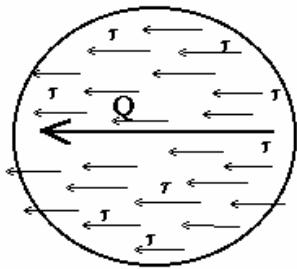
Podemos, nestes casos, fazer uma aproximação, desprezando o efeito do momento fletor em presença do efeito do esforço cortante.

Em casos de ligações de pequena espessura, como normalmente aparecem em ligações rebitadas, soldadas, parafusadas, pregadas e cavidas, esta solução simplificada nos leva a resultados práticos bastante bons, e então adotaremos nestes casos, o cisalhamento

O **cisalhamento convencional** é uma aproximação do cisalhamento real, onde o efeito do momento fletor é desprezado.

Como teríamos apenas uma área sujeita à uma força contida em seu plano e passando pelo seu centro de gravidade, para o cálculo das tensões desenvolvidas adotaríamos a distribuição uniforme, dividindo o valor da força atuante pela área de atuação da mesma, área esta denominada de **ÁREA RESISTENTE**, que deveria então ser o objeto da nossa análise.

A distribuição uniforme nos diz que em cada ponto desta área a tensão tangencial teria o mesmo valor dada por:

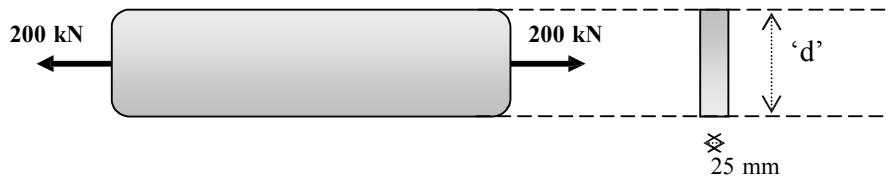


$$\tau = \frac{Q}{A_{\text{resist}}}$$

A lei exata da distribuição de tensões deve ser posteriormente estudada para os outros casos em que o cisalhamento convencional não é adotado.

### EXERCÍCIOS:

1. Uma força de tração axial é aplicada à barra de aço estrutural abaixo, que tem 25 mm de espessura. Se a tensão de tração admissível deste aço é 135 MPa e a deformação longitudinal admissível 1,25 mm, determine a largura mínima 'd' da barra.



2. Levou-se a laboratório uma barra cilíndrica de um metal que tem 15 mm de diâmetro e 400 mm de comprimento. Observou-se que ele ao apresentar o comprimento de 401 mm, o metal escoou. Neste momento era medida uma força axial de compressão de 30 kN. De posse destes dados, determine:
- Tensão de escoamento do material ( $\sigma_e$ )
  - Módulo de elasticidade longitudinal (E)
  - Deformação específica longitudinal ( $\epsilon$ )
3. Uma barra de seção transversal retangular de 3 x 1 cm tem comprimento de 3 m. Determinar o alongamento produzido por uma carga axial de tração de 60 kN, sabendo-se que o módulo de elasticidade longitudinal do material é de  $2 \cdot 10^4$  kN/cm<sup>2</sup>.

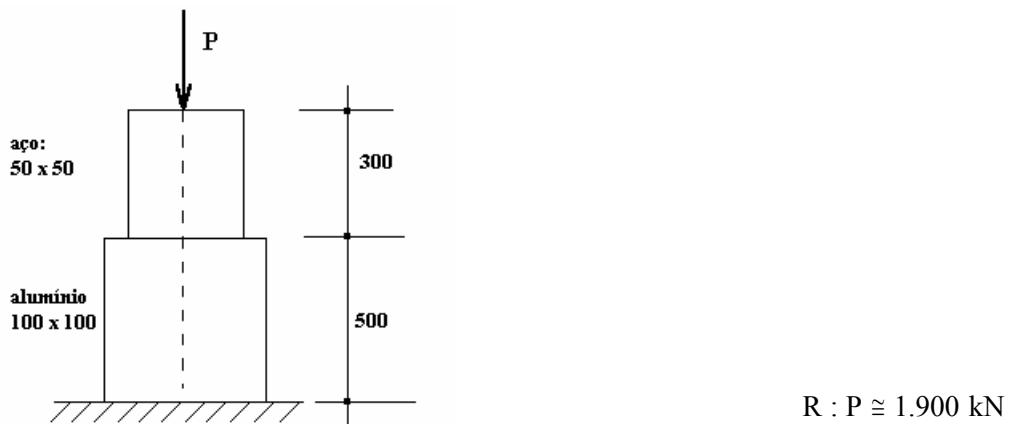
R: 0,3 cm

4. Uma barra de aço e outra de alumínio tem as dimensões indicadas na figura. Determine a carga "P" que provocará um encurtamento total de 0,25 mm no comprimento do sistema.

Admitimos que as barras são impedidas de flambar lateralmente, e despreza-se o peso próprio das barras.

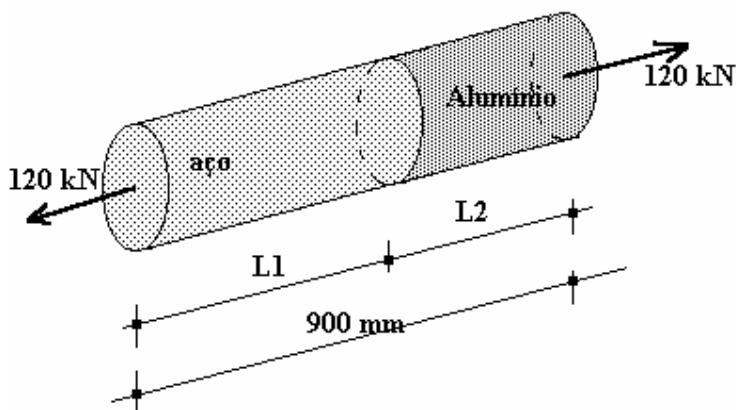
Dados:  $E_{aço} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$        $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$

OBS : medidas em cm



5. Um cilindro sólido de 50 mm de diâmetro e 900 mm de comprimento acha-se sujeito à uma força axial de tração de 120 kN. Uma parte deste cilindro de comprimento  $L_1$  é de aço e a outra parte unida ao aço é de alumínio e tem comprimento  $L_2$ .
- Determinar os comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  de modo que os dois materiais apresentem o mesmo alongamento

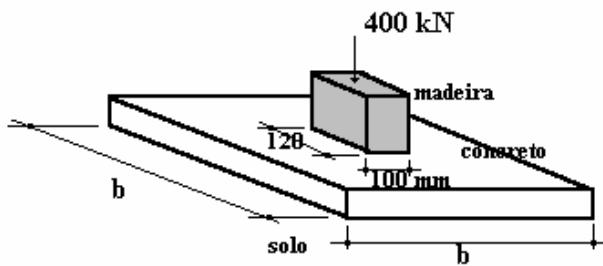
Dados:       $E_{aço} = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$        $E_{Al} = 0,7 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$



$$R : (a) L_1 = 66,5 \text{ cm} \quad L_2 = 23,33 \text{ cm}$$

6. Uma força axial de 400 kN é aplicada à um bloco de madeira de pequena altura que se apoia em uma base de concreto que repousa sobre o solo. Determine, desprezando o peso próprio da madeira:

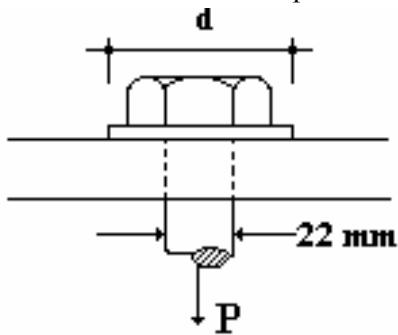
a. Tensão de esmagamento na base do bloco de madeira



b. As dimensões do bloco de concreto que tem peso específico de  $25 \text{ kN/m}^3$ , para que não se ultrapasse no solo a tensão de  $1,45 \text{ kN/cm}^2$ .

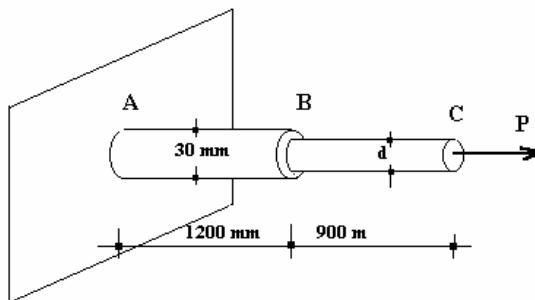
$$R: (a) 3,33 \text{ kN/cm}^2 \\ (b) 166 \text{ mm}$$

7. A carga P aplicada à um pino de aço é transmitida por um suporte de madeira por intermédio de uma arruela de diâmetro interno 25 mm e de diâmetro externo "d". Sabendo-se que a tensão normal axial no pino de aço não deve ultrapassar 35 MPa e que a tensão de esmagamento média entre a peça de madeira e a arruela não deve exceder 5MPa, calcule o diâmetro "d" necessário para a arruela.



$$R: 6,32 \text{ cm}$$

8. Aplica-se à extremidade C da barra de aço ABC uma carga de 66,7 kN. Sabe-se que o módulo de elasticidade longitudinal do aço é de  $2,1 \cdot 10^4$  kN/cm $^2$ . Determinar o diâmetro "d" da parte BC para a qual o deslocamento do ponto C seja de 1,3 mm.

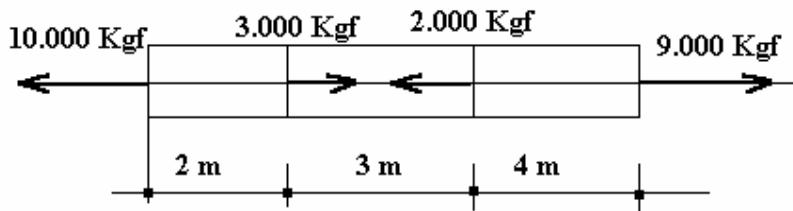


R: 21,8 mm

9. Usando o desenho do problema anterior, suponha as duas partes da barra de alumínio com módulo de elasticidade longitudinal de  $0,7 \cdot 10^4$  kN/cm $^2$ . O diâmetro da parte BC é de 28 mm. Determinar a máxima força que pode ser aplicada na extremidade C sabendo-se que o seu deslocamento não pode ultrapassar 3,8 mm. Sabe-se que a tensão de escoamento admissível para o alumínio é de 16,5 kN/cm $^2$ .

R:  $P \leq 84$  kN

10. Uma barra de aço tem seção transversal de  $10 \text{ cm}^2$  e está solicitada pelas forças axiais indicadas. Determinar as tensões desenvolvidas nos diversos trechos da barra.



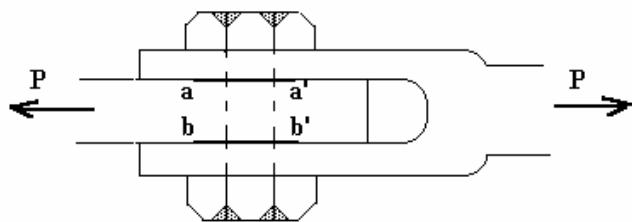
R: trecho 1 :  $1.000 \text{ kgf/cm}^2$   
trecho 2 :  $700 \text{ kgf/cm}^2$   
trecho 3 :  $900 \text{ kgf/cm}^2$

11. Uma guilhotina para cortes de chapas tem mesa com 2 metros de largura de corte e 450 kN de capacidade. Determinar as espessuras máximas de corte em toda a largura para as chapas :

- a. Aço ( $\bar{\tau} = 220$  MPa)
- b. Cobre ( $\bar{\tau} = 130$  MPa)
- c. Alumínio ( $\bar{\tau} = 70$  MPa)

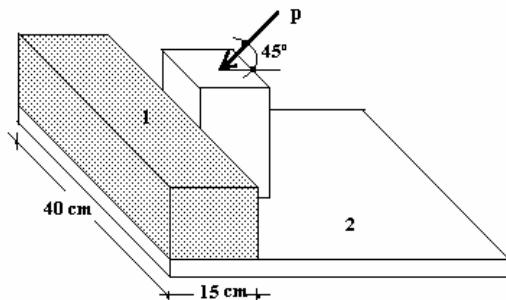
- R: (a) 0.10 cm  
(b) 0.17 cm  
(c) 0.32 cm

12. Considere-se o pino de 12,5 mm de diâmetro da junta da figura. A força "P" igual à 37,50 kN. Admita a distribuição de tensões de cisalhamento uniforme. Qual o valor destas tensões nos planos a-a' e b-b'.



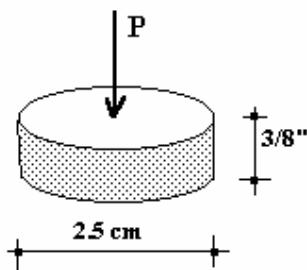
$$R: 1.528 \text{ Kgf/cm}^2$$

13. De acordo com a figura, a força  $P$  tende a fazer com que a peça superior (1) deslize sobre a inferior (2). Sendo  $P = 4.000 \text{ Kgf}$ , qual a tensão desenvolvida no plano de contato entre as duas peças?



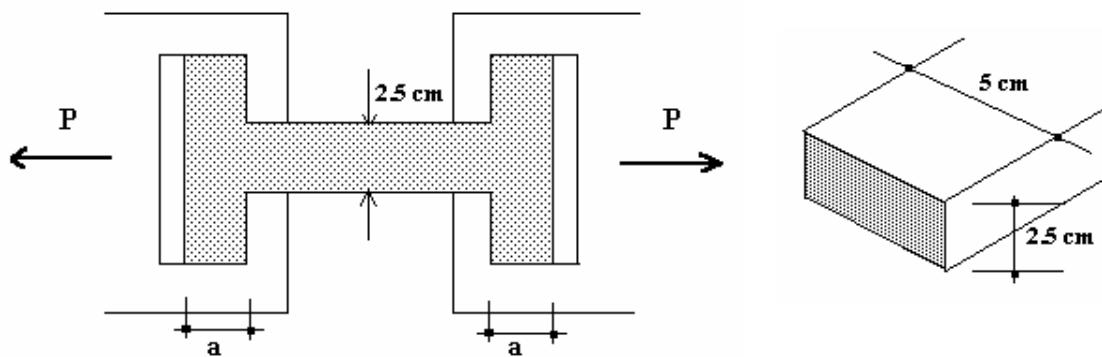
$$R: 4,71 \text{ kgf/cm}^2$$

14. O aço de baixo teor de carbono usado em estruturas tem limite de resistência ao cisalhamento de  $31 \text{ kN/cm}^2$ . Pede-se a força  $P$  necessária para se fazer um furo de  $2.5 \text{ cm}$  de diâmetro, em uma chapa deste aço com  $3/8''$  de espessura.



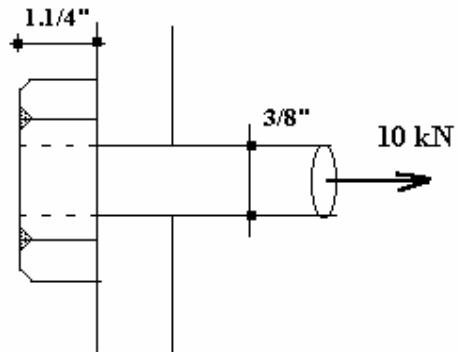
$$R: 231,91 \text{ kN}$$

15. Considere-se o corpo de prova da figura, de seção transversal retangular  $2.5 \times 5 \text{ cm}$ , usado para testar a resistência a tração da madeira. Sendo para a peroba de  $1,3 \text{ kN/cm}^2$  a tensão de ruptura ao cisalhamento, pede-se determinar comprimento mínimo "a" indicado, para que a ruptura se de por tração e não por cisalhamento nos encaixes do corpo de prova. Sabe-se que a carga de ruptura do corpo por tração é de  $10,4 \text{ kN}$ .



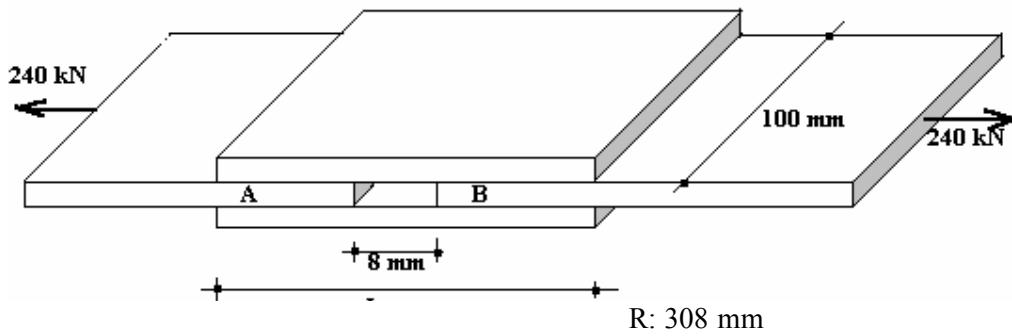
$$R: a \geq 0.8 \text{ cm}$$

16. Considere-se um pino de aço de  $3/8''$  de diâmetro sujeito à força axial de tração de 10 kN. Calcular a tensão de cisalhamento na cabeça do pino, admitindo que a superfície resistente seja de um cilindro de mesmo diâmetro do pino, como se indica em tracejado.



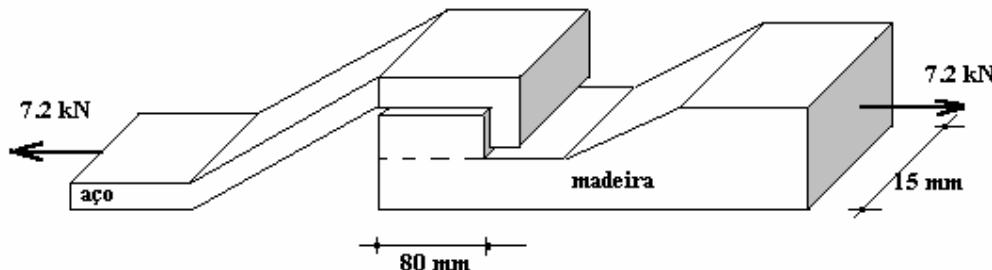
$$R: 1,05 \text{ kN/cm}^2$$

17. As peças de madeira A e B são ligadas por cobrejuntas de madeira que são colados nas superfícies de contato com as peças. Deixa-se uma folga de 8 mm entre as extremidades de A e B. Determine o valor do comprimento "L" para que a tensão de cisalhamento nas superfícies coladas não ultrapasse  $0,8 \text{ kN/cm}^2$ .



$$R: 308 \text{ mm}$$

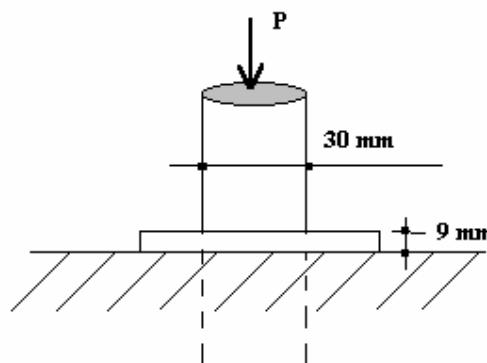
18. Ao se aplicar a força indicada, a peça de madeira se rompe por corte ao longo da superfície tracejada. Determine a tensão de cisalhamento média na superfície de ruptura.



$$R: 6 \text{ MPa}$$

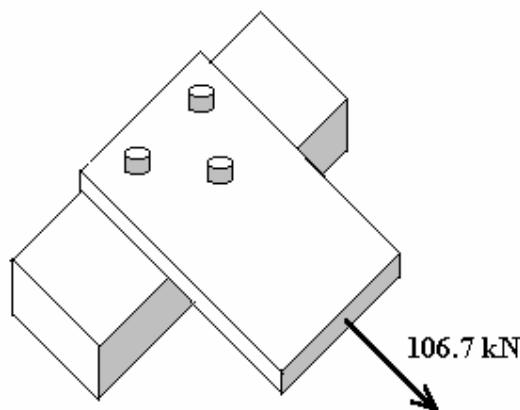
19. Sabendo que a tensão de ruptura ao cisalhamento de uma chapa de aço é de 330 MPa, determine:

- A força necessária para produzir por punção um furo de 30 mm de diâmetro em uma chapa com 9 mm de espessura
- A tensão normal correspondente no furador



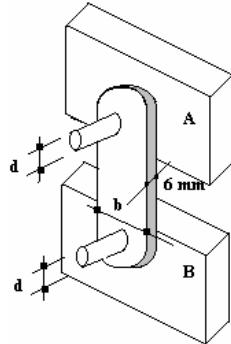
$$R: (a) 279,91 \text{ kN} \quad (b) 39,59 \text{ kN/cm}^2$$

20. A placa indicada na figura é presa à base por meio de 3 parafusos de aço. A tensão de cisalhamento última do aço é de 331 MPa. Utilizando-se um coeficiente de segurança de 3,5 determine o diâmetro do parafuso à ser usado.



R: 22 mm

21. A ligação AB está sujeita à uma força de tração de 27 kN. Determine:  
 a. O diâmetro "d" do pino no qual a tensão média permitida é de 100 MPa.  
 b. A dimensão "b" da barra para a qual a máxima tensão normal será de 120 MPa.



R: (a) 1,85 cm (b) 3,75 cm

22. Dimensionar um eixo de uma roldana fixa que deve suportar a elevação de uma carga de 100 kN. Sabe-se que o material do eixo apresenta tensão admisível ao cisalhamento de 120 MPa.

### Lei de Hooke

Os diagramas tensão-deformação da maioria dos materiais apresentam uma região inicial de comportamento elástico e linear.

A relação linear entre a tensão e a deformação, no caso de uma barra em tração, pode ser expressa por:

$$\sigma = E \cdot \epsilon$$

onde  $E$  é uma constante de proporcionalidade conhecida como **módulo de elasticidade** do material.

Este é o coeficiente angular da parte linear do diagrama tensão-deformação e é diferente para cada material. O módulo de elasticidade é também conhecido como **módulo de Young** e a equação anterior é chamada de **Lei de Hooke**.

Quando uma barra é carregada por tração simples, a tensão axial é  $\sigma = \frac{P}{A}$  e a

deformação específica é  $\epsilon = \frac{\delta}{L}$ .

Combinando estas expressões com a lei de Hooke, tem-se que o alongamento da barra é  $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$ .

Esta equação mostra que o alongamento de uma barra linearmente elástica é diretamente proporcional à carga e ao seu comprimento e inversamente proporcional ao módulo de elasticidade e à área da seção transversal.

O produto  $E \cdot A$  é conhecido como **rigidez axial** da barra.

A **flexibilidade** da barra é definida como a deformação decorrente de uma carga unitária. Da equação anterior, vemos que a flexibilidade é  $\frac{L}{E \cdot A}$ .

De modo análogo, a **rijeca** da barra é definida como a força necessária para produzir uma deformação unitária. Então, a rijeca é igual a

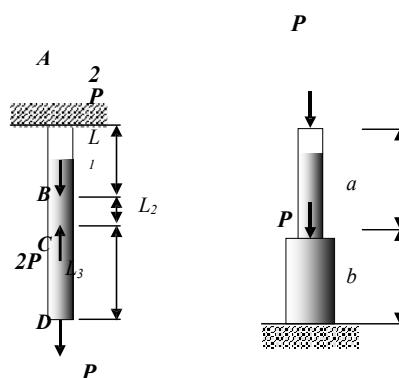
$E \cdot A \frac{L}{L}$ , que é o inverso da flexibilidade.



---

Vários casos que envolvem barras com carregamento axial podem ser solucionados aplicando-se a expressão:  $\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$ .

A figura mostra uma barra carregada axialmente. O procedimento para determinação da deformação da barra consiste em obter a força axial em cada parte da barra (AB, BC e CD) e, em seguida, calcular separadamente o alongamento (ou encurtamento) de cada parte.



A soma algébrica dessas variações de comprimento dará a variação total de comprimento da barra, tal que:

$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{P_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$

O mesmo método pode ser usado quando a barra é formada por partes com diferentes seções transversais.