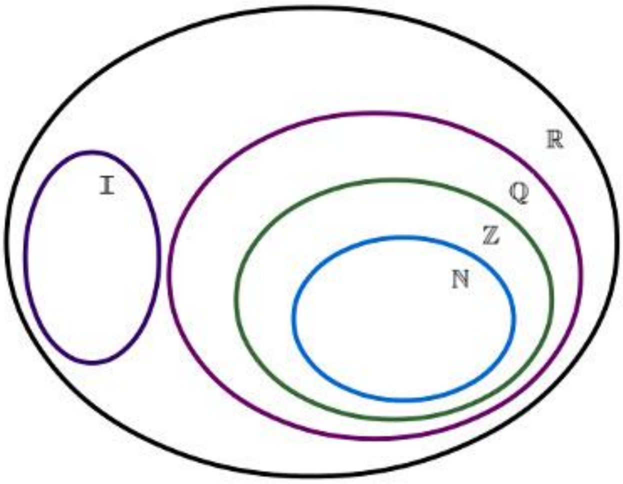
CONJUNTOS NUMÉRICOS



$N \subset Z \subset Q \subset R$

$I \subset R$

NÚMEROS NATURAIS(N)
N = { 0,1,2,3,4,5,...}   ou   N* = {1,2,3,4,5,...}

NÚMEROS INTEIROS(Z)
Z = {...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...}

<u>Subconjunto de Z</u>

Conjunto dos números inteiros não-nulos.   Z* = {...,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,...}

Conjunto dos números inteiros não-negativos.   Z= {0,1,2, 3,..,}

Conjunto dos números inteiros positivos.   Z*+ = {1,2,3,...}

Conjunto dos números inteiros não- positivos.   Z- = {... ,-3,-2 1,0}

Conjunto dos números inteiros negativos.   Z-* = {...,-3,-2,-1,}

NÚMEROS RACIONAIS(Q)
Os números racionais(Q) podem ser representados em forma fracionária ou decimal, são usados em problemas que envolvem as partes de um todo, um quociente, a razão entre dois números inteiros, etc.

Chama-se de número racional todo número que pode ser expresso na forma de fração p/q, com p $\in$ Z, q $\in$ Z*.

*Todo número inteiro é racional.
Ex; -2, -5 , 0 ,1 ,2

*Todo número decimal exato é racional.
Ex:0,5 é racional, pois pode ser colocado na forma 5/10.

*Todo número decimal periódico é racional.
Ex: 0,444=4/9   0,5555=5/9

NÚMEROS IRRACIONAIS (I)
Os gregos antigos reconheciam uma espécie de números que não são nem inteiro nem fracionário, posteriormente identificado como irracional.

Qual o resultado da operação

$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ Errado.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ Certo

NÚMEROS REAIS(R)
De forma mais abrangente a esse universo de conjuntos numéricos, temos o conjunto dos números reais. O conjunto dos números reais é formado pela união dos racionais com os irracionais. R = Q $\cup$ I

.

Exercicios:

1) Relacione os elementos e os conjuntos:

a) -7............ N
b) $\sqrt{2}$ .... Q
c) 4 .... Z
d) $\sqrt{10}$ I
e) $\frac{1}{2}$ .... Z
f) $\sqrt{\frac{9}{4}}$ .... Q
g) $0,1\overline{6}$ .... Q
h) $\sqrt[3]{8}$ .... N
i) -2 .... N

2) Assinale *V* para sentenças verdadeiras e *F* para sentenças falsas:

a) $N \subset Z$
b) $N^* \not\subset N$
c) $N^* \subset N$
d) $\mathbf{Z}_+ \subset Z$
e) $\mathbf{Z}_- \not\subset Z$
f) $Q \subset R$
g) $Z \subset Q$
h) $\mathbf{Z}_+ \subset Q$
i) $N \not\subset R$
j) $\mathbf{R}_+^* \subset R$

3-Escrever em ordem crescente os números reais $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $-\sqrt{3}$, usando o sinal " < " (menor que)

5-Determine o valor numérico de $\frac{a+b}{1-a.b}$ usando $a=\frac{3}{4}$ e $b=\frac{1}{6}$

4---Escrever na forma $\frac{a}{b}$ como em Q os números reais : a) 0,7 b) 0,5555..... c) 2,5555.......

5) Numa pesquisa realizada com 200 pessoas, 80 informaram que gostam de música sertaneja, 90 música romântica, 55 de música clássica, 32 de músicas sertaneja e romântica, 23 de músicas sertaneja e clássica, 16 de músicas romântica e clássica, 8 gostam dos três tipos de música e os demais de nenhuma das três. Obter o número de pessoas que não gostam de nenhuma das três.R=38 pessoas

6 – Simplifique as frações até torná-las irredutíveis.

a) $\frac{22}{70}$ b) $\frac{13}{182}$ c) $\frac{49}{77}$

7– Multiplique as frações e, se possível, use a técnica de cancelamento.

a) $\frac{18}{24} \cdot \frac{32}{21}$ b) $4 \cdot \frac{7}{90} \cdot \frac{50}{35}$

8-Represente as frações na forma decimal.

a) $\frac{52}{10}$ b) $\frac{52}{100}$ c) $\frac{77}{10}$ d) $\frac{77}{100}$

9)– Escreva na forma de fração decimal irredutível os seguintes números decimais.

a) 2,2 b) 0,44 c) 0,25 d) 2,4 e) 2,50

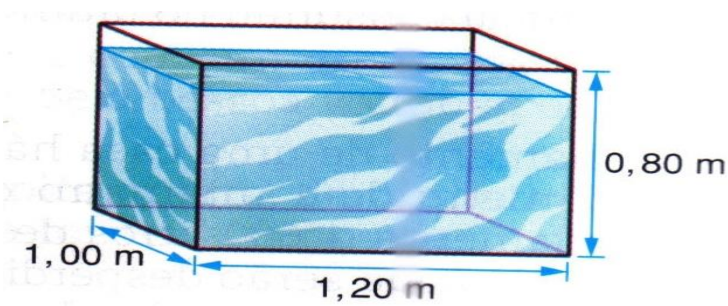
10)Usando os sinais =, > e <, compare os seguintes pares de números decimais.

a) 9,4 e 4,9 b) 7 e 7,1 c) 4,230 e 4,23
d) 2,081 e 2,0095 e) 0,064 e 0,12

11 – Um número x é tal que x = (51,7 + 8,36) – (16,125 + 7,88). Determine o número x.

12- ATENÇÃO: 1 litro = 1 dm³

Observe a figura.



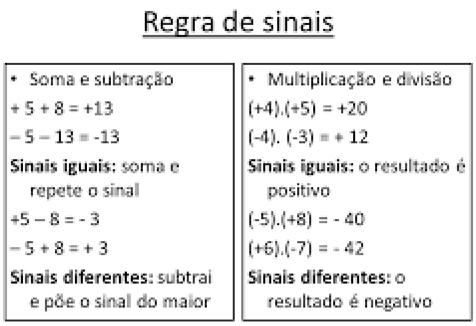
O volume de água na caixa é de:

a)O,96 l b) 96 l c) 960 l d) 9 600 l

13- Determine a área de um triângulo cuja base mede 8 cm e a altura, 5,2 cm.

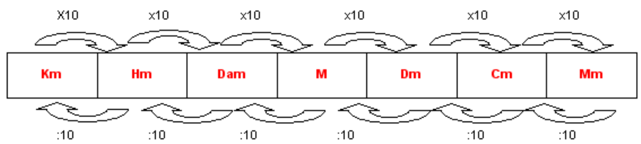
14- Em um paralelogramo, a base mede 10 cm. Sabendo que a medida da altura é a metade da medida da base, determine a área desse paralelogramo.

Lembrando
Regras de operações com sinais:


Regra de sinais

• Soma e subtração	• Multiplicação e divisão
+ 5 + 8 = +13	(+4).(+5) = +20
− 5 − 13 = -13	(-4). (-3) = + 12
Sinais iguais: soma e repete o sinal	**Sinais iguais:** o resultado é positivo
+5 − 8 = - 3	(-5).(+8) = - 40
− 5 + 8 = + 3	(+6).(-7) = - 42
Sinais diferentes: subtrai e põe o sinal do maior	**Sinais diferentes:** o resultado é negativo

Unidades do Sistema Métrico Decimal



Potenciação

$$a^n = \underbrace{a.a.a.\ \ldots\ .a}_{n\ fatores}$$

- ***a* é a** base;
- ***n* é o** expoente;
- **o resultado é a** potência.

Por definição temos que: $a^0 = 1 \quad e \quad a^1 = a$

Exemplos:

a) $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $(-2)^2 = -2 \cdot -2 = 4$

c) $(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8$

d) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$

CUIDADO !!

Cuidado com os sinais.

- *Número negativo elevado a expoente par fica positivo. Exemplos:*

$$(-2)^4 = -2 \cdot -2 \cdot -2 \cdot -2 = 16$$

$$(-3)^2 = -3 \cdot -3 = 9$$

- *Número negativo elevado a expoente ímpar permanece negativo. Exemplo:*

Ex. 1: $(-2)^3 = \underbrace{-2 \cdot -2}_{} \cdot -2$

$$4 \cdot -2 = \boxed{-8}$$

- *Se* $x = 2$*, qual será o valor de "*$-x^2$*"?*

Observe: $\boxed{-(2)^2 = -4}$*, pois o sinal negativo não está elevado ao quadrado.*

$-x^2 = -(2)^2 = -4 \quad \rightarrow$ os parênteses devem ser usados, porque o sinal negativo "-" não deve ser elevado ao quadrado, somente o número 2 que é o valor de x.

2. Propriedades da Potenciação

Quadro Resumo das Propriedades

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

A seguir apresentamos alguns exemplos para ilustrar o uso das propriedades:

a) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ Nesta propriedade vemos que quando tivermos multiplicação de potencias de bases iguais temos que conservar a base e somar os expoentes.

Ex. 1.: $2^x \cdot 2^2 = 2^{x+2}$

Ex. 2.: $a^4 \cdot a^7 = a^{4+7} = a^{11}$

Ex. 3.: $4^2 \cdot 3^4 \rightarrow$ neste caso devemos primeiramente resolver as potências para depois multiplicar os resultados, pois as bases 4 e 3 são diferentes.

$$4^2 \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296$$

Obs.: Devemos lembrar que esta propriedade é válida nos dois sentidos. Assim: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ **ou** $\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$ **Exemplo:**

$$a^{7+n} = a^7 \cdot a^n$$

b) $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ Nesta propriedade vemos que quando tivermos divisão de potencias de bases iguais temos que conservar a base e subtrair os expoentes.

Ex. 1: $\dfrac{3^4}{3^x} = 3^{4-x}$

Ex. 2: $\dfrac{a^4}{a^5} = a^{4-5} = a^{-1}$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja

$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ **ou** $\boxed{a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}}$

Exemplo: $a^{4-x} = \frac{a^4}{a^x}$

c) $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ **Nesta propriedade temos uma potencia elevada a um outro expoente, para resolver temos que conservar a base e multiplicar os expoentes .**

d)

Ex. 1: $(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$

Ex. 2: $(b^x)^4 = b^{x \cdot 4} = b^{4 \cdot x}$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja

$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ **ou** $\boxed{a^{m \cdot n} = (a^m)^n}$

Ex.: $3^{4x} = (3^4)^x$ *ou* $(3^x)^4$

d) $\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}}$ **Esta propriedade nos mostra que todo radical pode se transformado numa potencia de expoente fracionário, onde o índice da raiz é o denominador do expoente.**

Ex. 1: $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{1/2}$

Ex. 2: $\sqrt[3]{x^7} = x^{7/3}$

Ex. 3: $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

Ex. 4: $x^{8/3} = \sqrt[3]{x^8}$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja

$\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}}$ **ou** $\boxed{a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}}$

Ex.: $a^{5/2} = \sqrt{a^5}$

e) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ com } b \neq 0}$

Ex. 1: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

Ex. 2: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja

$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$ *ou* $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$ **Ex.:**

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2^{1/2}}{3^{1/2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

f) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Ex. 1: $(x \cdot a)^2 = x^2 \cdot a^2$

Ex. 2: $(4x)^3 = 4^3 \cdot x^3 = 64x^3$

Ex. 3:

$$(3\sqrt{x})^4 = 3^4 \cdot (\sqrt{x})^4 = 3^4 \cdot \left(x^{1/2}\right)^4 = 3^4 \cdot x^{4/2} =$$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja

$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ *ou* $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$ **Ex.:**

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = x^{1/2} \cdot y^{1/2} = (x \cdot y)^{1/2} = \sqrt{x \cdot y}$$

g) $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

Ex. 1: $a^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 = \frac{1^3}{a^3} = \frac{1}{a^3}$

Ex. 2: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$

Ex. 3: $(-4)^{-1} = \left(-\frac{1}{4}\right)^1 = -\frac{1}{4}$

Obs.:Esta propriedade também é válida nos dois sentidos, ou seja $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ **ou** $\boxed{\frac{1}{a^n} = a^{-n}}$

Ex.: **a)** $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

b) $\frac{2}{3x^3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{2}{3} \cdot x^{-3}$

CUIDADO !!!

- $(-2)^{-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} = \frac{(-1)^3}{(2)^3} = \frac{-1}{8}$
- $(3)^{-3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3} = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$
- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3} = \left(\frac{a}{1}\right)^{3} = \frac{a^3}{1^3} = a^3$

Obs.: É importante colocar que nos três exemplos acima o sinal negativo do expoente não interferiu no sinal do resultado final, pois esta não é a sua função.

Exemplos mais complexos:

(1) $\frac{(4xy^3)^{-1}}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{4xy^3}\right)^1}{x^2} = \frac{\frac{1}{4xy^3}}{\frac{x^2}{1}} = \frac{1}{4xy^3}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4x^3y^3}$

(2) $(x.y^3)^{-2} = \left(\frac{1}{xy^3}\right)^2 = \frac{1^2}{x^2.(y^3)^2} = \frac{1}{x^2.y^{3.2}} = \frac{1}{x^2.y^6}$

(3) $\left(\frac{1}{a^4.b^3}\right)^{-3} = \left(\frac{a^4.b^3}{1}\right)^3 = \frac{(a^4)^3.(b^3)^3}{1^3} = \frac{a^{4.3}.b^{3.3}}{1} = a^{12}.b^9$

RADICIAÇÃO

A radiciação é a operação inversa da potenciação. De modo geral podemos escrever:

$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 1)$

Ex. 1: $\sqrt{4} = 2$ *pois* $2^2 = 4$

Ex. 2: $\sqrt[3]{8} = 2$ *pois* $2^3 = 8$

Na raiz $\sqrt[n]{a}$, temos:

- **O número n é chamado** índice;
- **O número a é chamado** radicando.

Propriedades dos radicais

Essa propriedade mostra que todo radical pode ser escrito na forma de uma potência.

a) $\boxed{\sqrt[n]{a^p} \iff a^{p/n}}$

Ex. 1: $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$

Ex. 2: $\sqrt{4^3} = 4^{3/2}$

Ex. 3: $\sqrt[5]{6^2} = 6^{2/5}$

Obs.: é importante lembrar que esta propriedade também é muito usada no sentido contrário ou seja $a^{p/n} = \sqrt[n]{a^p}$ *(o denominador "n" do expoente fracionário é o índice do radical).*

Exemplo : $2^{3/5} = \sqrt[5]{2^3}$ *.*

b) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a}$ **Ex.:**

$\sqrt[3]{2^3} = 2^{3/3} = 2^1 = 2$

c) $\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$ **Ex.:**

$\sqrt[3]{a^3\cdot b^6} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6} = a^{3/3}\cdot b^{6/3} = a\cdot b^2$

d) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$ **Ex.:**

$\sqrt{\frac{a^6}{b^5}} = \frac{\sqrt{a^6}}{\sqrt{b^5}} = \frac{a^{6/2}}{b^{5/2}} = \frac{a^3}{b^{5/2}}$ *ou* $\frac{a^3}{\sqrt{b^5}}$

e) $\boxed{(\sqrt[n]{b})^m = \left(b^{1/n}\right)^m = b^{\frac{1}{n}\cdot m} = b^{\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{1}} = b^{\frac{m}{n}}}$

Ex.: $(\sqrt{5})^3 = \left(5^{1/2}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 3} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}} = 5^{3/2}$

f) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$ **Ex.:** $\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[3\cdot 2]{3} = \sqrt[6]{3}$

RAÍZES NUMÉRICAS

Exemplos:

a) $\sqrt{144} \quad = \quad \sqrt{2^4 \cdot 3^2} \quad =$

$\sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^2} \quad =$

$2^{4/2} \cdot 3^{2/2} \quad =$

$2^2 \cdot 3^1 \quad = \quad 4 \cdot 3 \quad = 12$

$$\begin{array}{r|l}
144 & 2 \\
72 & 2 \\
36 & 2 \\
18 & 2 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 & 2^4 \cdot 3^2 = 144
\end{array}$$

b) $\sqrt[3]{243} \quad = \quad \sqrt[3]{3^5} \quad = \quad \sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2} \quad =$

$\sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \quad =$

$3^{3/3} \cdot 3^{2/3}$

$\boxed{3 \cdot 3^{2/3}}$

ou

$\boxed{3 \cdot \sqrt[3]{3^2}}$

ou

$\boxed{3 \cdot \sqrt[3]{9}}$

Resultados
possíveis

$$\begin{array}{r|l}
243 & 3 \\
81 & 3 \\
27 & 3 \\
9 & 3 \\
3 & 3 \\
1 & \underbrace{3^5}_{\textbf{Forma}} = 243
\end{array}$$

Obs.: Nem sempre chegaremos a eliminar o radical.

Expressões numéricas

Em uma expressão numérica, resolvemos em primeiro lugar as potencias e raízes e depois as multiplicações e divisões na ordem em que elas aparecem, da esquerda para a direita, depois resolvemos as adições e subtrações também na ordem em que elas aparecem, da esquerda para a direita, eliminando parênteses, colchetes e por último as chaves, fazendo os cálculos dentro de cada um.

Observe como podemos resolver as expressões numéricas:

Exemplo:

$$(-15)+(+21)-(-15)-(+6)-(-8)$$

Exemplo: $-23-7+17+6-4+7=$

Exemplo: $(-2+4)^2 - 5 \cdot \left(\sqrt{16}+\sqrt{4}\right)$

Exemplo: $(6 - 1{,}07) \times 3{,}1$

Exemplo: $(0{,}05 : 0{,}005) : 0{,}5$

Exemplo: $(0{,}8 - 0{,}15 : 0{,}3)^3 : 5{,}4 + (0{,}5)^2$

Exemplo:

$0{,}2^2 - (0{,}1)^{-1} - 2^{-2} + \sqrt{100}$

$(0{,}1)^{-1} - \sqrt{100} - (-2)^{-1} - 0{,}2^2$

Temos que:

$0{,}2^2 = 0{,}04$

$(0{,}1)^{-1} = (10^{-1})^{-1} = 10^1$

$2^{-2} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$

$\sqrt{100} = 10$

$(-2)^{-1} = -\dfrac{1}{2}$

Assim:

$0{,}2^2 - (0{,}1)^{-1} - 2^{-2} + \sqrt{100} = 0{,}04 - 10 - 0{,}25 + 10 = -0{,}21$

$(0{,}1)^{-1} - \sqrt{100} - (-2)^{-1} - 0{,}2^2 = 10 - 10 + 0{,}5 - 0{,}04 = 0{,}46$

Exemplo: Qual é o valor de $\dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{400}} - \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{80}}}{2^{-1} : 10^{-2}}$?

Temos que:

$\sqrt{400} = 20$

$\sqrt{20} = \sqrt{2^2} \, . \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{80} = \sqrt{2^4} \, . \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

$10^{-2} = \dfrac{1}{100}$

Assim:

$$\frac{\dfrac{2}{\sqrt{400}} - \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{80}}}{2^{-1} : 10^{-2}} = \frac{\dfrac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{20}_{10}} - \dfrac{{}^{1}\cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}}{{}_{2}\cancel{4}\cancel{\sqrt{5}}}}{\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{100}} = \frac{\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} \, . \, \dfrac{100}{1}} =$$

$$\frac{-\dfrac{4}{10}}{\dfrac{50}{1}} = \left(-\frac{\overset{2}{4}}{\underset{5}{10}}\right) . \frac{1}{50} = \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{5}\right) . \frac{1}{\underset{25}{\cancel{50}}} = -\frac{1}{125}$$

Exemplo:

35 ÷ [(14 – 2 x 5) + 1] =

35 ÷ [(14 – 10) + 1] =

35 ÷ [4 + 1] =

35 ÷ 5= 7

Exemplo:

40 – [25 + (2^3 - 7)] =

= 40 – [25+ (8 - 7)]

= 40 – [25 + 1]=
= 40 – 26 =
= 14

Exemplo:
$[\, 4^2 + (5 - 3)^3] : (9 - 7)^3$

Exemplo:
$65 - \{ 30 - [20 - (10 - 1 + 6) + 1]\}$

Exemplo:
$2 \cdot 9 + 5^3 - \sqrt{64}$

RAÍZES LITERAIS

a) $\sqrt{x^9} = x^{\frac{9}{2}}$

Escrever o radical $\sqrt{x^9}$ na forma de expoente fracionário $x^{\frac{9}{2}}$ não resolve o problema, pois nove não é divisível por 2. Assim decomporemos o número 9 da seguinte forma:

9 = 8 + 1, pois 8 é divisível por 2 que é o índice da raiz.
Assim teremos:

$$\sqrt{x^9} = \sqrt{x^{8+1}} = \sqrt{x^8 \cdot x^1} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{x} = x^{8/2} \cdot \sqrt{x} = x^4 \cdot \sqrt{x}$$

b) $\sqrt[3]{x^{14}} = \sqrt[3]{x^{12+2}}$ **pois 12 é divisível por 3 (índice da raiz).**

$$= \sqrt[3]{x^{12} \cdot x^2}$$
$$= \sqrt[3]{x^{12}} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$
$$= x^{12/3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$
$$= x^4 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

Outros Exemplos:

a) $\sqrt[3]{27.x^6} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^6}$

27	3
9	3
3	$\cancel{3}$
1	$3^3 = 27$

$$= \sqrt[3]{3^3} \cdot x^{6/3} \quad \text{(pois 6 é divisível por 3)}$$
$$= 3^{3/3} \cdot x^2$$
$$= 3^1 \cdot x^2$$
$$= 3x^2$$

b) $\sqrt[3]{48 \cdot x^4 \cdot y^6} = \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt[3]{y^6}$

$$= \sqrt[3]{2^3.6} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x^{3+1}}}_{\text{pois 4 não é divisível por 3}} \cdot y^{6/3}$$
$$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{x^3 \cdot x} \cdot y^2$$
$$= 2 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y^2$$
$$= 2 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot x \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y^2$$
$$= 2xy^2 \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{x}$$
$$= 2xy^2 \cdot \sqrt[3]{6x}$$

OPERAÇÕES COM RADICAIS

Adição e Subtração

Exemplos:

1) $\sqrt{3}+4\sqrt{3}-2\sqrt{3} = (1+4-2)\cdot\sqrt{3} = 1\sqrt{3} = \sqrt{3}$

2) $2\sqrt[5]{3}+3\sqrt[5]{3}-2\sqrt[5]{3} = \underbrace{(2+3-2)}_{\text{fatores externos}}\cdot\sqrt[5]{3} = 3\sqrt[5]{3}$

Obs.: Podemos dizer que estamos colocando em evidência os radicais que apareceram em todos os termos da soma.

3) $4\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{5}-6\sqrt{5} = (4-2)\sqrt{2}+(3-6)\sqrt{5} = \underbrace{2\sqrt{2}-3\sqrt{5}}_{\text{não pode ser mais reduzida}}$

4) $3\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}-4 = (3-5)\cdot\sqrt{2}+(7-4) = -2\sqrt{2}+3$

MULTIPLICAÇÃO

Temos 4 casos básicos para a multiplicação de radicais, a seguir veremos cada um:

1° CASO: Radicais têm raízes exatas.
Neste caso basta extrair a raiz e multiplicar os resultados:
Exemplo:

$$\sqrt{16}\cdot\sqrt[3]{-8} = 4\cdot(-2) = -8$$

2° CASO: Radicais têm o mesmo índice.

Devemos conservar o índice e multiplicar os radicandos, simplificando sempre que possível o resultado obtido.

Exemplos: **a)**

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} = \sqrt{3\cdot5} = \sqrt{15}$$

b)

$$\sqrt[3]{x\cdot y}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y^4} = \sqrt[3]{x\cdot y\cdot x^2\cdot y^4}$$

$$= \boxed{\sqrt[3]{x^3\cdot y^5}}$$ **pode parar aqui!**

c)

$$2\sqrt{2}\cdot3\sqrt{5} = 2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5} = 6\sqrt{2\cdot5} = 6\sqrt{10}$$

3° CASO: **Radicais têm índices diferentes.**

O caminho mais fácil é transformar os radicais em potências fracionárias. Logo em seguida, transformar os expoentes fracionários em frações equivalentes (com mesmo denominador).

Exemplos:

a)

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{2} = 3^{\frac{1}{2}}\cdot2^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1\cdot2}{2\cdot2}}\cdot2^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{4}}\cdot2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt[4]{2^1} = \sqrt[4]{3^2\cdot2} = \sqrt[4]{18}$$

b)

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{x} = a^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1\cdot4}{3\cdot4}}\cdot x^{\frac{1\cdot3}{4\cdot3}} = a^{\frac{4}{12}}\cdot x^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{a^4}\cdot\sqrt[12]{x^3} = \sqrt[12]{a^4\cdot x^3}$$

ATENÇÃO:

- $\sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, *ou seja, raiz de 2 mais raiz de dois é igual a* *<u>duas</u>* *raízes de dois.*

- $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ *por que?*

  $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = (2)$

Divisão

A divisão de radicais tem 3 casos básicos, a seguir veremos cada um deles:

1° CASO: **Os radicais têm raízes exatas.**

Nesse caso, extraímos as raízes e dividimos os resultados.

Exemplo: $\sqrt{81}:\sqrt[3]{27} = 9:3 = 3$

2° CASO: **Radicais têm o mesmo índice.**

Devemos conservar o índice e dividir os radicandos.

Como os ín
iguais, poder
raíze

Exemplos:

$$\sqrt{x^3}:\sqrt{xy} = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{xy}} = \sqrt{\frac{x^3}{xy}} = \sqrt{\frac{x^2}{y}}$$

$$\sqrt[3]{20} : \sqrt[3]{10} = \frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[3]{\frac{20}{10}} = \sqrt[3]{2}$$

3° CASO: **Radicais com índices diferentes.**
O caminho mais fácil é transformar os radicais em potências fracionárias, efetuar as operações de potências de mesma base e voltar para a forma de radical .
Exemplo:

$$\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3-2}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalizar uma fração cujo denominador é um número irracional, significa achar uma fração equivalente à ela com denominador racional. Vejamos alguns exemplos:

1) Temos no denominador apenas raiz quadrada:

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

2) Temos no denominador raízes com índices maiores que 2:

(a) $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ Temos que multiplicar numerador e denominador por $\sqrt[3]{x^2}$, pois 1 + 2 = 3.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^1 \cdot x^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^{1+2}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}{x}$$

(b) $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ Temos que multiplicar numerador e denominador por $\sqrt[5]{x^3}$, pois 2 + 3 = 5.

$$\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^2 \cdot x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^{2+3}}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$$

c) No denominador soma ou subtração de radicais:

$$\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{2}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3} = \frac{\cancel{2}\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\cancel{4}}$$

I. POLINÔMIOS

1) DEFINIÇÃO: Polinômios são qualquer adição algébrica de monômios.

MONÔMIOS: toda expressão algébrica inteira representada por um número ou apenas por uma variável, ou por uma multiplicação de números e variáveis.

Exemplos:

a) $5m$

b) p^2

c) $2xy$

d) my

Os monômios que formam os polinômios são chamados de termos dos polinômios.

Obs. 1: *O monômio* $\boldsymbol{4ay}$ *é um polinômio de um termo só.*

Obs. 2: $\boldsymbol{2x+4y}$ *é um polinômio de 2 termos:* $\boldsymbol{2x}$ *e* $\boldsymbol{4y}$ *.*

Obs. 3: $\boldsymbol{2x-ab+4}$ *é um polinômio de 3 termos:* $\boldsymbol{2x}$ *,* $\boldsymbol{-ab}$ *e 4.*

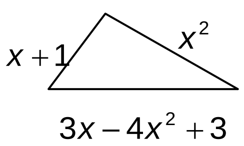
2) OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

2.1. Adição Algébrica de Polinômios

Para somarmos 2 ou mais polinômios, somamos apenas os termos semelhantes.

Exemplo:

a) Obter o perímetro do triângulo abaixo:



Como *perímetro* é a soma dos lados, teremos:

$$(x+1) \;+\; (x^2) \;+\; (3x-4x^2+3) \;=$$

termos semelhantes

$$\underbrace{x+1+x^2}\!+3x-4x^2+3 \;=$$

termos semelhantes

$$\underbrace{x+3x} \;+\; \underbrace{x^2-4x^2} \;+\; \underbrace{1+3} \;=$$

$$\boxed{4x \;-\; 3x^2 \;+\; 4}$$

o resultado é um polinômio.

b) $(x^2-4xy-4) \;-\; (3x^2+xy+2) \;+\; (xy) \;=$

$$x^2-4xy-4-3x^2-xy-2+xy$$

$$\underbrace{x^2-3x^2} \;\; \underbrace{-4xy-xy+xy} \;\; \underbrace{-4-2} \;=$$

$$\boxed{-2x^2 \;-\; 4xy \;-\; 6}$$

2.2. Multiplicação Algébrica de Polinômios

A multiplicação de um polinômio por outro polinômio deve ser feita multiplicando-se cada termo de um deles pelos termos do outro (propriedade distributiva) e reduzindo-se os termos semelhantes.

Exemplo:

a) $(x+2y)\cdot(x^2-x)$

$$= x\cdot x^2 \;-\; x\cdot x \;+\; 2y\cdot x^2 \;-\; 2y\cdot x$$

$$\boxed{= x^3 \;-\; x^2 \;+\; 2yx^2 \;-\; 2yx}$$

e fica assim.

b) $(2a+b)\cdot(3a-2b)$

$$= 2a\cdot 3a \;-\; 2a\cdot 2b \;+\; b\cdot 3a \;-\; b\cdot 2b$$

$$= 2\cdot 3\cdot a\cdot a \;-\; 2\cdot 2\cdot a\cdot b \;+\; 3\cdot b\cdot a \;-\; 2\cdot b\cdot b$$

$$= 6a^2 \;\underbrace{-\;4ab \;+\; 3ab}_{termos\ \ semelhantes} \;-\; 2b^2$$

$$\boxed{= 6a^2 \;-\; \underline{ab} \;-\; 2b^2}$$

c) $(xy-4x^2y)\cdot(3x^2y-y)=$

$$\underline{\underline{xy}}\cdot 3x^2y \;-\; \underline{\underline{xy}}\cdot y \;-\; \underline{4x^2y}\cdot 3x^2y \;+\; \underline{4x^2y}\cdot y \;=$$

$$3\cdot x\cdot x^2\cdot y\cdot y \;-\; xy^2 \;-\; 4\cdot 3\cdot x^2\cdot x^2\cdot y\cdot y \;+\; 4x^2y^2 \;=$$

$$\boxed{3x^3y^2 \;-\; xy^2 \;-\; 12x^4y^2 \;+\; 4x^2y^2}$$

não há termos semelhantes

Obs.: No item fatoração de polinômios veremos outras formas de apresentar esta resposta.

2.3. Divisão Algébrica de Polinômio

Divisão de um polinômio por um monômio

A divisão de um polinômio por um monômio deve ser feita dividindo-se <u>cada</u> termo do polinômio pelo monômio.

Exemplo:

a) $(10x^4-20x^3+15x^2)\div 5x^3 =$

$$= \frac{10x^4-20x^3+15x^2}{5x^3} \;=\; \frac{10x^4}{5x^3}-\frac{20x^3}{5x^3}+\frac{15x^2}{5x^3}$$

$$= \frac{10}{5}\cdot x^{4-3} \;-\; \frac{20}{5}\cdot x^{3-3} \;+\; \frac{15}{5}\cdot x^{2-3}$$

$$= 2x^1 \;-\; 4x^0 \;+\; 3x^{-1}$$

$$= 2x \;-\; 4\cdot 1 \;+\; 3x^{-1}$$

$$= 2x \;-\; 4\cdot 1 \;+\; 3\cdot\frac{1}{x^1}$$

$$= 2x \;-\; 4 \;+\; \frac{3}{x}$$

---

b) $(28x^4y^3-7x^3y^4)\div 7x^2y^2 =$

Como $7x^2y^2$ é mínimo múltiplo da fração, podemos separar em duas

$$= \frac{28x^4y^3-7x^3y^4}{7x^2y^2} \;=\; \frac{\cancel{28}x^4y^3}{\cancel{7}x^2y^2} \;-\; \frac{\cancel{7}x^3y^4}{\cancel{7}x^2y^2}$$

$$= 4\cdot x^{4-2}\cdot y^{3-2} \;-\; 1\cdot x^{3-2}\cdot y^{4-2}$$

$$= 4x^2y \;-\; 1\cdot x^1\cdot y^2$$

$$= 4x^2y \;-\; xy^2$$

II. PRODUTOS NOTÁVEIS

Regras

1) $(x+y)\cdot(x-y) \quad = \quad x^2 - y^2$

2) $(x \pm y)^2 \quad = \quad x^2 \pm 2xy + y^2$

3) $(x \pm y)^3 \quad = \quad x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

Pois:

a) $(x-y)\cdot(x+y) \quad = \quad x^2 + xy - y\cancel{x} - y^2 \quad = \quad \mathbf{x^2 - y^2}$

b) $(x+y)^2 \quad = \quad (x+y)\cdot(x+y) \quad = \quad x^2 + xy + xy + y^2 \quad = \quad \mathbf{x^2 + 2xy + y^2}$

$(x-y)^2 \quad = \quad (x-y)\cdot(x-y) \quad = \quad x^2 - xy - xy + y^2 \quad = \quad \mathbf{x^2 - 2xy + y^2}$

c) $(x+y)^3 \quad = \quad (x+y)\cdot(x+y)^2 \quad = \quad (x+y)\cdot(x^2 + 2xy + y^2) \quad =$

$= \quad x^3 + 2x^2y + xy^2 + yx^2 + 2xy^2 + y^3 \quad = \quad \mathbf{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}$

Como utilizaremos os produtos notáveis?

Exemplos para simplificações:

a) $$\frac{3x+3y}{x^2-y^2} \xrightarrow[\text{produto notável}]{} \frac{3(x+y)}{(x+y)\cdot(x-y)} = \frac{3}{(x-y)}$$

b) $(x+4)^2 \quad = \quad x^2 + 2.x.4 + 4^2 \quad = \quad x^2 + 8x + 16$

Obs.: $(x+4)^2$ *jamais será igual a* $x^2 + 16$*, basta lembrarmos que:*

$(x+4)^2 \quad = \quad (x+4)\cdot(x+4) \quad = \quad x^2 + x.4 + 4.x + 16 \quad = \quad x^2 + 8x + 16$

c) $(a-2)^3$ **jamais será** $a^3 - 8$**, pois:**

$(a-2)^3 \quad = \quad (a-2)\cdot(a-2)^2 \quad = \quad (a-2)\cdot(a^2 - 4a + 4) \quad =$

$$a^3 - 4a^2 + 4a - 2a^2 + 8a - 8 \quad = \quad a^3 - 6a^2 + 12a - 8$$

III. ALGUNS CASOS DE FATORAÇÃO DE POLINÔMIOS

A fatoração de polinômios será muito usada para simplificação de expressões algébricas e para obter o mínimo múltiplo comum (*m.m.c.)* de frações algébricas.

1. Fatoração pela colocação de algum fator em evidência

Exemplos:

Observemos que *b* é o fator comum, portanto,

a) $ab - b^2$

Então $ab - b^2 \quad = \quad b\ (a \ - \ b)$

Ao efetuarmos o produto $b \cdot (b - a)$**, voltaremos para a expressão inicial** $ab - b^2$**.**

b) $2ay + 4by$

Assim: $2ay + 4by \quad = \quad 2y\ (a \ + \ 2b)$

$$2ay \div 2y = \frac{2ay}{2y} = a$$

$$4by \div 2y = \frac{4by}{2y} = 2b$$

c) $4bx^3 - 16bx^2 - 8b^2x$

$$4bx^3 - 16bx^2 - 8b^2x \quad = \quad 2bx\ (2x^2 \ - \ 8x \ - \ 4b)$$

$$4bx^3 \div 2bx = \frac{4bx^3}{2bx} = 2x^2$$

$$-16bx^2 \div 2bx = \frac{-16bx^2}{2bx} = -8x$$

$$-8b^2x \div 2bx = \frac{-8b^2x}{2bx} = -4b$$

Obs.: As variáveis que aparecem em todos os termos do polinômio aparecerão no fator comum sempre com o menor expoente.

IV. Frações Algébricas

As frações que apresentam variável no denominador são chamadas de frações algébricas.

Exemplos: $\frac{2}{x}, \quad \frac{4t}{y^2}, \quad \frac{2m}{t}$

1. Adição e Subtração

Tanto na adição como na subtração de frações, devemos obter o *m.m.c.* dos denominadores.

Exemplos:

a) $\frac{3}{2x}+\frac{1}{4y}$ → ***m.m.c. dos***

4 é o *m.m.c.* de 2 e 4.
xy → todas as

$$\frac{3}{2x}+\frac{1}{4y} = \boxed{\frac{6y + x}{4xy}}$$

$4xy \div 4y = \frac{4xy}{4y} = x$

$x \cdot 1 = x$

$4xy \div 2x = \frac{4xy}{2x} = 2y$

$2y \cdot 3 = 6y$

---

b) $\frac{x^2}{y}+\frac{2}{3xy^2}-\frac{y}{8x^2}$

***M.m.c.* entre** $y, \quad 3xy^2 \quad e \quad 8x^2 \quad = 24x^2y^2$

24 é o *m.m.c.* entre 1, 3 e 8;

$$\frac{x^2}{y}+\frac{2}{3xy^2}-\frac{y}{8x^2} = \boxed{\frac{24x^4y^2 + 16x - 3y^3}{24x^2y^2}}$$

$24x^2y^2 \div y = \frac{24x^2y^2}{y} = 24x^2y$

$24x^2y^2 \bullet x^2 = 24x^4y^2$

$24x^2y^2 \div 3xy^2 = \frac{24x^2y^2}{3xy^2} = 8x$

$8x \bullet 2 = 16x$

$24x^2y^2 \div 8x^2 = \frac{24x^2y^2}{8x^2} = 3y^2$

$3y^2 \bullet y = 3y^3$

c) $$\frac{3}{3x-x^2}-\frac{x}{9-3x}$$

Fatorando os denominadores:

$3x-x^2=x(3-x)$

$9-3x=3(3-x)$

M.M.C. **dos denominadores fatorados** $x(3-x)$ **e** $3(3-x)$ **será:** $3x(3-x)$

$3x(3-x)\div x(3-x)=\dfrac{3x(3-x)}{x(3-x)}=3$

e temos que $3\bullet 3=9$

Assim $$\frac{3}{3x-x^2}-\frac{x}{9-3x}=\frac{3}{x(3-x)}-\frac{x}{3(3-x)}=\boxed{\frac{9-x^2}{3x(3-x)}}$$

$3x(3-x)\div 3(3-x)=\dfrac{3x(3-x)}{3(3-x)}=x$

e temos que $x\bullet x=x^2$

Mas ainda podemos melhorar o resultado:

$$\frac{9-x^2}{3x(3-x)}\xrightarrow{\text{produto notável}}\frac{(3-x)(3+x)}{3x(3-x)}=\frac{3+x}{3x}$$

---

d) $$\frac{a}{a-y}+\frac{a-y}{a^2-y^2}+\frac{1}{a+y}$$

Procuramos escrever os denominadores na forma fatorada:

$a^2-y^2=(a-y)(a+y)\rightarrow$ produto notável

Assim teremos:

$$\frac{a}{a-y}+\frac{a-y}{(a-y)(a+y)}+\frac{1}{a+y}=\frac{a}{a-y}+\frac{1}{a+y}+\frac{1}{a+y}=$$

m.m.c dos denominadores será $(a+y)(a-y)$

$$\frac{a(a+y)+a-y+a-y}{(a+y)(a-y)} = \frac{a^2+ay+2a-2y}{(a+y)(a-y)}$$

2. Multiplicação e divisão de frações algébricas

A multiplicação e divisão de frações algébricas é exatamente igual a de frações numéricas, ou seja não é necessário obter o mmc dos denominadores. Multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador.

Exemplos:

a) $\frac{2}{x}\cdot\frac{2y}{3}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{4y}{3xy^2} = \frac{4}{3xy}$

b) $\dfrac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2y}{3}} = \frac{4}{x}\cdot\frac{3}{x^2y} = \frac{12}{x^{1+2}\cdot y} = \frac{12}{x^3y}$

<u>Divisão de Polinômios:</u>

Esquema:

$$\begin{array}{l|l} \textit{dividendo} & \textit{divisor} \\ \hline \textit{resto} & \textit{quociente} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \textit{quociente} * \textit{divisor} + \textit{resto} = \textit{dividendo}$$

Vamos dividir um polinômio por um monômio, com o intuito de entendermos o processo operatório. Observe:

Exemplo 1:

$$\begin{array}{r|l} 12x^3+4x^2-8x & 4x \\ \cline{2-2} -12x^3 & 3x^2+x-2 \\ \hline 0x+4x^2 & \\ -4x^2 & \\ \hline 0x \ -8x & \\ +8x & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Caso queira verificar se a divisão está correta, basta multiplicar o quociente pelo divisor, com vistas a obter o dividendo como resultado.

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo

$4x * (3x^2 + x - 2) + 0$

$12x^3 + 4x^2 - 8x$

Caso isso ocorra, a divisão está correta. No exemplo a seguir, iremos dividir polinômio por polinômio. Veja:

Exemplo 2:

$$
\begin{array}{r|l}
10x^2 - 43x + 40 & 2x - 5 \\ \cline{2-2}
-10x^2 + 25x & 5x - 9 \\ \cline{1-1}
0x - 18x + 40 & \\
18x - 45 & \\ \cline{1-1}
-5 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo

$(2x - 5) * (5x - 9) + (-5)$

$10x^2 - 18x - 25x + 45 + (-5)$

$10x^2 - 43x + 45 - 5$

$10x^2 - 43x + 40$

Observe o exemplo de número 3:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5 & 2x^2 - 4x + 5 \\ \cline{2-2}
-6x^4 + 12x^3 - 15x^2 & 3x^2 + x - 1 \\ \cline{1-1}
0x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 5 & \\
-2x^3 + 4x^2 - 5x & \\ \cline{1-1}
0x^3 - 2x^2 + 4x - 5 & \\
2x^2 - 4x + 5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Verificando → quociente * divisor + resto = dividendo

$(3x^2 + x - 1) * (2x^2 - 4x + 5) + 0$

$6x4 - 12x^3 + 15x^2 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 5$

$6x4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5$

Exemplo 4:

$$
\begin{array}{rl}
12x^3 - 19x^2 + 15x - 3 & \underline{|\ 3x^2 - x + 2} \\
\underline{-12x^3 + 4x^2 - 8x} & \ 4x - 5 \\
0x^3 - 15x^2 + 7x - 3 & \\
\underline{+15x^2 - 5x + 10} & \\
2x + 7 &
\end{array}
$$

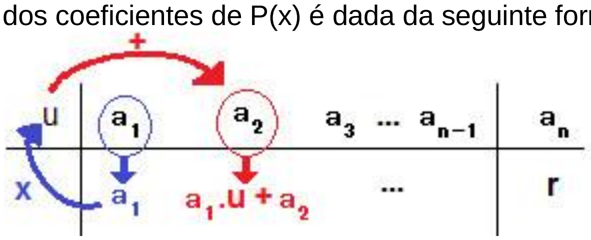
Para verificar → quociente * divisor + resto = dividendo

<u>**Usando-** Briout Rufini</u>

Para utilizar o dispositivo prático de Briot-Ruffini, precisamos primeiramente analisar o polinômio do divisor e encontrar sua raiz. Em seguida, devemos identificar todos os coeficientes numéricos do polinômio do dividendo. Vamos considerar a divisão entre os polinômios **P(x)** e **Q(x)**, em que **$P(x) = a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + ... + a_{n-1}x^1 + a^n$** e **$Q(x) = x – u$**. A raiz do polinômio Q(x) é dada quando ele é igualado a zero. Portanto, a raiz de Q(x) é:

$$Q(x) = 0$$
$$x – u = 0$$
$$x = u$$

Os coeficientes de P(x) são **$a_1, a_2, a_3, …, a_{n-1}, a_n$.** A montagem do dispositivo de Briot-Ruffini a partir da raiz de Q(x) e dos coeficientes de P(x) é dada da seguinte forma:



Método de utilização do dispositivo prático de Briot-Ruffini

.

Vejamos como fazer a divisão de polinômios P(x) por Q(x) quando **$P(x) = 5x^3 – 2x^2 + 3x – 1$** e **$Q(x) = x – 2$**. Primeiramente, vamos verificar a raiz de Q(x):

$$Q(x) = 0$$
$$x – 2 = 0$$
$$x = 2$$

Vamos montar o dispositivo de Briot-Ruffini através da raiz de Q(x) e dos coeficientes de P(x):

2	5	-2	3	-1

O primeiro coeficiente de P(x) é o **5**. Nós podemos reescrevê-lo na linha inferior:

2	5	-2	3	-1
	5			

Agora nós multiplicamos o **5** por **2** e somamos o resultado com o segundo coeficiente de P(x), o número **– 2**, isto é, fazemos **5.2 + (– 2) = 8**. O resultado **8** deve ser escrito embaixo do coeficiente **– 2.**

2	5	-2	3	-1
	5	8		

Repetimos o processo, multiplicamos **8** por **2** e somamos com o terceiro coeficiente de P(x), o número **3**. O cálculo é dado por **8.2 + 3 = 19**. Escrevemos o resultado embaixo do coeficiente **3**.

2	5	-2	3	-1
	5	8	19	

Repetimos o procedimento pela última vez. Agora multiplicamos o **19** por 2 e somamos o resultado com **– 1**, ou seja, nós fazemos **19.2 + (– 1) = 37**. O resultado **37** é colocado embaixo de –**1** e é o **resto**de nossa divisão.

2	5	-2	3	-1
	5	8	19	37

O polinômio resultante dessa divisão é determinado pelos números **5, 8** e **19**. Estes são coeficientes desse polinômio. Como fora dito anteriormente, o último número (**19**) é acompanhado de $\mathbf{x^0}$**,** o **8** é acompanhado de $\mathbf{x^1}$, e o **5** é acompanhado de $\mathbf{x^2}$. Portanto, o polinômio resultante da divisão de $\mathbf{5x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$ por **x – 2** é $\mathbf{5x^2 + 8x + 19}$, e o resto da divisão é **r = 37**

Vejamos outro caso, vamos dividir o polinômio $\mathbf{P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 2x - 3}$ por **Q(x) = x + 3**. Aplicando a explicação do método, temos:

-3	3	5	-11	2	-3
-3	3	5	-11	2	-3
	3				
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4			
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1		
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1	-1	
-3	3	5	-11	2	-3
	3	-4	1	-1	0

A divisão de $\mathbf{P(x) = 3x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 2x - 3}$ por **Q(x) = x + 3** resulta no polinômio $\mathbf{3x^3 - 4x^2 + x - 1}$, e o resto é **0**.

Exercícios:

1) Efetue as operações indicadas:

a) $(2x^3 - 3x^2 + x - 1) + (5x^3 + 6x^2 - 7x + 3)$
b) $(- 8y^2 - 12y + 5) + (7y^2 - 8)$
c) $(2ax^3 - 5a^2x - 4by) + (5ax^3 + 7a^2x + 6by)$
d) $(a^2 - b^2) + (a^2 - 3b^2 - c) + (5c - 2b^2 - a^2)$
e) $(3y^2 - 2y - 6) - (7y^2 + 8y + 5)$
f) $(8x^3 - 4x^2 + 3x - 5) - (6x^3 - 7x^2 + 5x - 9)$
g) $(2x^3 - 3x + 1) - (- 4x^2 + 3)$
h) $(2x^3 - 5x^2 + 8x - 1) - (- 3x^3 + 5x^2 - 5x + 6)$
i) $(x^2 - 5xy + y^2) + (3x^2 - 7xy + 3y^2) - (4y^2 - x^2)$
j) $\left(ab^2 + 4a^2 - 5\right) - \left(\frac{1}{2}ab^2 - 3\right) + \left(ab^2 + 5a^2\right)$

k) $\left(\frac{2}{3}m^2 - \frac{1}{2}m + 1\right) + \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{2}{3}m - 1\right)$

l) $\left(\frac{1}{2}m - \frac{1}{3}mn + 2\right) + \left(mn + 1 - \frac{m}{2}\right)$

m) $\left(2ab^2 - \frac{1}{3}a^2b\right) - \left(\frac{3}{4}ab^2 - a^2b\right)$

2) Efetue as multiplicações:

a) $3y(4x^2 - 2x^3 - 7)$
b) $(x^4 - 3x^2 - 5x + 1)(-4x)$
c) $2x(y^2 + xy + 1)$
d) $4ab(a^2 + b^2 - ab)$
e) $4xy^2(4x + y + 1)$
f) $(-x^3 - x^2 + 2x + 1)\left(-\frac{1}{2}x\right)$
g) $(3ab - 6ab^2 + 5)\left(-\frac{5}{3}a\right)$
h) $(2x + 3)(5x - 1)$
i) $(4x^3 + 2x - 3)(5x^2 + x - 1)$
j) $(x^2 - 2x + 5)(x^3 - 3x^2 + 6)$

3) Calcule os seguintes quocientes:

a) $(6ax - 9bx - 15x) : 3x$
b) $(8a^2 - 4ac + 12a) : 4a$
c) $(27ab - 36bx - 36by) : (-9b)$
d) $(49an - 21n^2 - 91np) : 7n$
e) $(27a^2bc - 18acx^2 - 15ab^2c) : (-3ac)$
f) $(8x^5y + 4x^3y^2 - 6x^2y) : (4x^2y)$
g) $(12a^2x - 8abx + 20axy) : \left(\frac{4a}{3}\right)$
h) $\left(\frac{1}{2}abx - \frac{1}{3}aby + \frac{1}{4}abc\right) : \frac{ab}{6}$

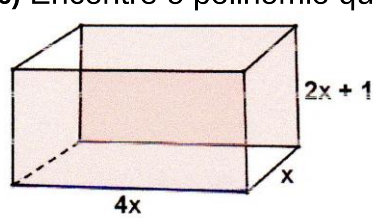
4) Determine o quociente e o resto das seguintes divisões:

a) $(4a^2 - 7a + 3) : (4a - 3)$
b) $(11x^2 - 2 - x + 10x^3) : (5x - 2)$
c) $(7x - 2x^4 + 3x^5 - 2 - 6x^2) : (3x - 2)$
d) $(x^3 - 2x^2 - 6x - 27) : (x^2 - 5x + 9)$
e) $(x^2 + 5x + 10) : (x + 2)$
f) $(10x - 9x^2 + 2x^3 - 2) : (x^2 + 1 - 3x)$
g) $(6x^3 - 16x^2 + 5x - 5) : (2x^2 + 1 - 4x)$
h) $(x^6 + 4x^3 + 2x - 8) : (x^4 + 2x^2 + 4)$

5) O quociente da divisão de $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ por $Q(x) = x - 3$ é: (por dispositivo de Briot-Ruffini)

a. $x - 3$
b. $x^3 - x^2 + 1$
c. $x^2 - 5x + 6$
d. $x^2 - 4x + 4$
e. $x^2 + 4x - 4$

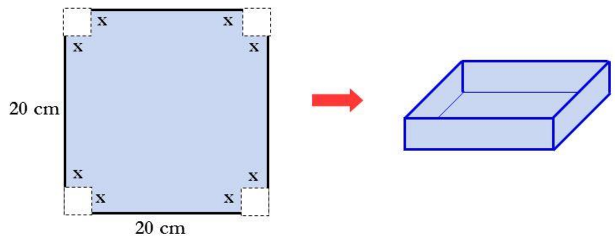
6) Encontre o polinomio que indicaria o volume da figura abaixo



7) Determine o polinômio que designa o volume dessa caixa.

Fabricante de caixas

- Uma empresa fabrica caixas de papelão. Para isso utiliza folhas quadradas de 20 cm de lado. O processo de fabricação aparece na figura.



RESPOSTAS:

1)
a) $7x^3+3x^2-6x+2$
b) $-y^2-12y-3$
c) $7ax^3+2a^2+2by$
d) a^2-6b^2+4c
e) $-4y^2-10y-11$
f) $2x^3+3x^2-2x+4$
g) $2x^3+4x^2-3x-2$
h) $5x^3-10x^2+13x-7$
i) $5x^2-12xy$
j)$3/2ab^2+9a^2-2$
k) $m^2/6+m/6$
l) $2/3mn+3$
m)$5/4ab^2+2/3a^2b$

2)
a) $-6x^3y+12x^2y-21y$
b) $-4x^5+12x^3+20x^2-4x$
c) $2xy^2+2x^2y+2x$
d) $4a^3b+4ab^3-4a^2b^2$
e) $16x^2y^2+4xy+4xy^2$
f) $x^4/2+x^3/2-x^2-x/2$
g) $-5a^2b+10a^2b^2-25/3a$
h) $10x^2+13x-3$
i) $20x^5+4x^4+6x^3-13x^2-5x+3$
j) $x^5-5x^4+11x^3-9x^2-12x+30$

3)
a) $2a-3b-5$
b) $2a-c+3$
c)$-3a+4x+4y$
d) $7a-3n-13p$
e)$-9ab+6x^2+5b^2$
f) $2x^3+xy-3/2$
g) $9ax-6bx+15xy$
h) $3x-2y+3/2\ c$

4)
a) $Q=a-1$ e $R=0$
b) $Q=2x^2+3x+1$ e $R=0$
c) $Q=x^4-2x+1$ e $R=0$
d) $Q=x+3$ e $R=-54$
e) $Q=x+3$ e $R=4$
f) $Q=2x-3$ e $R=-x+1$
g) $Q=3x-2$ e $R=-6x-3$
h) $Q=x^2-2$ e $R=4x^3+2x$

7) $4x^3-80x^2+400x$

Equações de 1º e segundo Graus

Exemplo 1:

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{x} + \frac{1}{5}$$

Para essa equação, em razão da presença do x no denominador, temos a restrição de que $x \neq 0$.
Para iniciarmos a resolução desse exemplo, devemos encontrar o mínimo múltiplo comum dos denominadores **2, 5** e **x**, que é **10x.** Vamos então dividir esse termo por cada denominador e multiplicá-lo pelo respectivo numerador:

$$\frac{3.5x}{10x} = \frac{10.5 + 2x.1}{10x}$$

Como os denominadores são iguais, podemos desconsiderá-los, ficando apenas com:

$$3.5x = 10.5 + 2x.1$$

Resolvendo a equação, temos:

$$15x = 50 + 2x$$
$$15x – 2x = 50$$
$$13x = 50$$
$$x = \frac{50}{13}$$

Portanto, o resultado da equação é $^{50}/_{13}$.

Exemplo 2:

$$\mathbf{\frac{2}{x} = \frac{x – 1}{x + 2}}$$

Nesse caso, os denominadores devem ser diferentes de zero, portanto, podemos dizer que:

$$x \neq 0 \text{ e } x \neq -2$$

Para resolver a equação fracionária, vamos encontrar o mínimo múltiplo comum entre os dois denominadores. Feito isso, vamos dividi-lo por cada denominador e multiplicá-lo pelo seu respectivo denominador:

$$\frac{2(x + 2)}{x(x + 2)} = \frac{x(x – 1)}{x(x +2)}$$

Como ambos os denominadores são iguais, podemos desconsiderá-los, ficando apenas com:

$$2(x + 2) = x(x – 1)$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$2x + 4 = x^2 – x$$

Colocando os termos em ordem de um mesmo lado da equação, teremos montada uma equação de segundo grau:

$$x^2 – 3x – 4 = 0$$

Essa equação possui coeficientes **a = 1**, **b = – 3** e **c = – 4**. Vamos resolver a equação através da fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{–b \pm \sqrt{[b^2 – 4ac]}}{2a}$$
$$x = \frac{–(–3) \pm \sqrt{[(–3)^2 – 4.1.(–4)]}}{2.1}$$
$$x = \frac{+3 \pm \sqrt{[9 + 16]}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$x' = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Portanto, os resultados possíveis são: **x = 4** e **x = – 1**.

Exemplo 3:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{x^2-4}$$

Vejamos para quais valores de x a equação não está definida:

$$x \neq 0$$
$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$
$$x+2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$
$$x^2 - 4 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 4 \rightarrow x \neq {}^2\sqrt{4} \rightarrow x \neq \pm 2$$

Vamos fatorar o último denominador a fim de facilitar nossos cálculos posteriores:

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$$

Agora é necessário encontrar o mínimo múltiplo comum dos denominadores e, em seguida, dividi-lo por cada denominador e multiplicá-lo pelo respectivo numerador:

$$\frac{2.(x+2).(x-2) + 1x.(x+2) + 2x.(x-2)}{x(x+2)(x-2)} = \frac{1x}{x(x+2)(x-2)}$$

Como os denominadores são iguais, podemos desconsiderá-los, restando apenas:

$$2.(x+2).(x-2) + 1x.(x+2) + 2x.(x-2) = 1x$$
$$2(x^2-4) +1x.(x+2) + 2x.(x-2) - x = 0$$

Aplicando a propriedade distributiva, temos:

$$2x^2 - 8 + x^2 + 2x + 2x^2 - 4x - x = 0$$

$$\mathbf{5x^2 - 3x - 8 = 0}$$

Para resolver essa equação do segundo grau, utilizaremos a fórmula de **Bhaskara,** lembrando que os coeficientes dessa equação são: **a = 3**, **b = – 3** e **c = – 8**.

$$\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{[b^2 - 4ac]}}{2a}}$$

Os resultados possíveis para x são: ________

Exercicios:

1)Em um retângulo, a área pode ser obtida multiplicando-se o comprimento pela largura. Em determinado retângulo que tem 54 cm² de área, o comprimento é expresso por (x – 1) cm, enquanto a largura é expressa por (x – 4) cm. Nessas condições, determine o valor de x.

2) A equação (x – 2)(x + 2) = 2x – 9:
a) admite duas raízes reais e iguais.
b) admite duas raízes reais e opostas.
c) admite apenas uma raiz.
d) não admite raízes reais.

3) Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius usa-se a fórmula $C = \frac{5(F-32)}{9}$, em que F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus Celsius.
Qual a temperatura (em graus Celsius) em que o número de graus Fahrenheit é o dobro do número de graus Celsius?

4) Resolva as equações:

a) $-3(3x-42)=2(7x-52)$ b) $\frac{x}{2}+\frac{1-x}{5}=\frac{1}{2}$ c) $\frac{x+3}{2}+\frac{x+2}{3}=\frac{-1}{2}$

d) $\frac{3+x}{2}-(1-x)=\frac{x-1}{4}$ e) $\frac{3x-1}{2}-\frac{4x+2}{4}-\frac{2x-4}{3}=\frac{x-5}{6}$

f) $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{3(1+x)}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x-1}{3}$

5) Determine as raízes reais das equações incompletas:
$x^2-5x=0$
$-x^2+12x=0$
$5x^2+x=0$
$x^2-9x=0$
$x^2-9=0$
$25x^2-1=0$
$x^2-64=0$
$x^2+16=0$
$-7x^2+28=0$
$(x-7)(x-3)+10x=30$
$2x(x+1)=x(x+5)+3(12-x)$

6) Resolva as equações completas no conjunto R:
$4x^2-4x+1=0$
$x^2-4x-12=0$
$x^2+6x+9=0$
$3x^2+4x+2=0$
$y^2-16y+64=0$
$6x^2-x-5=0$
$x^2-6x-16=0$

7-Resolva as equações fracionárias abaixo.

a) $\frac{a}{a+6}=\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{1}{x-3}+2=\frac{3}{x-3}$

c) $\frac{4}{x+2}-\frac{6}{x-2}=\frac{-2-5x}{x^2-4}$ **d)** $\frac{3}{2}-\frac{x+2}{3x}=-\frac{11}{6x}$

e) $\frac{4}{x}+\frac{3x}{x-2}=3$ **f)** $\frac{5}{x-3}-\frac{2}{x+3}=\frac{x}{x^2-9}$