MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

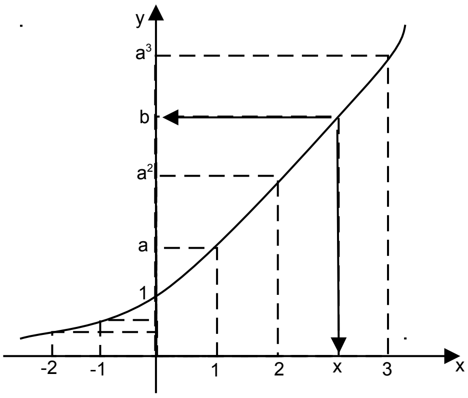
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICAS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SANTA CATARINA-CAMPUS ITAJAÍ

Professora: **Profª Roberta Nara Sodré de Souza**

LOGARITMOS

Retomando a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, observemos que sua imagem é o conjunto formado pelos números reais positivos:



De fato, o número real b está na imagem de f se existir x tal que $a^x = b$.

Para $b \leq 0$, a equação $a^x = b$ não tem solução.

Ex.: $2^x = -2$; $2^x = -1$; $2^x = -\frac{1}{2}$; $2^x = 0 \Rightarrow$ São equações que não tem solução real.

No estado de equações exponenciais, só tratamos de casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Entretanto, se tivermos de resolver uma equação como $2^x = 5$, não conseguiremos reduzir todas as potências à mesma base. Nesse caso, como $4 < 5 < 8$, então $4 < 2^x < 8$, ou seja $2^2 < 2^x < 2^3$, e apenas podemos garantir que $2 < x < 3$, como os estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de x nem como determiná-lo. Para enfrentar esse e outros problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

Definição: Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de (b) na base (a), o expoente (x) ao qual se deve elevar a base (a) de modo que a potência a^x seja igual a (b).

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na expressão $\log_a b = x$, temos:

a é a base do logaritmo;

b é o logaritmando;

x é o logaritmo;

Propriedades

a) Logaritmo do Produto:
$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

b) Logaritmo da Potência:
$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

c) Logaritmo da raiz:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

d) Logaritmo do quociente:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Obs.: $\log_b b = 1$ e $\log_b 1 = 0$ são conseqüência da definição.

EXERCÍCIOS

1. Se $\log_3 \frac{1}{27} = x$, calcule o valor de x.

Solução. Aplicando o conceito de logaritmo, temos: $3^x = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$**. Igualando o 1º membro e o último, temos:** $\boxed{3^x = 3^{-3} \Rightarrow x = -3.}$

2. Se log (2x -5) = 0, calcule o valor de x.

Solução. Lembrando que $\log_{10}$ = log e aplicando o conceito de logaritmo, temos:

$\boxed{2x - 5 = 10^0 \Rightarrow 2x - 5 = 1 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3.}$

3. Se $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases}$, calcule x + y.

Solução. Utilizando exponenciais e logaritmos, temos: $\begin{cases} 27^x = 9^y \\ \log_y x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3^3)^x = (3^2)^y \\ x = y^2 \end{cases}$. **Substituindo o valor de "x", vem:** $\begin{cases} (3^3)^x = (3^2)^y \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow (3^3)^{y^2} = (3^2)^y \Rightarrow 3y^2 = 2y$. **Resolvendo para "y",**

$$\boxed{\begin{array}{l} 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(3y-2) = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3} \to (y \neq 0). \\ x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow x + y = \frac{4}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4+6}{9} = \frac{10}{9}. \end{array}}$$

4. Calcule o valor numérico real da expressão $\dfrac{-(-3)^3 + \sqrt[3]{-27}}{2 + \log_3 81}$.

Solução. Se x = $\log_3 81$, então 3^x = 81= 3^4. Logo, x = 4. Reescrevendo a expressão, temos:

$$\boxed{\frac{-(-3)^3 + \sqrt[3]{-27}}{2 + \log_3 81} = \frac{-(-27) + \sqrt[3]{(-3)^3}}{2+4} = \frac{27 + (-3)}{6} = \frac{24}{6} = 4}.$$

5. Se x + y = 20 e x - y = 5 calcule $\log(x^2 - y^2)$.

Solução. Na fatoração, $(x^2 - y^2) = (x + y).(x - y)$. Aplicando a propriedade do produto de logaritmos, temos: $\boxed{\log(x^2 - y^2) = \log[(x+y).(x-y)] = \log[20.5] = \log 100 = \log 10^2}$.

Pela propriedade da potência, vem: $\boxed{\log(x^2 - y^2) = \log 10^2 = 2\log 10 = 2.1 = 2}$

6. O número real x, tal que $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2}$ é:

Solução. Aplicando o conceito de logaritmo, vem: $\log_x \frac{9}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{4} = x^{\frac{1}{2}}$. **Elevando ambos os termos ao quadrado, temos:** $\boxed{\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \Rightarrow \frac{81}{16} = x^{\frac{1}{2}.2} \Rightarrow x = \frac{81}{16}}$.

7. Se k = $\log_5(6 + \sqrt{35})$, calcule $5^k + 5^{-k}$.

Solução. Pelo conceito de logaritmo, se k = $\log_5(6 + \sqrt{35})$ então, $5^k = 6 + \sqrt{35}$. **Da mesma forma temos:**

$$\boxed{-k = -\log_5(6+\sqrt{35}) = \log_5(6+\sqrt{35})^{-1} \Rightarrow 5^{-k} = (6+\sqrt{35})^{-1} = \frac{1}{6+\sqrt{35}}}$$

Logo,

$$\boxed{5^k + 5^{-k} = (6+\sqrt{35}) + \frac{1}{6+\sqrt{35}} = \frac{(6+\sqrt{35})^2+1}{6+\sqrt{35}} = \frac{36+12\sqrt{35}+35+1}{6+\sqrt{35}} = \frac{12(6+\sqrt{35})}{6+\sqrt{35}} = 12}$$

8. Sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, calcule log 60.

Solução. Decompondo 60 em fatores primos, temos: 60 = 2^2 x 3 x 5. Aplicando as propriedades do logaritmo, e expressando $\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$ **calculamos:** $\boxed{\log 60 = \log(2^2.3.5) = 2\log 2 + \log 3 + \log 10 - \log 2 = \log 2 + \log 3 + 1.}$ **Substituindo os valores iniciais, encontramos:** $\boxed{\log 60 = \log 2 + \log 3 + 1 = 0{,}30 + 0{,}47 + 1 = 1{,}77.}$

9. Sendo log 2 = 0,301 e log 7 = 0,845, qual será o valor de log 28?

Solução. Decompondo 28 em fatores primos, temos: 28= 2^2 x 7. Aplicando as propriedades do logaritmo e substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\boxed{\log 28 = \log(2^2.7) = \log 2^2 + \log 7 = 2\log 2 + \log 7 = 2(0{,}301) + 0{,}845 = 1{,}447.}$$

10. Se $\log_2$ b - $\log_2$ a = 5, calcule o quociente $\frac{b}{a}$.

Solução. Aplicando a propriedade do quociente, vem: $\log_2 b - \log_2 a = \log_2\frac{b}{a} = 5$**. Logo, pela definição, temos:** $\boxed{\log_2\frac{b}{a} = 5 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2^5 = 32.}$

11. Dado o sistema $\begin{cases}\log x - \log y = \log 3\\ 3^{2(x-y)} = 81\end{cases}$ calcule x + y.

Solução. Utilizando propriedades, temos: $\begin{cases}\log x - \log y = \log 3\\ 3^{2(x-y)} = 81\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\log\frac{x}{y} = \log 3\\ 3^{2(x-y)} = 3^4\end{cases}$**. Igualando os logaritmandos da 1ª equação e os expoentes da 2ª, vem:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3 \Rightarrow x = 3y \\ 2(x-y) = 4 \Rightarrow 2(3y-y) = 4 \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

. Logo x = 3(1) =3. Então, x + y = 4.

12. Sendo log 2 = 0,30 e log 3 = 0,47, então $\log \frac{6\sqrt{2}}{5}$.

Solução. Aplicando as propriedades do logaritmo, e escrevendo expressando

$\boxed{\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2}$**,** $\boxed{\log 6 = \log(2.3) = \log 2 + \log 3}$ **e**

$\boxed{\log \sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 2}$ **temos:**

$$\boxed{\log \frac{6\sqrt{2}}{5} = \log 6\sqrt{2} - \log 5 = \log 6 + \log 2^{\frac{1}{2}} - \log \frac{10}{2} = \log 2 + \log 3 + \frac{1}{2}\log 2 - (\log 10 - \log 2)}$$

. Substituindo os valores iniciais, encontramos:

$$\boxed{\log \frac{6\sqrt{2}}{5} = 0{,}30 + 0{,}47 + (0{,}5)(0{,}30) - 1 + 0{,}30 = 0{,}30 + 0{,}47 + 1 = 0{,}22.}$$

13. Dado log 4 = 0,602, calcule o valor de log 32^5.

Solução. A informação sugere que escrevamos 32 = 4 x 8 = 4 x 4 x 2. Aplicando as propriedades, temos:

$$\boxed{\log 32^5 = 5\log(4.4.2) = 5[\log 4 + \log 4 + \log 2) = 5(0{,}602 + 0{,}602 + 0{,}301) = 5(1{,}505) = 7{,}525.}$$

14. Se log 2 = x e log 3 = y, calcule log 375.

Solução. Decompondo 375 em fatores primos, temos: 375= 3 x 5^3. Aplicando as propriedades do logaritmo, e expressando $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2$ **calculamos:**

$$\boxed{\log 375 = \log(3.5^3) = \log 3 + 3\log 5 = \log 3 + 3\log \frac{10}{2} = \log 3 + 3(\log 10 - \log 2).}$$

Substituindo os valores iniciais, encontramos: $\boxed{\log 375 = y + 3(1-x) = y - 3x + 3.}$

15. Calcule a expressão $\log_{\frac{1}{3}} 81$ + log 0,001 + log $\sqrt[3]{10}$.

Solução. Calculando cada termo separadamente, temos:

i) $\boxed{\log_{\frac{1}{3}} 81 = x \Rightarrow 81 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^4 = \left(3^{-1}\right)^x \Rightarrow 3^4 = 3^{-x} \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4.}$

ii) $\boxed{\log 0{,}001 = x \Rightarrow 0{,}001 = (10)^x \Rightarrow \frac{1}{1000} = (10)^x \Rightarrow (10)^{-3} = (10)^x \Rightarrow x = -3.}$

iii) $\boxed{\log \sqrt[3]{10} = x \Rightarrow \sqrt[3]{10} = (10)^x \Rightarrow (10)^{\frac{1}{3}} = (10)^x \Rightarrow x = \frac{1}{3}.}$

Substituindo, temos: $\log_{\frac{1}{3}} 81$ + log 0,001 + log $\sqrt[3]{10}$ = $\boxed{-4-3+\frac{1}{3} = \frac{-12-9+1}{3} = \frac{-20}{3}.}$

16. Calcule a expressão log $\frac{2}{3}$ + log $\frac{3}{4}$ + log $\frac{4}{5}$ - log $\frac{14}{55}$.

Solução. Expressando cada termo de acordo com as propriedades, temos:

i) $\boxed{\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3.}$

ii) $\boxed{\log \frac{3}{4} = \log 3 - \log 4 = \log 3 - \log 2^2 = \log 3 - 2\log 2.}$

iii) $\boxed{\log \frac{4}{5} = \log 4 - \log 5 = \log 2^2 - \log \frac{10}{2} = 2\log 2 - \log 10 + \log 2 = 3\log 2 - 1.}$

iv)
$$\boxed{\begin{aligned}&\log \frac{14}{55} = \log 14 - \log 55 = \log(2.7) - \log(5.11) = \log 2 + \log 7 - \log \frac{10}{2} - \log 11 = \\ &= \log 2 + \log 7 - \log 10 + \log 2 - \log 11 = 2\log 2 - 1 + \log 7 - \log 11\end{aligned}}$$

Substituindo na soma dos três primeiros termos, temos:

log $\frac{2}{3}$ **+ log** $\frac{3}{4}$ **+ log** $\frac{4}{5}$ **=** $\boxed{\log 2 - \log 3 + \log 3 - 2\log 2 + 3\log 2 - 1 = 2\log 2 - 1}$

Resolvendo a subtração, vem:

$$\boxed{\begin{aligned}&2\log 2 - 1 - (2\log 2 - 1 + \log 7 - \log 11) = 2\log 2 - 1 - 2\log 2 + 1 - \log 7 + \log 11 \\ &- \log 7 + \log 11 = -(\log 7 - \log 11) = -\log \frac{7}{11} = \log\left(\frac{7}{11}\right)^{-1} = \log \frac{11}{7}.\end{aligned}}$$

17. A quantidade de um determinado tipo de infração de transitivo vem aumentando 8% ao mês. Se essa taxa não se alterar nos próximos meses, o número dessas infrações será igual ao dobro do que é hoje, em, no mínimo.

Use: log 1,08 = 0,033

Log 2 = 0,301

(a) 8 meses
(b) 10 meses
(c) 12 meses
(d) 14 meses

18) (UEL-PR) Um empresário comprou um apartamento com intenção de investir seu dinheiro. Sabendo-se que este imóvel valorizou 12% ao ano, é correto afirmar que seu valor duplicou em, aproximadamente:

(dados: log 2 = 0,30 e log 7 = 0,84)

a)3 anos
b)4 anos e 3 meses
c)5 anos
d)6 anos e 7 meses
e)7 anos e 6 meses

19-(IBMEC-01) Próxima da superfície terrestre, a pressão atmosférica (P), dada em atm, varia aproximadamente conforme o modelo matemático: $P = P_0(0{,}9)^h$, onde P_0 = 1 (atm) e h é altura dada em quilômetros. Então, a altura de uma montanha onde a pressão atmosférica no seu topo é de 0,3 (atm) tem valor igual a: Dado: log3 = 0,48

a) 11 (km) b) 14 (km) c) 12 (km) d) 15 (km) e) 13 (km)

20-(PUC-02) Um laboratório iniciou a produção de certo tipo de vacina com um lote de x doses. Se o planejado é que o número de doses produzidas dobre a cada ano, após quanto tempo esse número passará aser igual a 10 vezes o incial? (Use: log 2 = 0,30)

a) 1 ano e 8 meses b)2anos e 3 meses c) 2 anos e 6 meses d) 3 anos e 2 meses

e) 3 anos e 4 meses

21-(PUC-00) A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial $P = P_0.e^{\frac{1}{250}}$ na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de t_0 = 0; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: ln 2 = 0,693)

a) 336 b) 338 c) 340 d) 342 e) 346

22-(VUNESP-02-BIO) Numa experiência para se obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se num recipiente uma certa quantidade de água do mar e expôs-se o recipiente a uma fonte de calor para que a água evapore lentamente. A experiência termina quando toda a água se evaporar. Em cada instante t, a quantidade de água existente no recipiente (em litros) é dada pela expressão: $Q(t) = \log_{10}\left(\frac{10^k}{t+1}\right)$ com k uma constante positiva e t em horas.

a) Sabendo que havia inicialmente 1 litro de água no recipiente, determine a constante k.

b) Ao fim de quanto tempo a experiência terminará?

GABARITO

18) E 19)E 20)E 21)E 22) a)1 b)9 horas