

Resistência dos Materiais I

Material elaborado pelo Prof. MSc Eng Halley Dias

Instituto Federal de Educação Ciéncia e Tecnologia
de Santa Catarina

Aplicado ao Curso Técnico de Eletromecânica

versão 2009_1



“As engenheiras preocupam-se em criar aquilo que não existe na natureza e em enriquecer a vida das pessoas resolvendo os problemas com os quais a sociedade moderna se defronta. De fato, um técnico é alguém que resolve problemas. Para ser um técnico bem sucedido, você deve desenvolver a compreensão exaustiva dos princípios físicos e matemáticos e suas aplicações no mundo ao seu redor.” (adaptado de Boresi, 2003)

Conceitos Fundamentais

da Mecânica Clássica

“Mecânica é a ciéncia que estuda o movimento de corpos sob ação de forças. Estática é o estudo de sistemas sem movimento ou que se movem com velocidade constante. A cinemática está relacionada com as taxas de variação de grandezas geométricas em um sistema em movimento, não envolvendo o conceito de força. A cinética estuda as causas e a natureza do movimento resultante da aplicação de forças específicas. A cinemática e a cinética juntas formam o campo da dinâmica” (Boresi, 2003)

Origens da Mecânica

“As origens da ciência da mecânica se perdem na antiguidade. No entanto, muitos historiadores associam o nascimento da mecânica com a pesquisa do matemático grego Arquimedes (287-212 a.C.), que desenvolveu princípios para a análise de forças paralelas e os aplicou à estática de alavancas simples, aos sistemas de polias, aos corpos flutuantes e ao centro de gravidade dos corpos.” (Boresi, 2003)

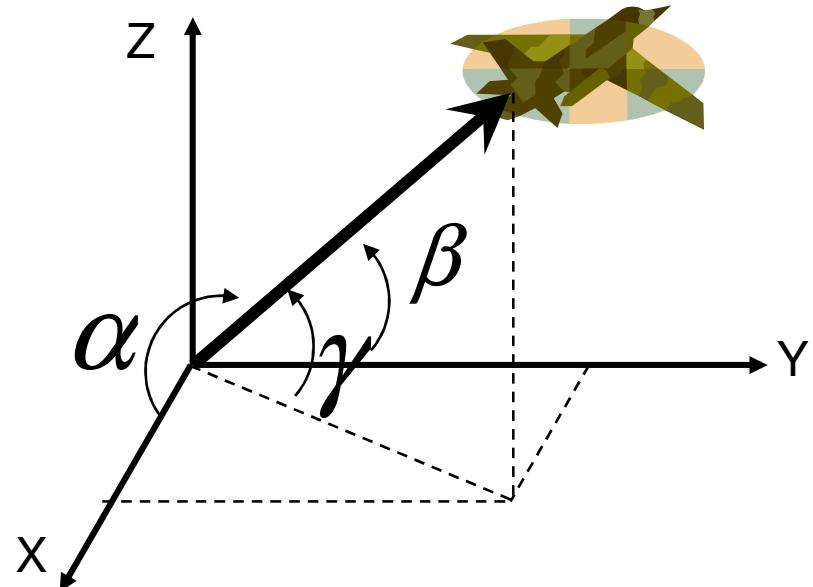
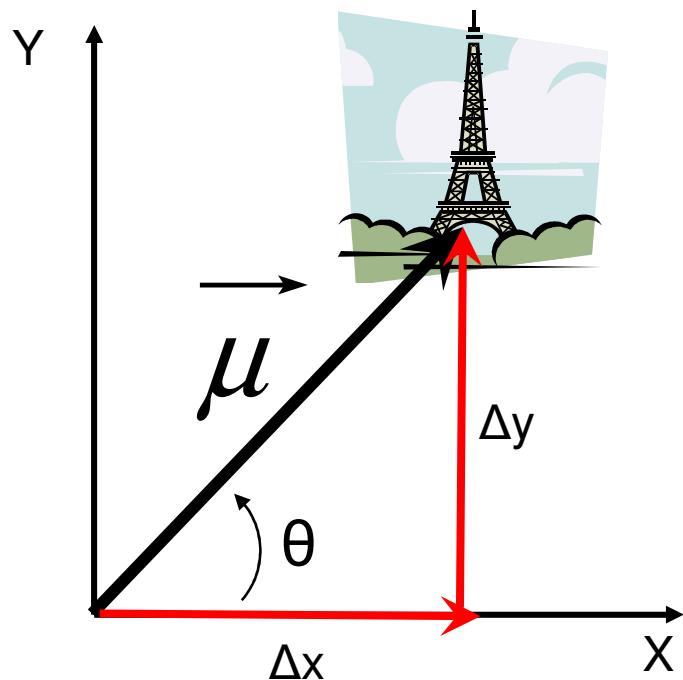
Conceito de Vetor

“A análise bem-sucedida de forças não paralelas não foi concluída até aproximadamente dois mil anos após a morte de Arquimedes, quando o matemático Simon Stevin (1548-1620) resolveu o problema de plano inclinado (que envolve forças não paralelas). Stevin também usou segmentos de reta orientados para representar forças e incluiu uma flecha no segmento de reta para indicar o sentido da força ao longo da linha. Ele mostrou como adicionar duas forças para obter sua resultante pela construção de um paralelogramo de forças cujos lados são forças (flechas). A diagonal do paralelogramo então representa a soma, ou a resultante, das duas forças. As grandezas que se somam são chamadas de vetores { o termo vetor (ou portador) e escalar foi introduzido pela primeira vez por Sir W R Hamilton.}” (Boresi, 2003)

Conceito de Eixos Coordenados

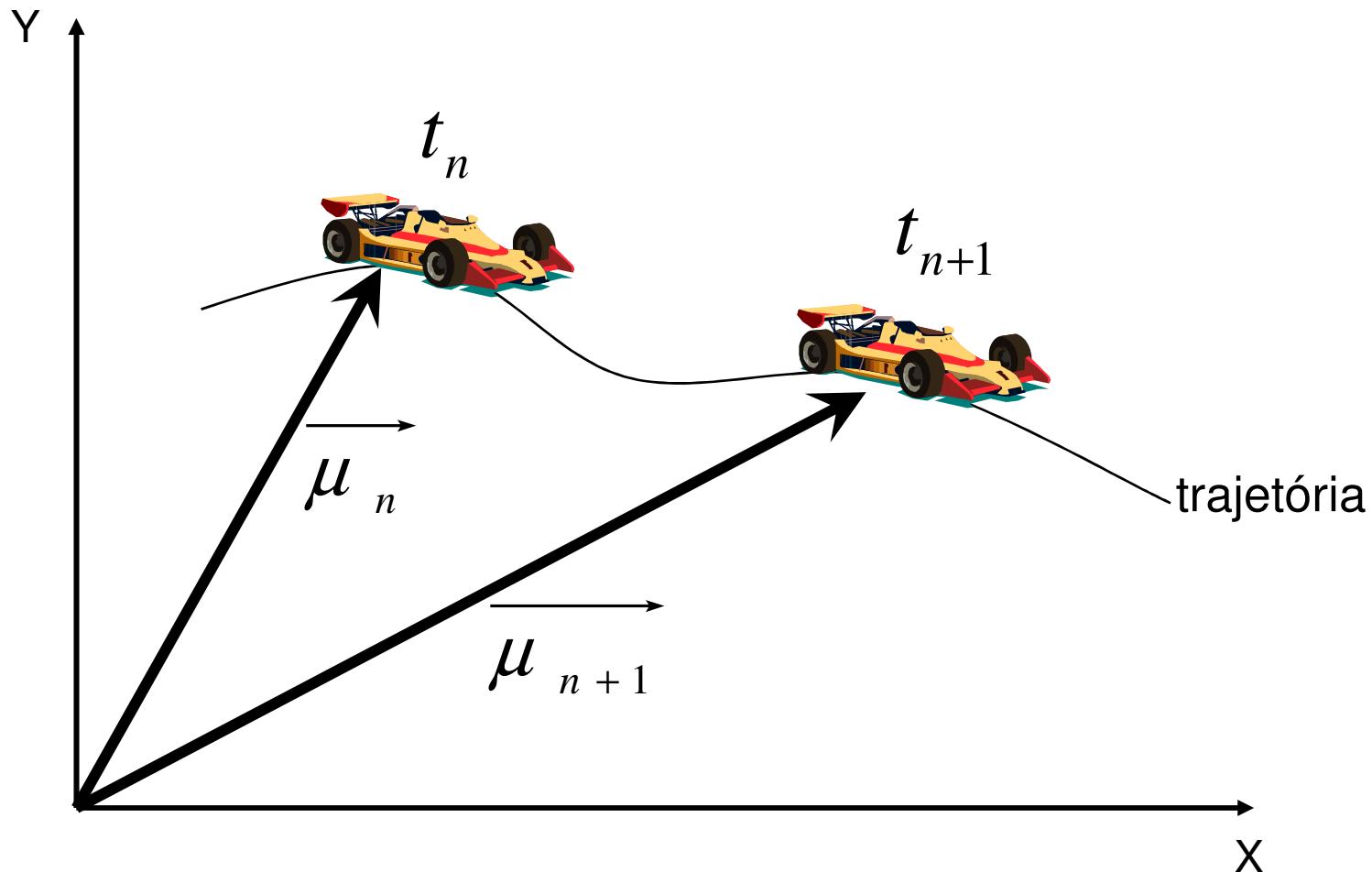
“O cientista francês René Descartes (1596-1650) desenvolveu a idéia de decompor em projeções paralelas aos eixos coordenados. Complementando a lei do paralelogramo de Stevin, a noção de projeções vetoriais simplifica significativamente os cálculos tanto em duas quanto em três dimensões.” (Boresi, 2003)

Conceito de Espaço: Região geométrica ocupada por corpos cujas posições são descritas por medidas lineares e angulares. (Hibbeler, 2005)





Conceito de Tempo: é a medida da sucessão de eventos. (Hibbeler, 2005)



Conceito de Massa

- ✓ É a quantidade de inércia de um corpo, que por sua vez é a resistência a mudança de velocidade.
- ✓ Quantidade de matéria em um corpo.
- ✓ Propriedade de todas os corpos através da qual eles experimentam atração mútua com outros corpos (gravidade). (Hibbeler, 2005)

A MASSA É IMUTÁVEL DE UM LOCAL PARA O OUTRO



Conceito de Força

- É uma consequência da ação de um corpo sobre outro.
- Uma força tende a mover o corpo no qual ela está sendo aplicada, na direção de sua linha de ação.
- A ação de uma força é caracterizada por sua INTENSIDADE, DIREÇÃO e por seu SEU PONTO DE APLICAÇÃO. (Hibbeler, 2005)

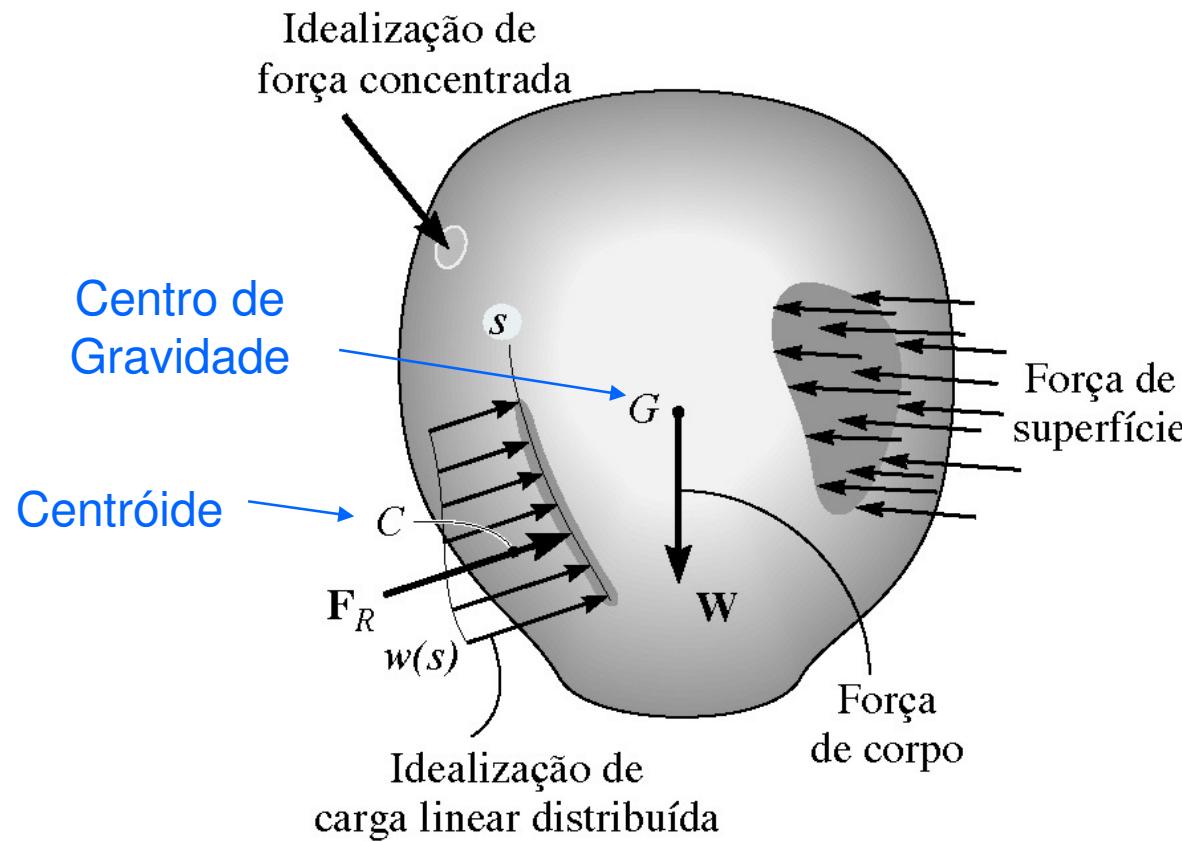
FORÇA É UMA QUANTIDADE VETORIAL



Força Externa

→ Força de Superfície – com contato -.

→ Força de Corpo – sem contato –
exemplo: gravidade, eletromagnetismo.



Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Galileu (1564-1642)

“O trabalho de Galileu foi o primeiro esforço bem-sucedido para desbancar as falsas doutrinas de Aristóteles (384-322 a.C.), que foram transmitidas sem maiores questionamentos ou mesmo confirmações durante quase dois mil anos. Galileu compreendeu a lei da inércia, como evidenciado por sua afirmação de que um corpo em movimento e livre de forças externas se manterá em movimento com velocidade constante e em linha reta. Ele percebeu que a aceleração (a taxa de variação de velocidade) de um corpo é determinada por forças externas e por isso a aceleração depende das forças aplicadas ao corpo e da inércia (massa) do corpo.” (Boresi, 2003)

Idealizações: ou modelos são usados em mecânica para simplificar a aplicação da teoria.

a.1) Ponto Material ou Partícula: um ponto material ou partícula possui MASSA mas suas DIMENSÕES são desprezíveis.

a.2) Corpo Rígido: um corpo rígido pode ser considerado a combinação de grande número de partículas no qual todas elas permanecem a um distância fixa umas das outras, tanto antes com depois da aplicação da carga. O corpo rígido é INDEFORMÁVEL.

a.3) Força Concentrada: pode-se representar um CARGA com força concentrada, desde que a área sobre a qual ela é aplicada seja pequena quando comparada as dimensões totais do corpo. (Hibbeler, 2006)

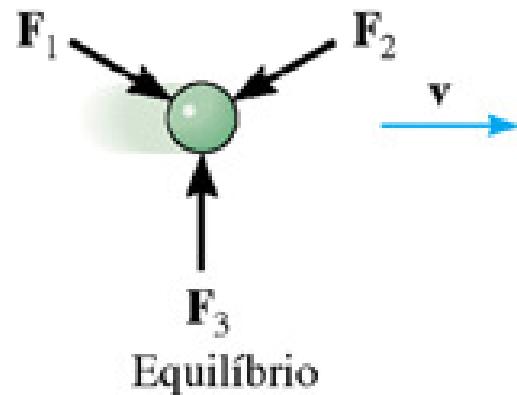
As Três Leis de Newton

Sir Isaac Newton (1642-1727), que nasceu no ano de falecimento de Galileu, resumiu, esclareceu e ampliou o trabalho deste. Além disso, formulou a lei da gravitação e os princípios do cálculo. Newton introduziu e esclareceu os conceitos de força e massa. (Boresi, 2003).

Tudo o que a mecânica aborda é explicado a partir das três leis do movimento de Newton, cuja validade é baseada em observações experimentais. Essas leis se aplicam ao movimento do ponto material (ou partícula) medida a partir de um sistema de referência não acelerado. (Hibbeler, 2005).

1^a Lei de Newton – LEI DA INÉRCIA

Um ponto material inicialmente em repouso ou movendo-se em linha reta, com velocidade constante, permanece nesse estado desde que não seja submetido a um força desequilibrada.



$$\sum \vec{F} = 0$$

2^a Lei de Newton

Um ponto material \rightarrow sob a ação de uma FORÇA DESEQUILIBRADA F sofre uma aceleração \vec{a} que tem a mesma direção da força e grandeza diretamente proporcional a massa do ponto material.



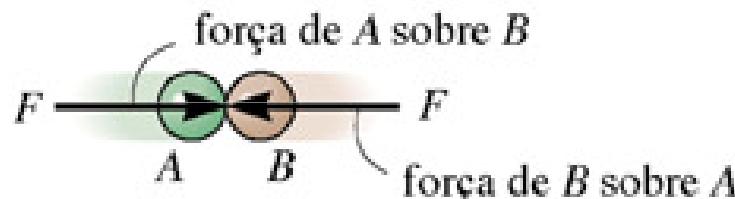
Movimento acelerado

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



3^a Lei de Newton: AÇÃO e REAÇÃO

As forças mútuas de ação e reação entre dois pontos materiais são iguais, opostas e colineares.



Ação — reação

$$\overrightarrow{F}_{AB} = -\overrightarrow{F}_{BA}$$

$$|F_{AB}| = |F_{BA}|$$

Lei de Newton da Atração Gravitacional

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F: força da gravidade entre dois pontos materiais.

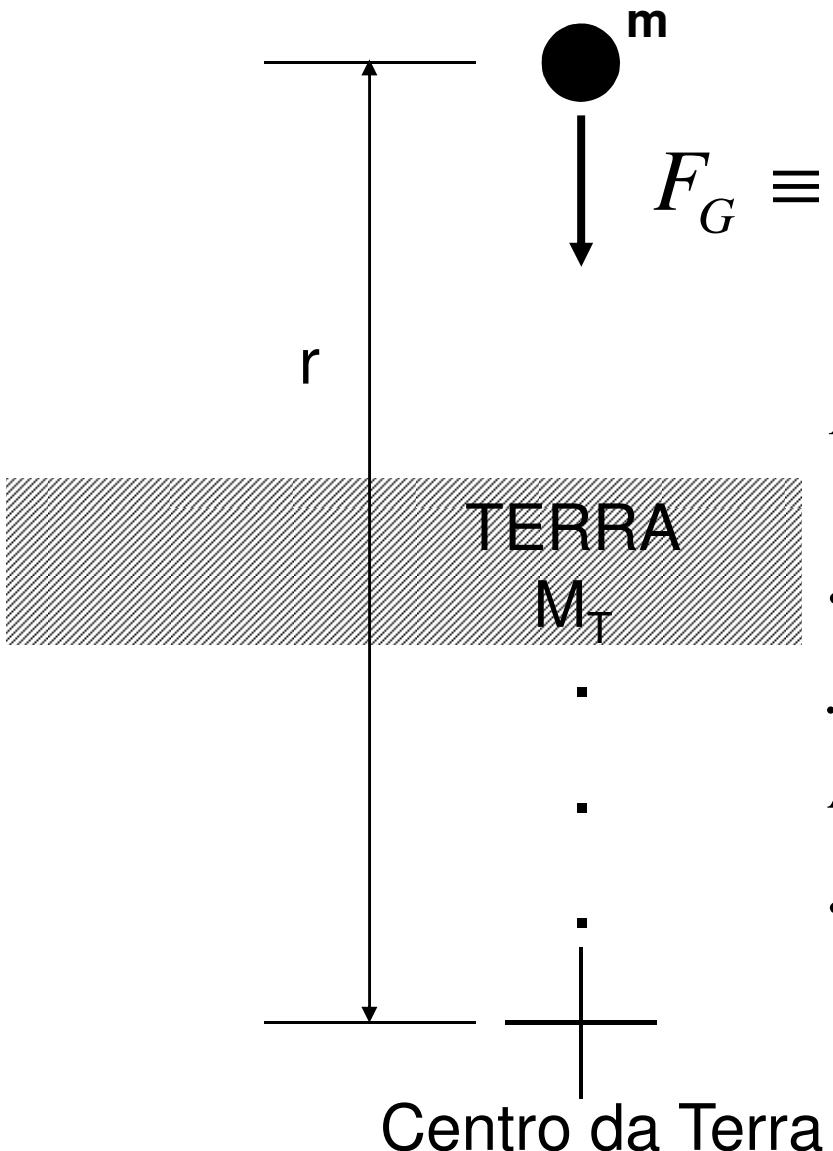
G: constante universal da gravidade. $G = 66,73 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

m_1 e m_2 : massa de cada um dos dois pontos materiais.

r: distância entre os dois pontos materiais.



PONTO MATERIAL próximo a superfície da Terra



$$F = G \cdot \frac{m \cdot M_T}{r^2}$$

$$g \equiv \text{aceleração da gravidade} = \frac{G \cdot M_T}{r^2}$$

$$\therefore W = g \cdot m$$

Ao nível do mar e na latitude 45°

$$g = 9,81 \text{ m.s}^{-2} \text{ e } g = 32,2 \text{ ft.s}^{-2}$$

Sistemas de Medidas (unidades)

SI: Sistema Internacional de Unidades

FPS: Sistema Inglês ou Sistema Usual Americano

	Comprimento	Tempo	Massa	Força
SI	metro [m]	segundo [s]	quilograma [kg]	newton [N]
FPS	pé [pé ou ft]	segundo [s]	slug [$\text{lb} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{pé}^{-1}$]	libra [lb]

Conversão

$$1 \text{ pé} = 0,3048 \text{ m}$$

$$1 \text{ slug} = 15,5938 \text{ kg}$$

$$1 \text{ lb} = 4,4482 \text{ N}$$



Arredondamento de Números

$$2,326 = 2,33$$

$$1,245 \cdot 10^3 = 1,24 \cdot 10^3$$

$$0,8655 = 0,866$$

$$0,8635 = 0,864$$

$$0,8625 = 0,862$$

Procedimento para

Análise de Exercícios

- 1) Leia o problema cuidadosamente e tente relacionar a situação física real com a teoria estudada.
- 2) Trace os diagramas necessários e tabule os dados dos problemas.
- 3) Aplique os princípios relevantes, geralmente sob a forma matemática.
- 4) Resolva as equações requeridas e assegure que estejam dimensionalmente homogêneas, use um conjunto de unidades consistentes e complete a solução numericamente.
- 5) Analise a resposta com julgamento técnico e bom senso para verificar se ela parece ou não racional.

Prefixos

Quando um quantidade numérica é muito grande ou muito pequena, as unidades usadas para definir seu tamanho devem ser acompanhadas de um prefixo.

	Forma Exponencial	Prefixo	Símbolo SI
Múltiplo			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1000	10^3	quilo	k
Submúltiplo			
0,001	10^{-3}	mili	m
0,000 001	10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001	10^{-9}	nano	n



Regras para o uso de Prefixos

- 1) Um símbolo NUNCA é escrito no PLURAL.
- 2) Os símbolos DEVEM ser escritos com letras minúsculas, com as seguintes exceções: G, M e símbolos referentes a nome de pessoas, newton N, devem ser escritos com letra maiúscula.
- 3) Quantidade definidas por diferentes unidades que são múltiplas umas das outras devem ser separadas por um PONTO para evitar confusão com a notação do prefixo. $[N] = [\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$; m.s = metro-segundo; ms = mili segundo.
- 4) Potência representada por uma unidade refere-se a ambas as unidades e seu prefixo; p.ex.: $\mu\text{N}^2 = (\mu\text{N})^2 = \mu\text{N} \cdot \mu\text{N}$; $\text{mm}^2 = (\text{mm})^2 = \text{mm} \cdot \text{mm}$.
- 5) Ao realizar cálculos, represente os números em termos de usas unidades básicas ou derivadas, convertendo todos os prefixos a potências de 10. Recomenda-se manter os valores numéricos entre 0,1 e 1000, caso contrário, deve ser escolhido um prefixo adequado; p.ex.: $50 \text{ kN} \cdot 60 \text{ nm} = 3 \text{ mN} \cdot \text{m}$
- 6) Prefixos compostos não devem ser usados.
- 7) Com exceção da unidade básica quilograma, evite, em geral, o uso de prefixo no denominador de unidades compostas.
- 8) Apesar de não serem expressas em múltiplos de 10, o minuto a hora são mantidos por razões práticas como múltiplo do segundo.

Questões de Revisão

- 1) Defina mecânica.
- 2) Quais são as três leis de Newton?
- 3) A massa é uma medida de qual propriedade de uma partícula?
- 4) Qual é a unidade-padrão de massa? E de tempo? E de comprimento?
- 5) O que se entende pelo *peso* de um corpo? O peso é uma força?
O peso é uma massa?
- 6) O que se entende por equilíbrio de uma partícula?

Vetores Força

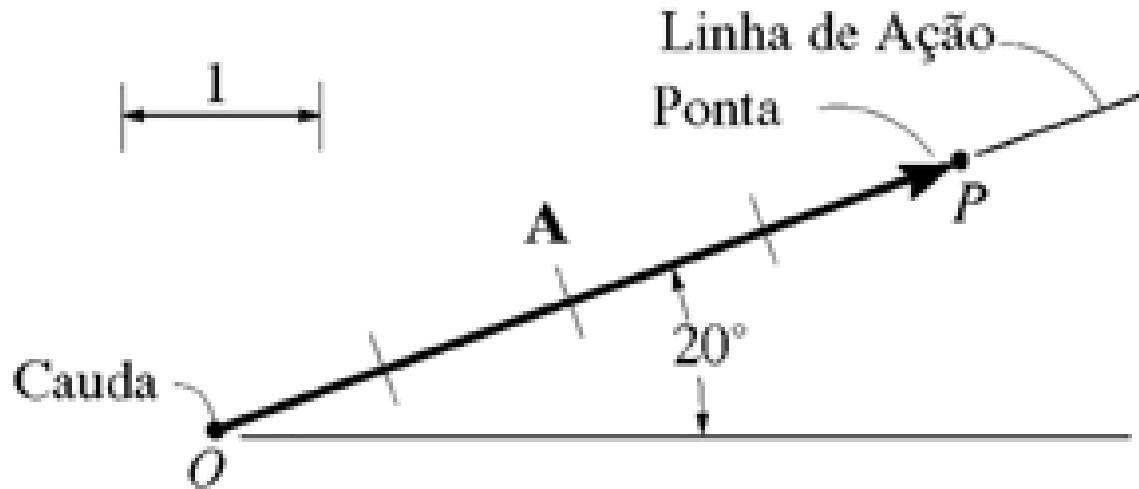
A maioria das quantidades físicas utilizadas em engenharia pode ser expressada como uma grandeza escala ou uma grandeza vetorial.

- ❖ Grandeza Escalar: quando é caracterizada por um número positivo ou negativo e sua unidade; p.ex.: temperatura (10°C), energia (100 kJ).

- ❖ Grandeza Vetorial: quando é caracterizada pela intensidade, direção e sentido.



Vetor



- ✓ \vec{A} ou **A** (em negrito) é a representação do vetor
- ✓ $|\vec{A}|$ módulo ou a intensidade do vetor A.
- ✓ A ponta da flecha indica o sentido do vetor.
- ✓ A calda indica o ponto de aplicação do vetor.
- ✓ O ângulo indica a direção, nesse caso, em relação à horizontal.

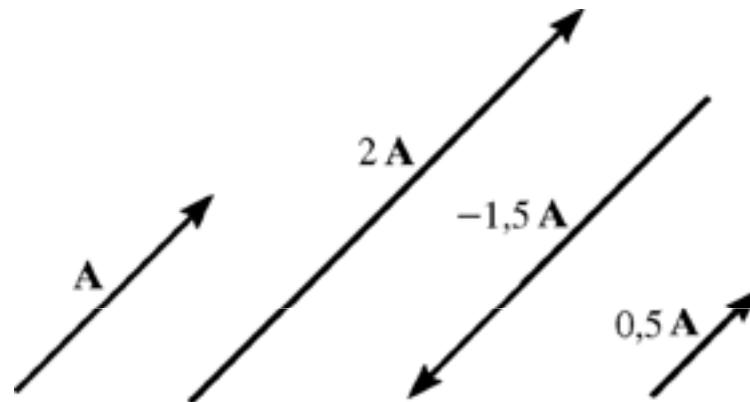


Operações Vetoriais

1) Multiplicação de um escalar por um vetor



Vetor A e sua contrapartida negativa

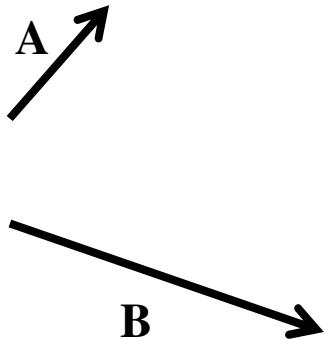


Multiplicação e divisão escalares

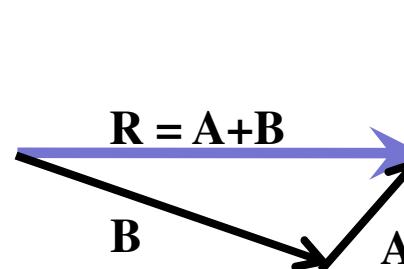


2) Adição de Vetores

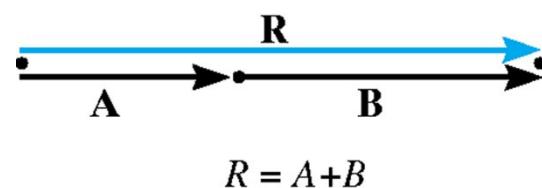
LEI DO PARALELOGRAMO



Lei do Paralelogramo



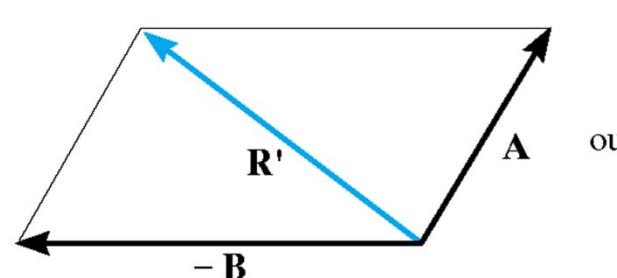
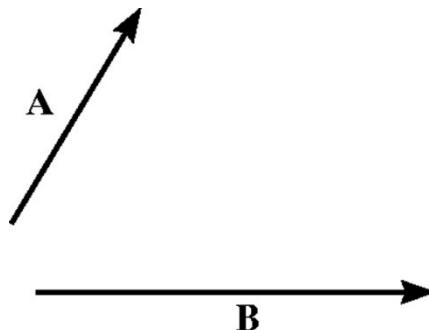
Construção do Triângulo



Adição de vetores colineares

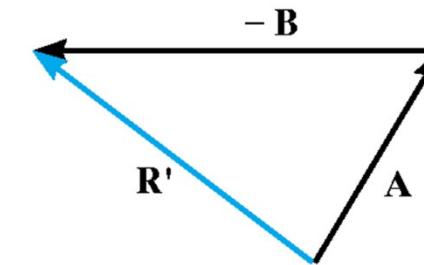
3) Subtração de Vetores

LEI DO PARALELOGRAMO



Lei do paralelogramo

Subtração vetorial

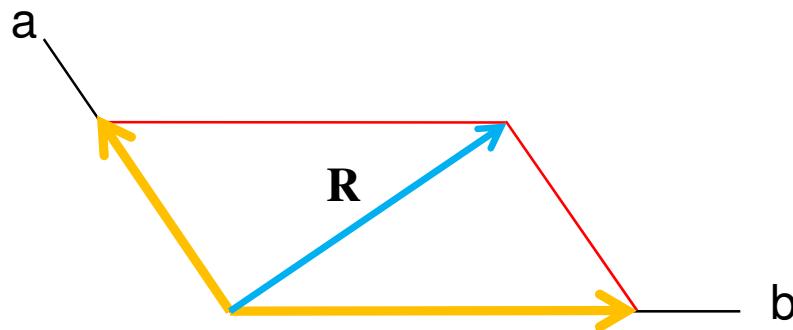


Construção do triângulo

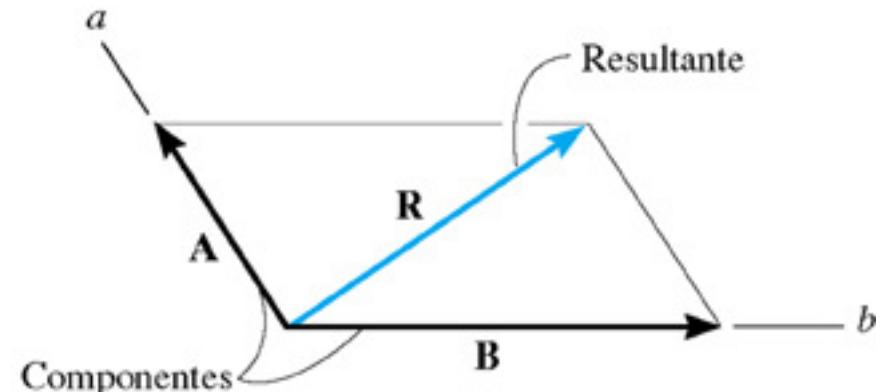


4) Decomposição de Vetores

Dado um vetor resultante R determinar seus componentes em relação aos eixos coordenados a e b .

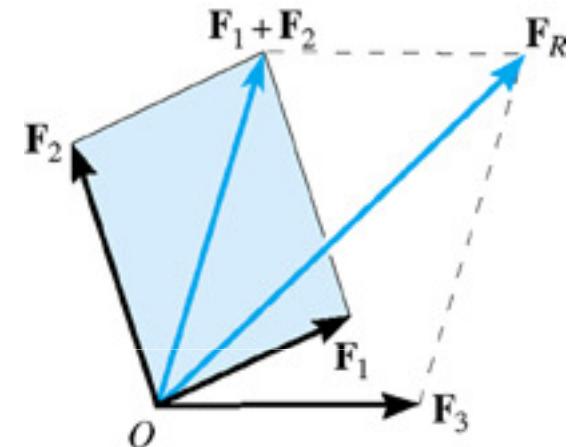
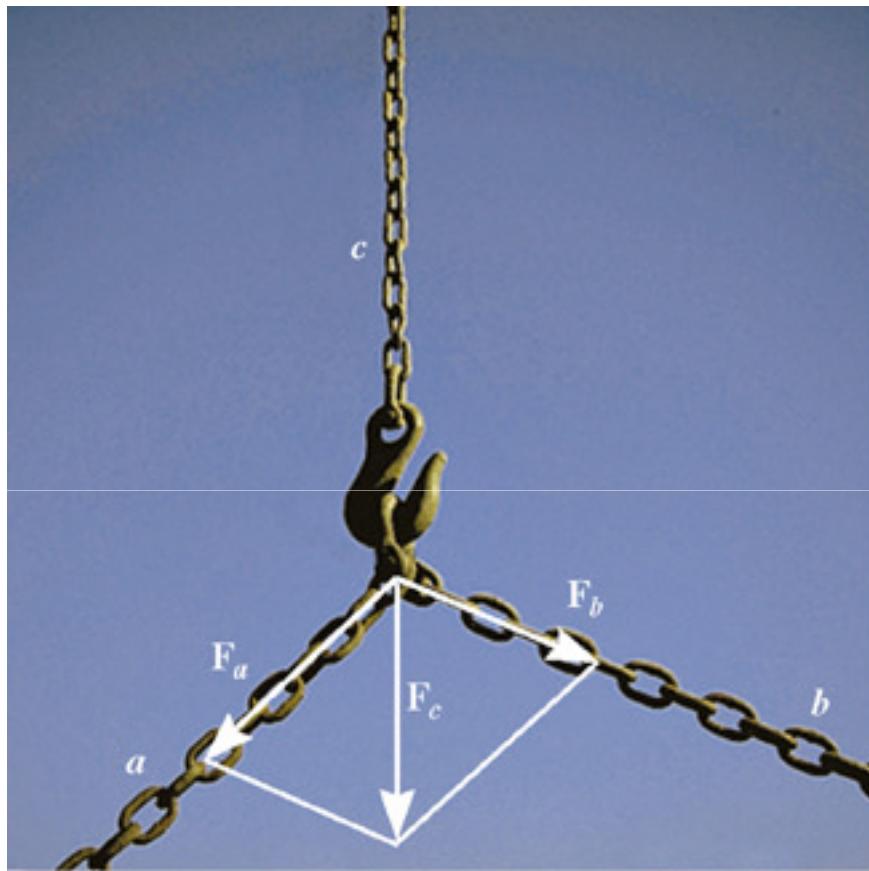


1. Trace retas paralelas aos eixos a e b que passem pela ponta (seta) do vetor resultante.
2. Trace dois vetores a partir da origem dos eixos coordenados até o ponto de intersecção da reta traçada em '1' com cada eixo coordenado.



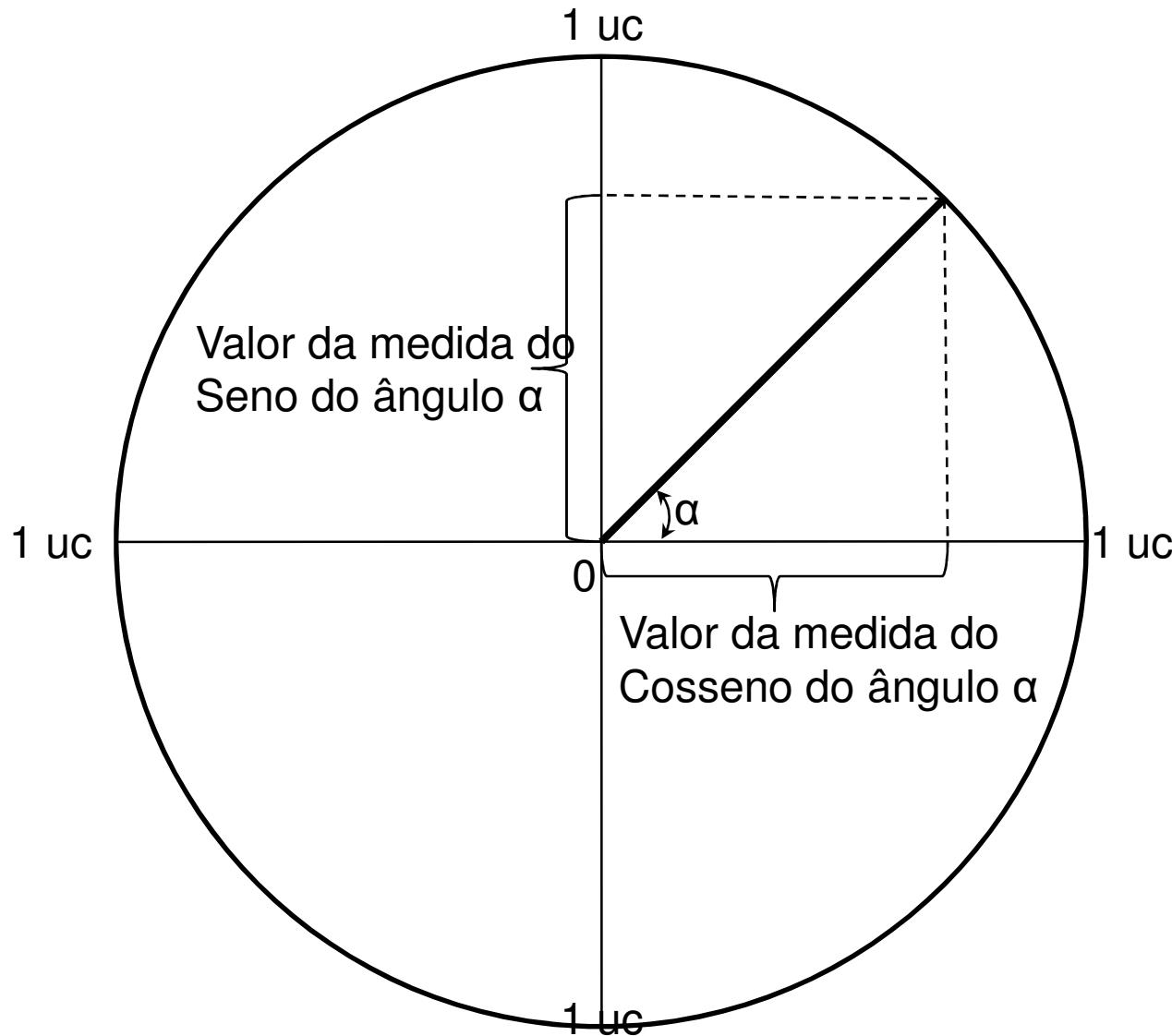


5) Adição de Forças Vetoriais



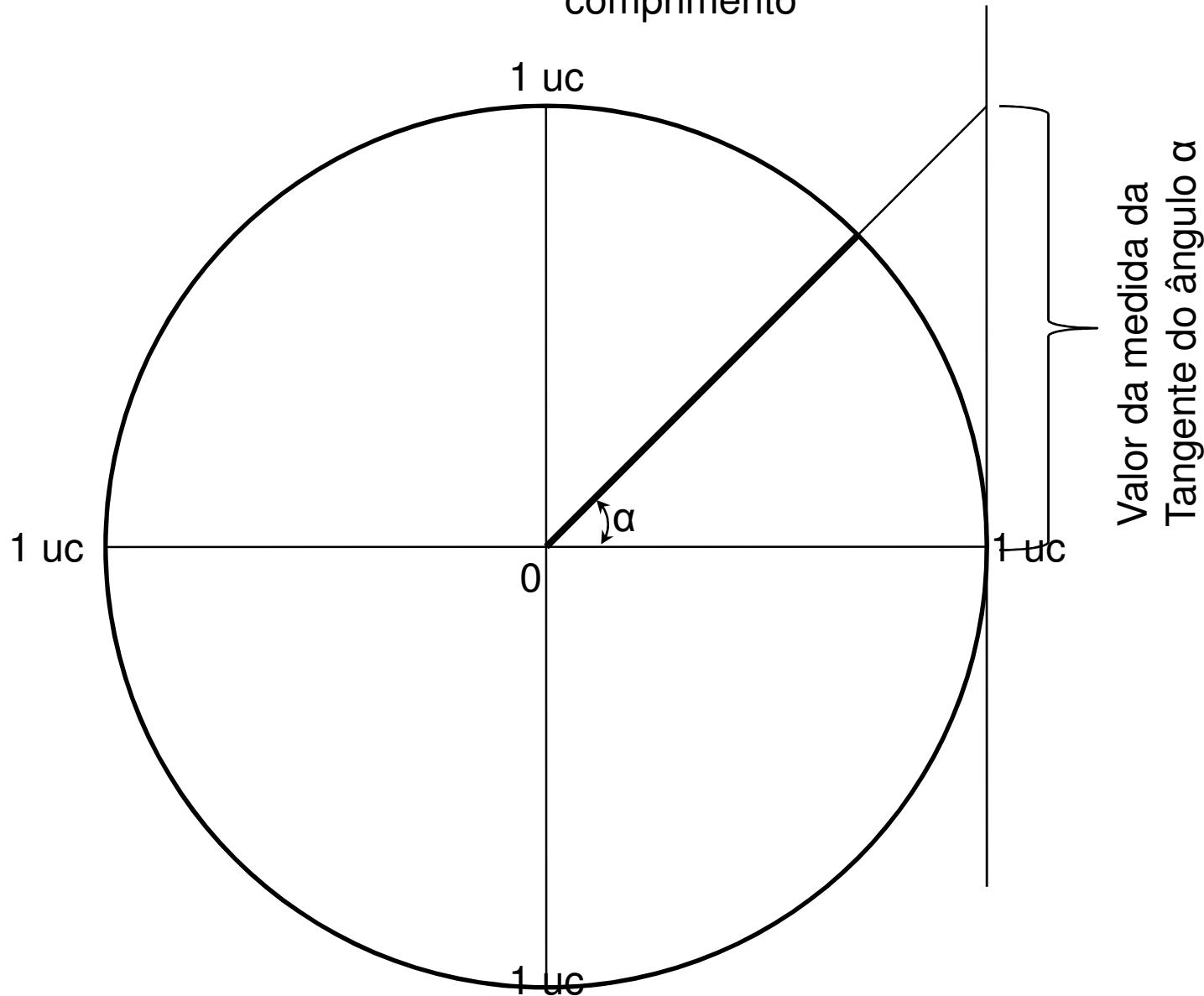
6) Conceito de Seno e Cosseno de um Ângulo

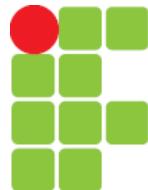
Considere a circunferência cujo raio vale uma unidade de comprimento



7) Conceito de Tangente de um Ângulo

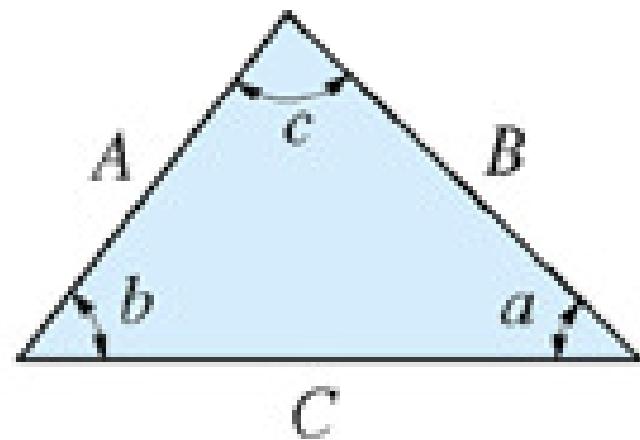
Considere a Circunferência cujo raio vale uma unidade de comprimento





8) Lei dos Senos e Lei dos Cossenos

Seja um triângulo qualquer pode-se deduzir as seguintes leis:



Lei dos Senos

$$\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$$

Lei dos Cossenos

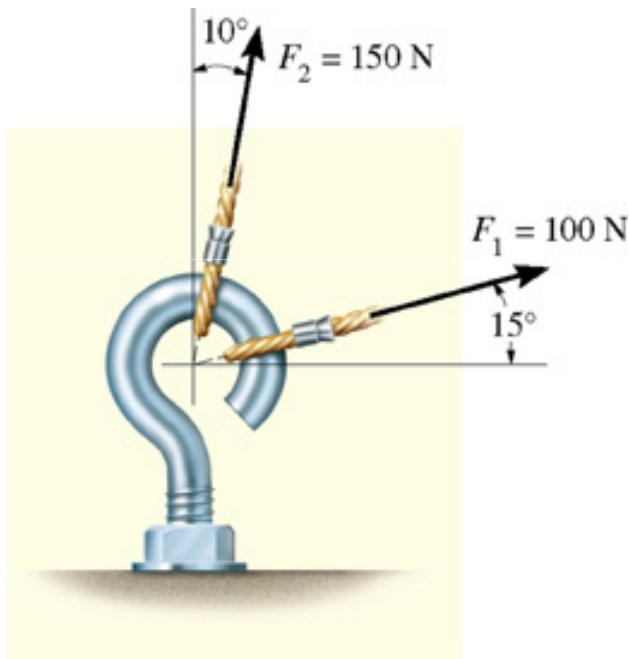
$$A = \sqrt{B^2 + C^2 - 2.B.C.\cos a}$$

$$B = \sqrt{A^2 + C^2 - 2.A.C.\cos b}$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2.A.B.\cos c}$$



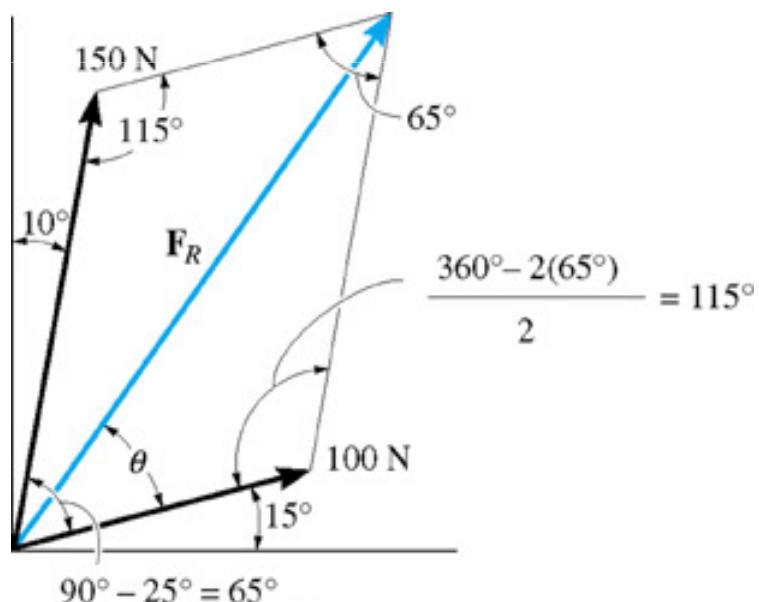
Exemplo 01: O parafuso tipo gancho mostrado na figura está sujeito a duas forças F_1 e F_2 . Determine a intensidade (módulo) e a direção da força resultante.





Solução

Lei do Paralelogramo: trace duas retas paralelas uma a força de 150 N e outra a força de 100 N. Trace uma reta orientada da origem (calda das duas forças) à intersecção das duas retas paralelas. Esse segmento de reta orientado é o vetor resultante, conforme demonstrado na figura.



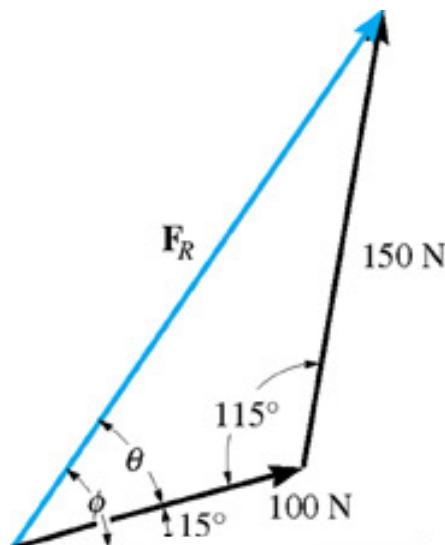


Para calcular do módulo da força resultante \mathbf{F}_R utiliza-se a Lei dos Cossenos.

$$F_R = \sqrt{(100N)^2 + (150N)^2 - 2.(100N).(150N).\cos 115^\circ}$$

$$F_R = 213N$$

Para determinar a direção (ângulo Φ) da força resultante \mathbf{F}_R utiliza-se a Lei dos Senos.



$$\frac{150N}{\sin \theta} = \frac{212,6N}{\sin 115^\circ}$$

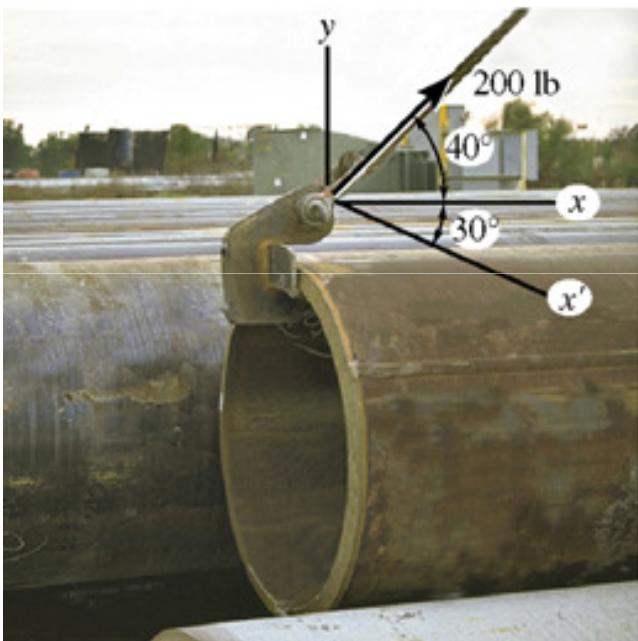
$$\theta = 39,8^\circ$$

$$\therefore \phi = 39,8^\circ + 15^\circ = 54,8^\circ$$

(c)



Exemplo 02: Decomponha a força de 200 lb que atua sobre o tubo mostrado na figura, em componentes, nas direções (a) x e y e (b) x' e y.

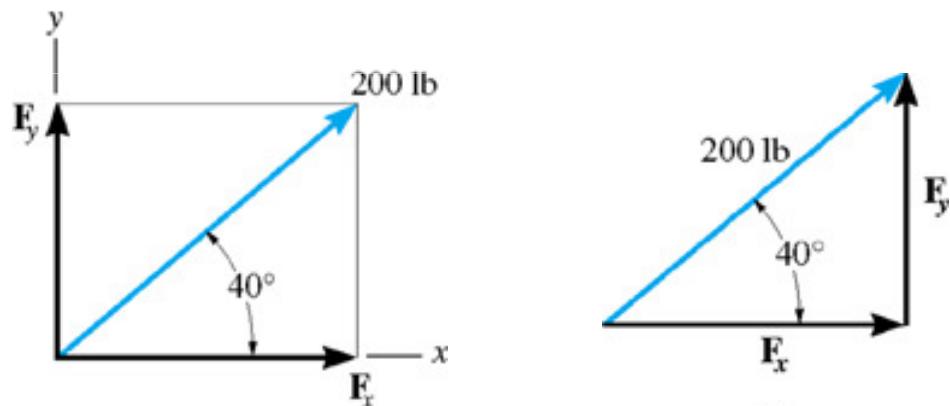




Solução

Em cada um dos casos, a lei do paralelogramo é usada para decompor \mathbf{F} em seus dois componentes. Constrói-se então o triângulo de vetor para determinar os resultados numéricos por trigonometria.

Parte (a): O vetor adição $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ é mostrado na figura. Observe que o comprimento dos componentes encontra-se em escala ao longo dos eixos x e y , construindo-se primeiramente linhas a partir da extremidade de \mathbf{F} paralelas aos eixos, de acordo com a lei do paralelogramo.

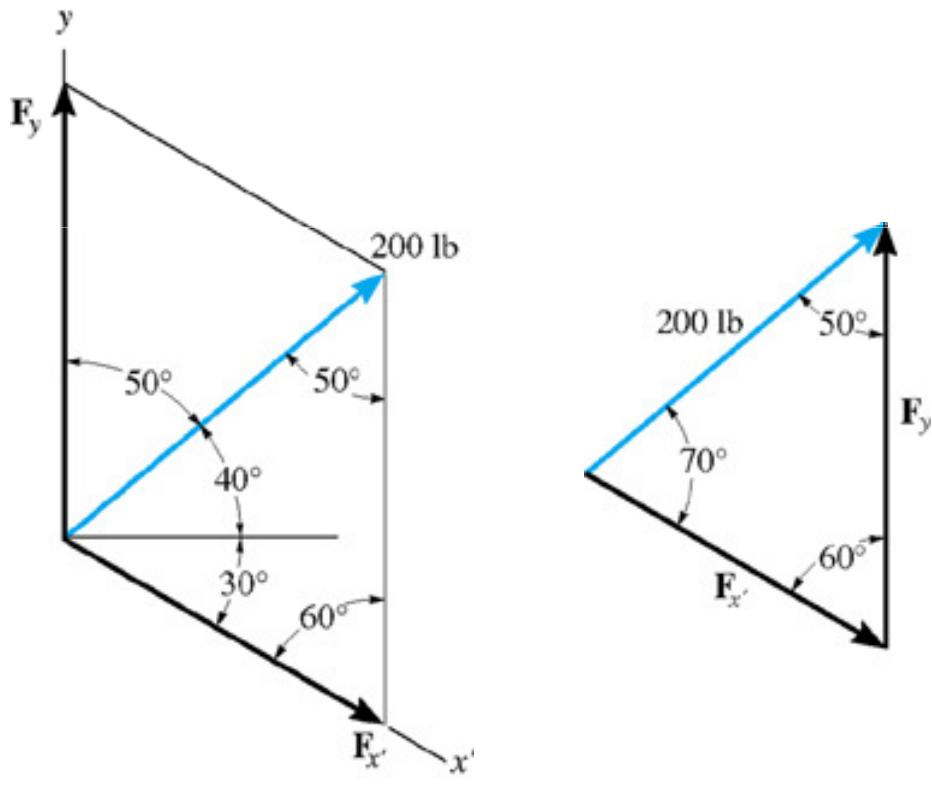


$$F_x = 200 \text{ lb} \cdot \cos 40^\circ = 153 \text{ lb}$$

$$F_y = 200 \text{ lb} \cdot \sin 40^\circ = 129 \text{ lb}$$



Parte (b): O vetor adição $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{x'} + \mathbf{F}_y$ é mostrado na figura. Observe com atenção como o paralelogramo foi construído. Aplicando-se a lei dos senos e usando-se os dados listados no triângulo de vetores.



$$\frac{F_{x'}}{\sin 50^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\sin 60^\circ}$$

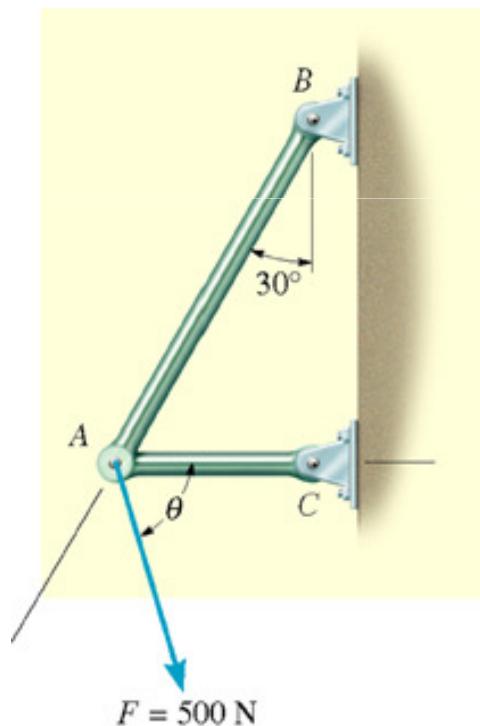
$$F_{x'} = 177 \text{ lb}$$

$$\frac{F_y}{\sin 70^\circ} = \frac{200 \text{ lb}}{\sin 60^\circ}$$

$$F_y = 217 \text{ lb}$$

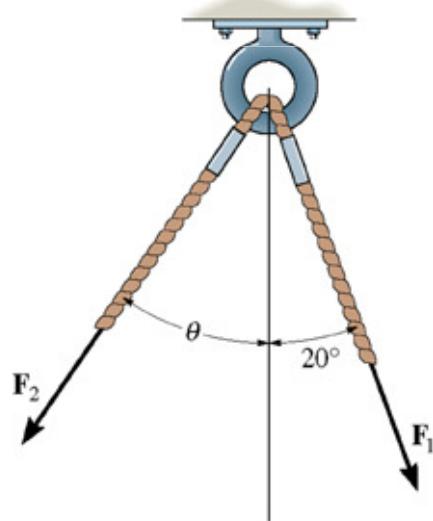


Exercício 01: A força \mathbf{F} que atua sobre a estrutura mostrada na figura tem intensidade de 500 N e deve ser decomposta em dois componentes que atuam ao longo dos elementos AB e AC . Determinar o ângulo θ , medido abaixo da horizontal, de modo que o componente \mathbf{F}_{AC} seja orientado de A para C e tenha grandeza de 400 N.



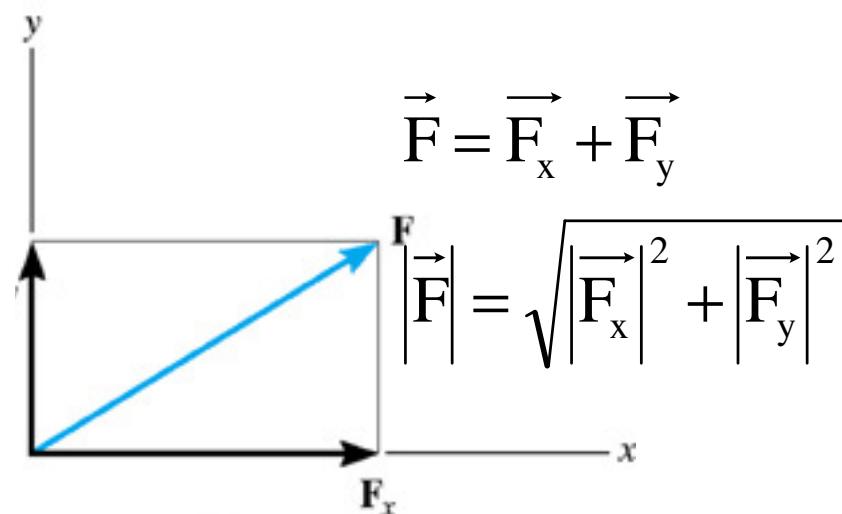
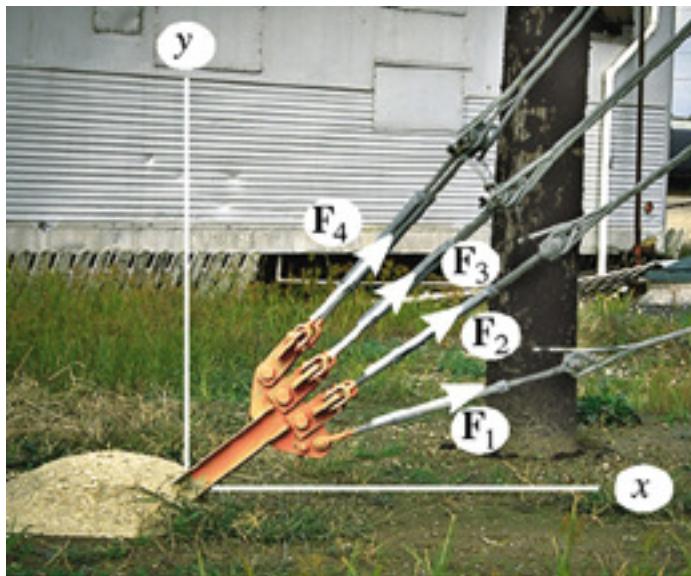
(a)

Exercício 02: O anel mostrado na figura está submetido a duas forças \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 . Se for necessário que a força resultante tenha intensidade de 1 kN e seja orientada verticalmente para baixo, determine (a) a intensidade de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , desde que $\theta = 30^\circ$, e (b) as intensidades de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 , se \mathbf{F}_2 for mínima.



Adição de um Sistemas de Forças Coplanares

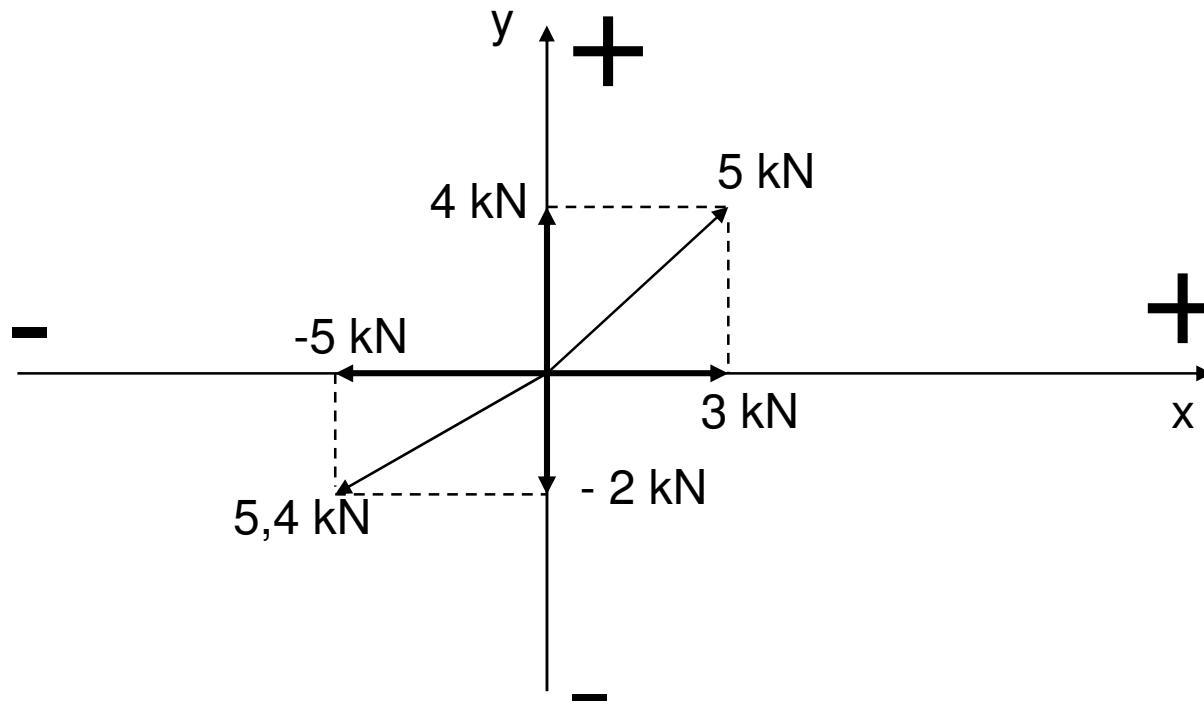
Quando um corpo está sujeito a mais de duas forças (sistemas de forças) a determinação da força resultante pela lei do paralelogramo se torna dificultada na medida que deverão se somas duas a duas forças sucessivamente até a resultante. Para facilitar o cálculo da força resultante de um sistema de forças utiliza-se a soma algébrica das componentes de cada força decompostas em eixos específicos e então se gera a resultante. Quando a soma é realizada no plano cartesiano a decomposição é denominada de decomposição cartesiana ou decomposição em um sistema de coordenadas ortogonal.



Fonte: Hibbeler, 2006

Notação de Sentido dos Componentes Retangulares

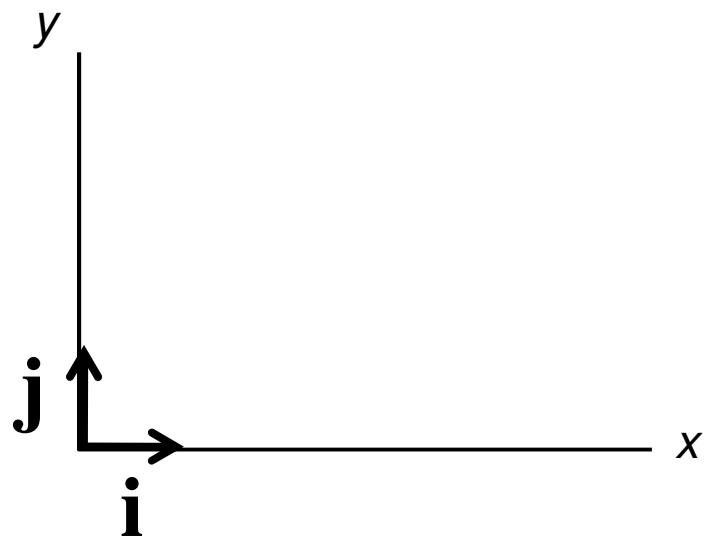
1) Notação Escalar: cada eixo coordenado tem sua direção positiva e negativa. Quando a componente tem o sentido na direção positiva do eixo ela será representada por um escalar positivo, caso contrário por escalar negativo.



2) Notação Vetorial: Também é possível representar os componentes de uma força em termos de vetores cartesianos unitários (base canônica), **i**, **j**, **k**.



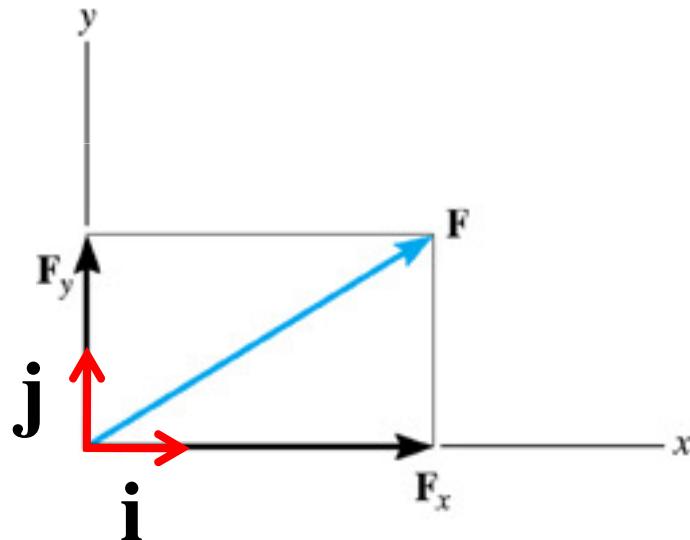
Na trena ao lado a unidade base de medida é UM centímetro, ou seja, todas as demais unidades são múltiplos ou sub-múltiplas do UM centímetro. Assim, uma medida que vale 10 cm quer dizer que estamos multiplicando 1 cm DEZ vezes.



Os sistema de coordenadas, assim, como os instrumentos de medida também apresentam unidades básicas. No entanto, elas são simbolizadas por letras. Para o eixo **x** a unidade básica é simbolizada pela letra **i** e para o eixo **y** pela letra **j**. A essa base de medida especial foi dado o nome de **BASE CANÔNICA**. Em muitas aplicações na mecânica a base canônica é comumente chamada de **vetores unitários**.

Fonte: Hibbeler, 2006

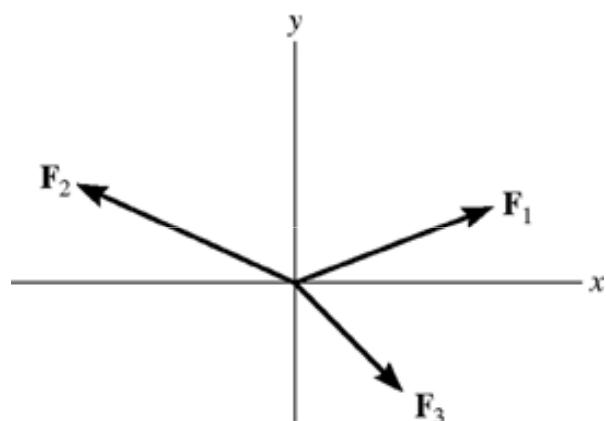
2) Notação Vetorial: já aprendemos a decompor o vetor resultante em seus componentes sobre um sistema de coordenadas. Na figura abaixo o vetor \mathbf{F} foi decomposto em dois componentes ao longo dos eixos x e y , F_x e F_y , respectivamente. Sabemos que F_x e F_y são escalares e sabemos também que os vetores unitários dos eixos x e y são \mathbf{i} e \mathbf{j} . Assim podemos representar o vetor resultante \mathbf{F} em função dos escalares F_x e F_y e dos vetores unitários \mathbf{i} e \mathbf{j} .



$$\vec{\mathbf{F}} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$



3) Resultante de Forças Coplanares: para determinar a força resultante primeiro cada força é decomposta em seus componentes x e y; depois os respectivos componentes são somados usando-se a álgebra escalar, uma vez que são colineares. A força resultante é obtida a partir das componentes resultantes de cada eixo pela aplicação da lei do paralelogramo.

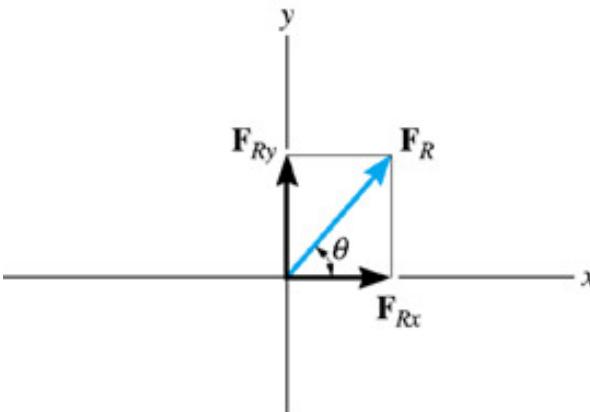
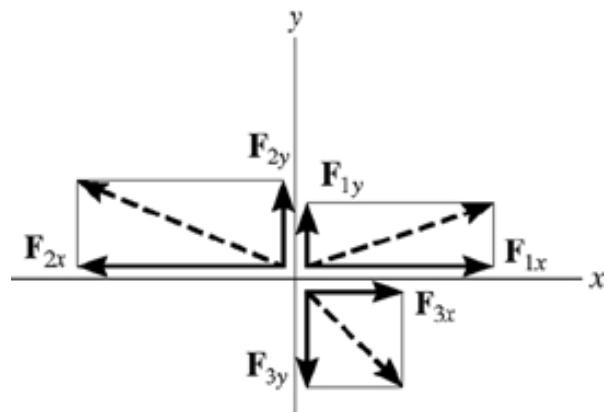


$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

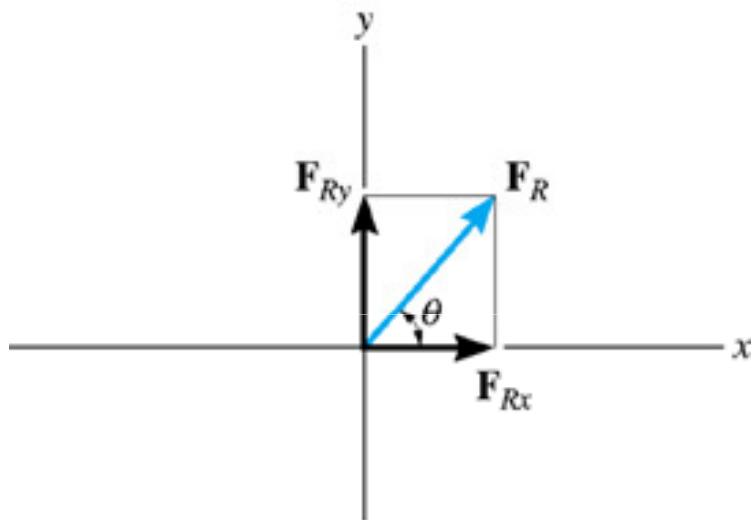
$$\mathbf{F}_R = F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j} - F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j} + F_{3x}\mathbf{i} - F_{3y}\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_R = (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_R = (F_{Rx})\mathbf{i} + (F_{Ry})\mathbf{j}$$



Intensidade [F_R] e Direção [θ] da Força Resultante



$$\xrightarrow{+} F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

$$\uparrow \xrightarrow{+} F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

∴

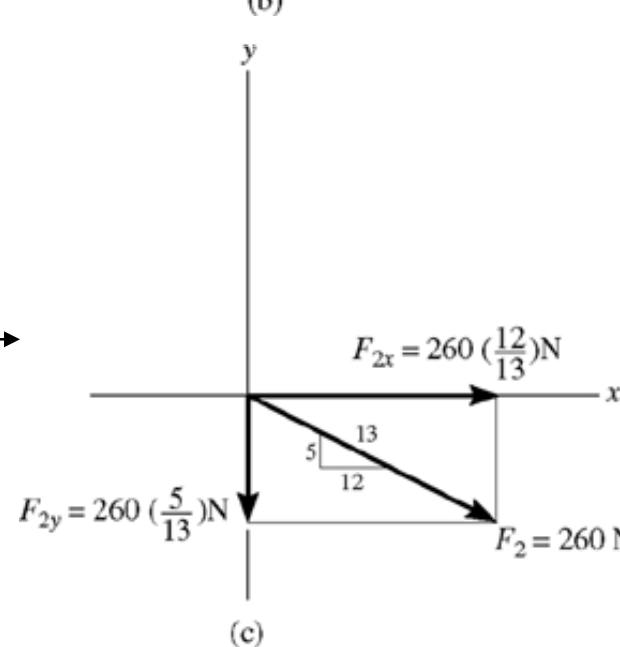
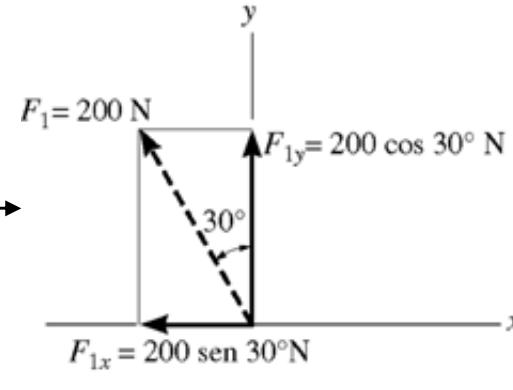
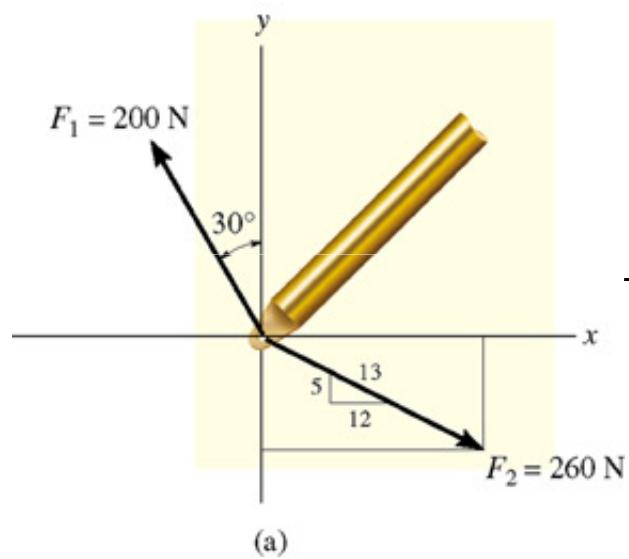
$$F_{Rx} = \sum F_x$$

$$F_{Ry} = \sum F_y$$

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

Exemplo 03: Determine os componentes x e y de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 que atuam sobre a lança mostrada na figura. Expressse cada força como vetor cartesiano.



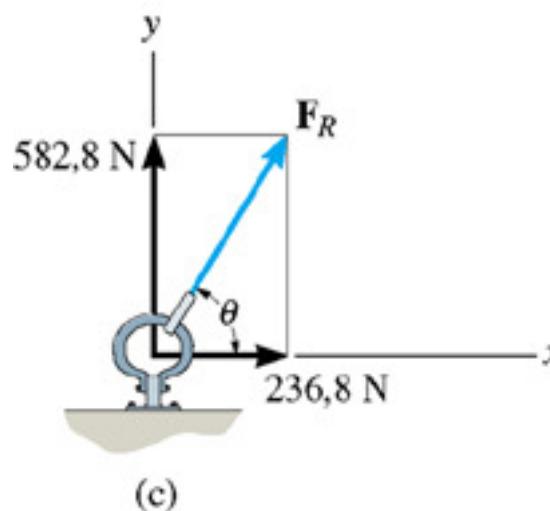
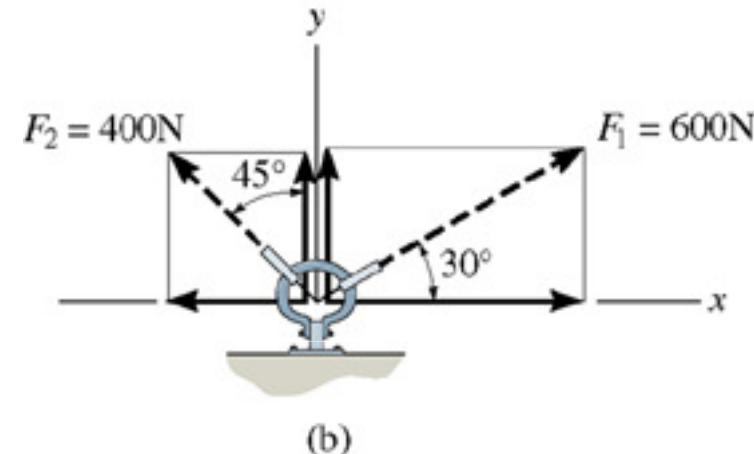
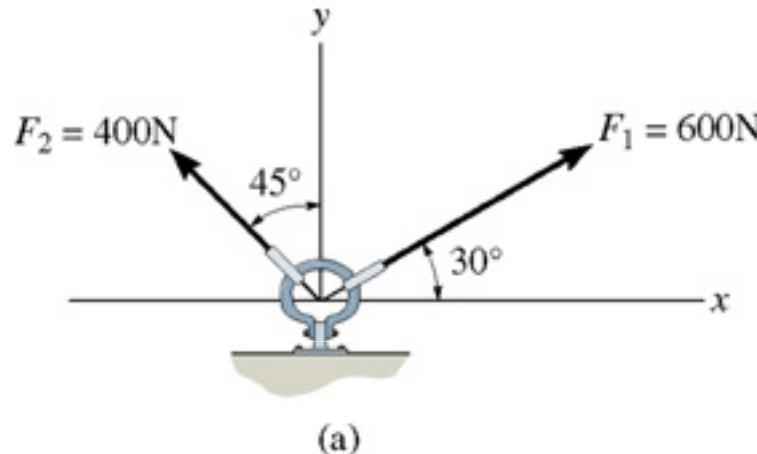
Notação Vetorial Cartesiana

$$\mathbf{F}_1 = \{-100\mathbf{i} + 173\mathbf{j}\} [\text{N}]$$

$$\mathbf{F}_2 = \{240\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} [\text{N}]$$

Exemplo 04: O elo mostrado na figura está submetido a duas forças F_1 e F_2 . Determine a intensidade e a orientação da força resultante

Notação Escalar



$$F_R = \sqrt{(236,8\text{N})^2 + (582,8\text{N})^2} = 629\text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{582,8\text{N}}{236,8\text{N}} \right| = 67,9^\circ$$



Notação Vetorial

$$\mathbf{F}_1 = \{600\cos30^\circ \mathbf{i} + 600\sin30^\circ \mathbf{j}\} \text{N}$$

$$\mathbf{F}_2 = \{-400\cos45^\circ \mathbf{i} + 400\sin45^\circ \mathbf{j}\} \text{N}$$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\mathbf{F}_R = \{600\cos30^\circ - 400\cos45^\circ \mathbf{i} + \{600\sin30^\circ + 400\sin45^\circ \mathbf{j}\} \text{N}$$

$$\mathbf{F}_R = \{236,8\mathbf{i} + 582,8\mathbf{j}\} \text{N}$$

$$F_R = \sqrt{(236,8\text{N})^2 + (582,8\text{N})^2} = 629\text{N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{582,8\text{N}}{236,8\text{N}} \right| = 67,9^\circ$$

Equilíbrio de um Ponto Material

1) Equilíbrio

- ✓ Repouso, se originalmente, o ponto material estava em repouso.
- ✓ Movimento de translação com velocidade constante, se originalmente, estava com velocidade constante. Como as dimensões de um ponto material são desprezadas ela não gira

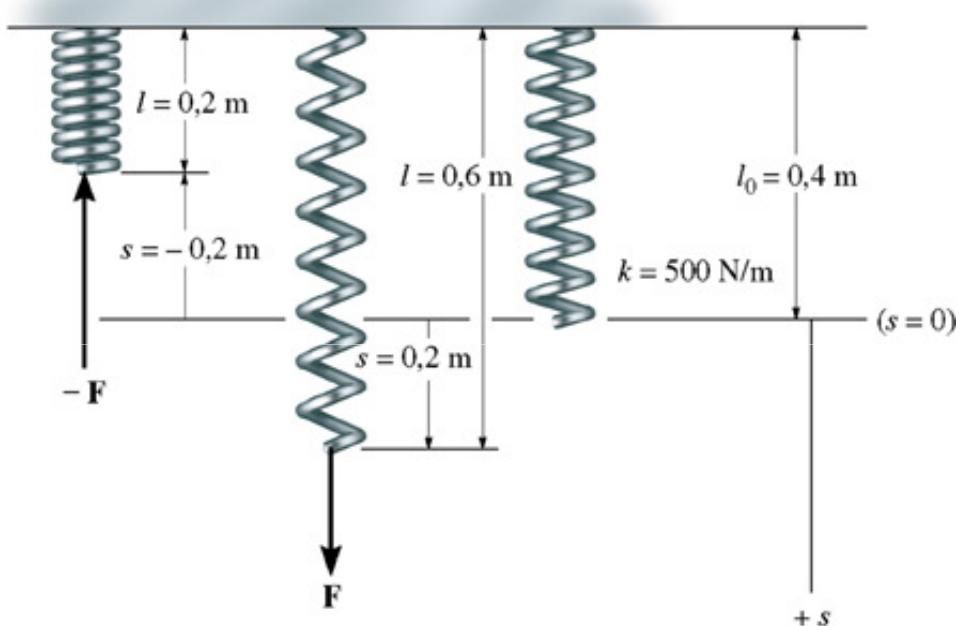
A condição necessária e suficiente para manter um ponto material em equilíbrio ocorre quando a resultante das forças externas que agem sobre o corpo é nula. Essa condição é um caso particular da 2^a Lei de Newton quando a aceleração do ponto material é nula.

$$\sum \mathbf{F} = 0$$



2) Tipos de Conexões

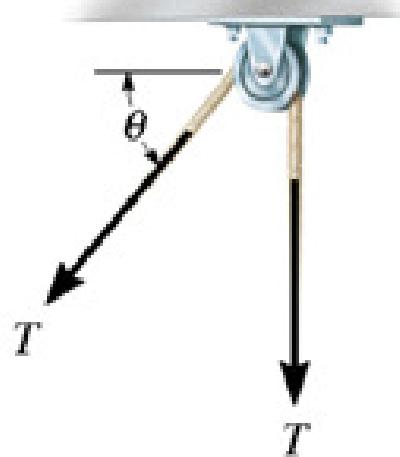
❖ Molas: $F = k.s$



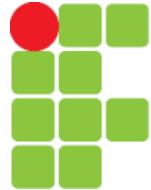
- F : força exercida na mola.
- k : constante de rigidez da mola [N/m]
- $s = l - l_0$: deformação da mola; onde: l é o comprimento final e l_0 o comprimento inicial (sem deformação). Observe que quando s for positivo a mola está sendo tracionada do contrário comprimida.



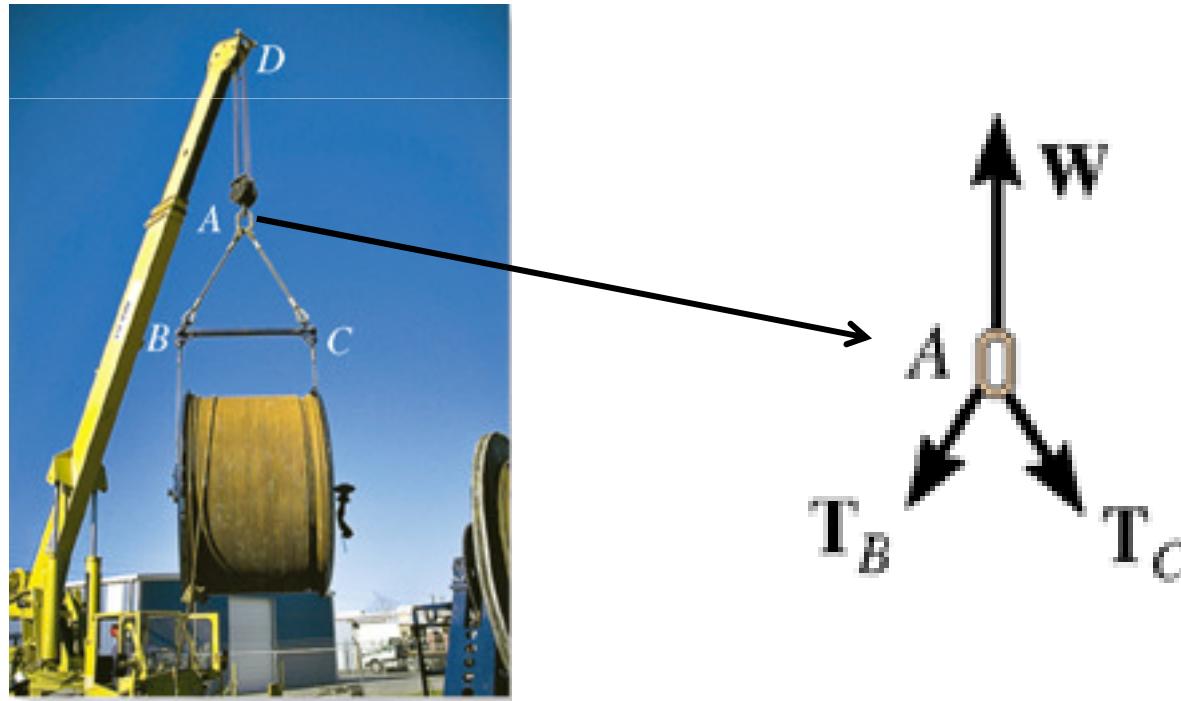
❖ Cabos e Polias: Os cabos são considerados indeformáveis, têm peso desprezível e suportam apenas esforços de tração. A intensidade da força que atua em um cabo passando por uma polia permanece constante para manter a condição de equilíbrio do cabo. Polias mudam apenas a direção e o sentido da força atuante no cabo mas sua intensidade permanece constante.

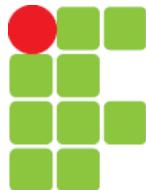


O cabo está em tensão

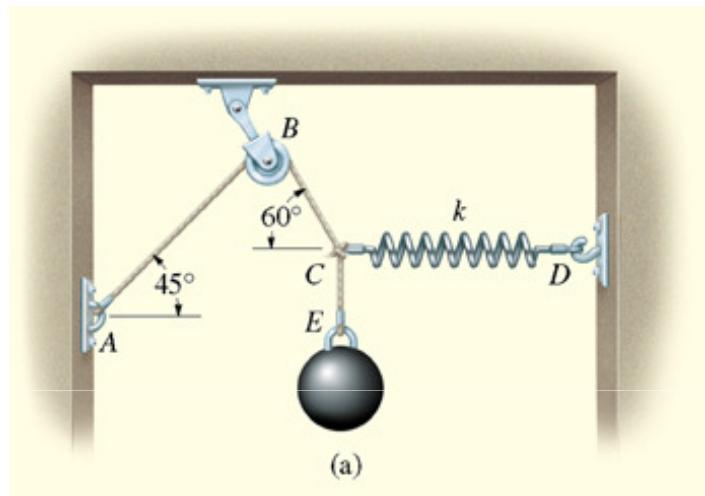


3) Diagrama de Corpo Livre (DCL): é o esboço do ponto material no qual estão representadas (módulo, direção e sentido) todas as forças (conhecidas e desconhecidas) que atuam sobre ele mais as dimensões (distâncias, ângulos) relevantes à solução do problema.





Exemplo 01: A esfera tem massa de 6 kg e está apoiada como mostrada na figura. Desenhe o diagrama de corpo livre (DCL) da esfera, da corda CE e do nó em C.

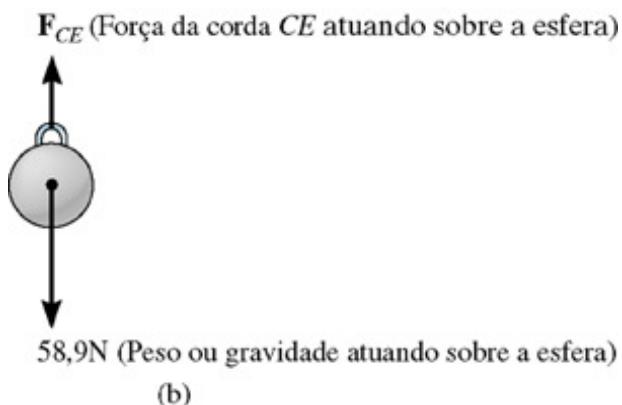


\mathbf{F}_{EC} (Força do nó atuando sobre a corda CE)



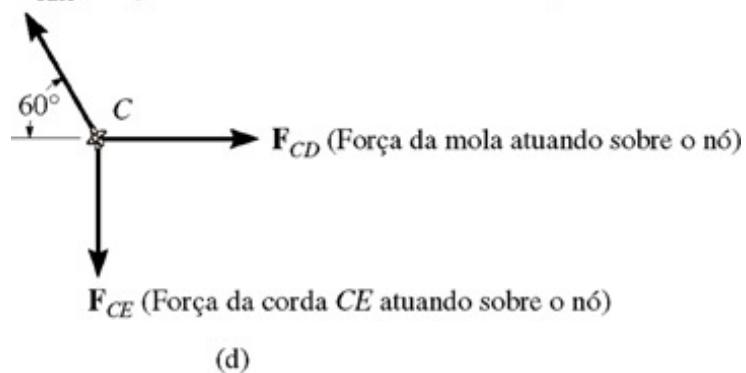
\mathbf{F}_{CE} (Força da esfera atuando sobre a corda CE)

(c)



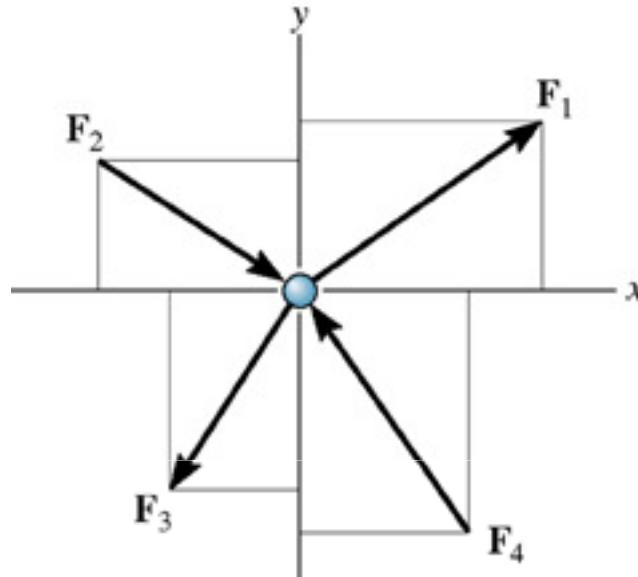
(b)

\mathbf{F}_{CBA} (Força da corda CBA atuando sobre o nó)



(d)

4) Sistemas de Forças Coplanares



Notação Vetorial

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

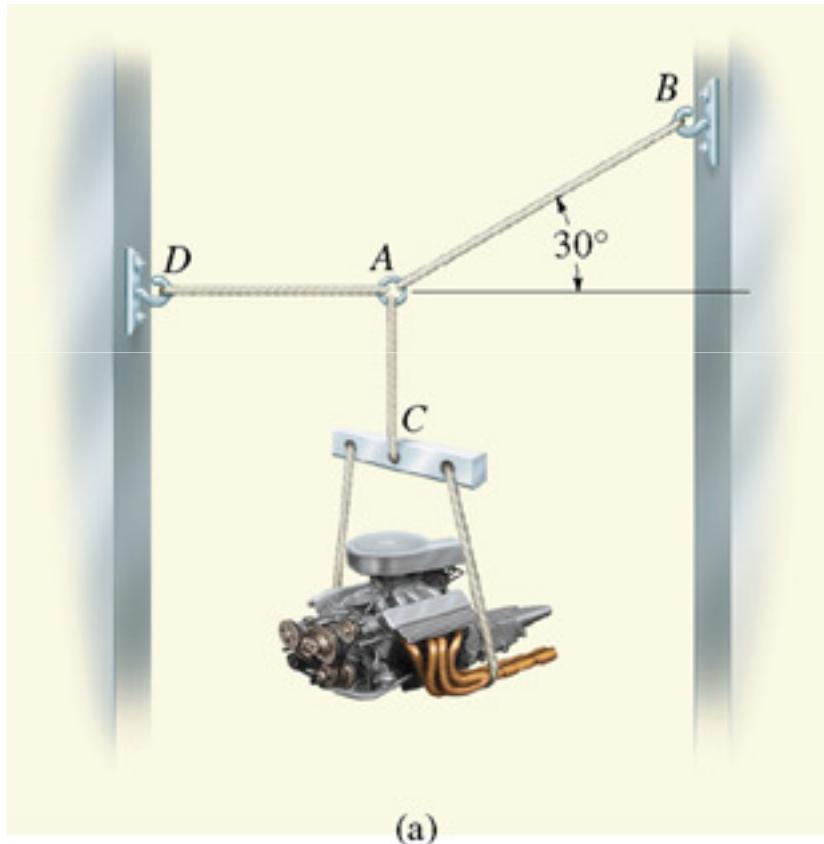
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = 0$$

Notação Escalar

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Exemplo 02: Determine a tensão nos cabos AB e AD para o equilíbrio do motor de 250 kg mostrado na figura.

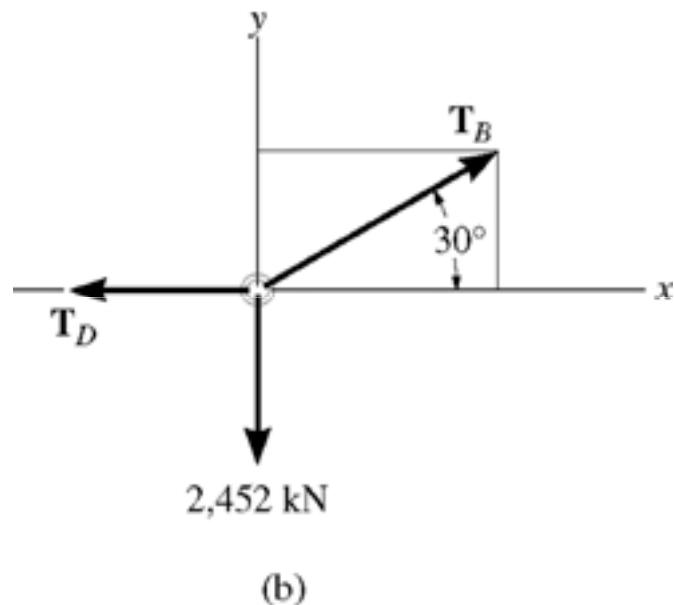


Equações de Equilíbrio

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \uparrow \sum F_y = 0$$

Solução

DCL do Anel A



$$\rightarrow + \sum F_x = 0$$

$$T_B \cdot \cos 30^\circ - T_D = 0 \quad [\text{I}]$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

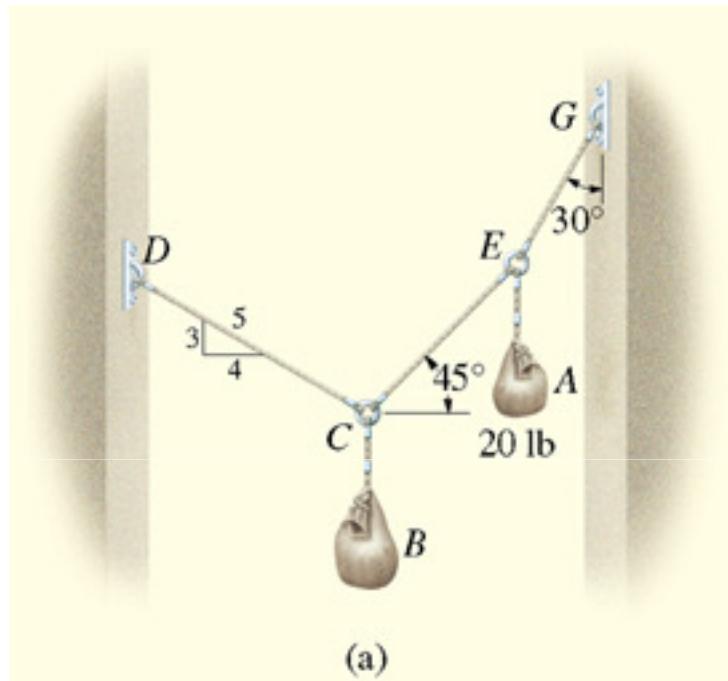
$$T_B \cdot \sin 30^\circ - 2,452 \text{ kN} = 0 \quad [\text{II}]$$

Substituindo I em II

$$T_B = 4,9 \text{ kN}$$

$$T_D = 4,25 \text{ kN}$$

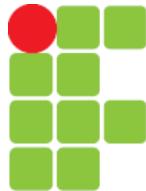
Exemplo 03: Se o saco mostrado na figura tiver peso de 20 lb em A, determine o peso dele em B e a força necessária em cada corda para manter o sistema na posição de equilíbrio mostrada.



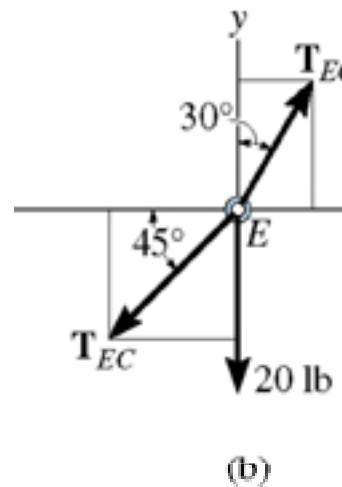
Equações de Equilíbrio

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \uparrow \sum F_y = 0$$

Solução: As equações de equilíbrio (no plano) proporcionam a solução de no máximo duas incógnitas. Para determinar a tensão nos cabos e o peso do saco B deve-se desenhar o DCL dos anéis E e C . Contudo, a solução deve iniciar pelo anel E , isso porque no anel E existem duas incógnitas e uma força conhecida enquanto que no anel C existem três incógnitas.



DCL do Anel E



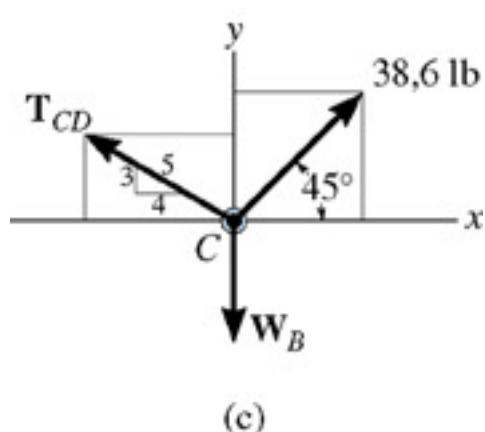
$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad T_{EG} \cdot \sin 30^\circ - T_{EC} \cdot \cos 45^\circ = 0 \quad [\text{I}]$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0; \quad T_{EG} \cdot \cos 30^\circ - T_{EC} \cdot \sin 45^\circ - 20 \text{ lb} = 0 \quad [\text{II}]$$

Substituindo I em II

$$T_{EC} = 38,6 \text{ lb}$$

$$T_{EG} = 54,6 \text{ lb}$$



$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad 38,6 \cdot \cos 45^\circ \text{ lb} - \frac{4}{5} T_{CD} = 0 \quad [\text{III}]$$

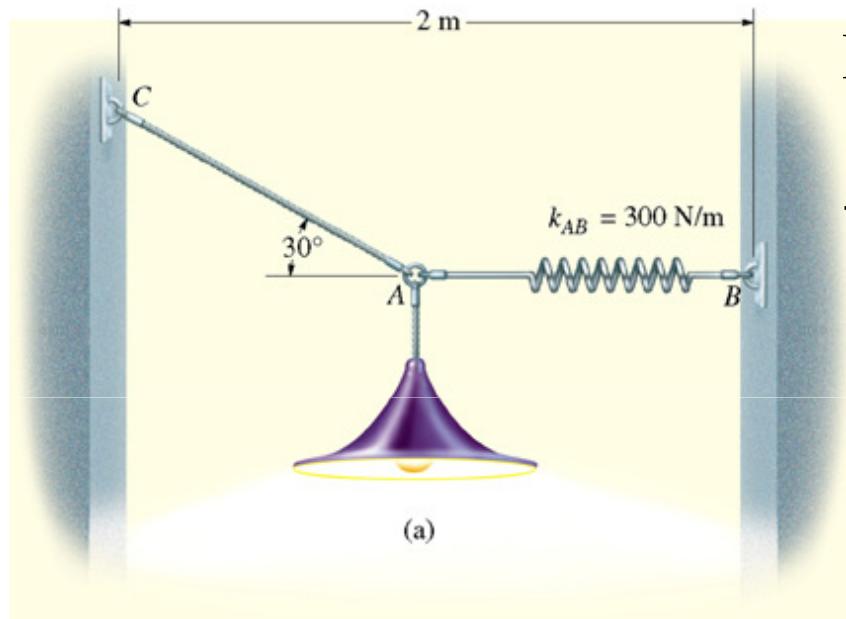
$$\uparrow + \sum F_y = 0; \quad \frac{3}{5} T_{CD} - 38,6 \cdot \sin 45^\circ \text{ lb} - W_B = 0 \quad [\text{IV}]$$

Resolvendo a equação III e substituindo em IV

$$T_{CD} = 34,2 \text{ lb}$$

$$W_B = 47,8 \text{ lb}$$

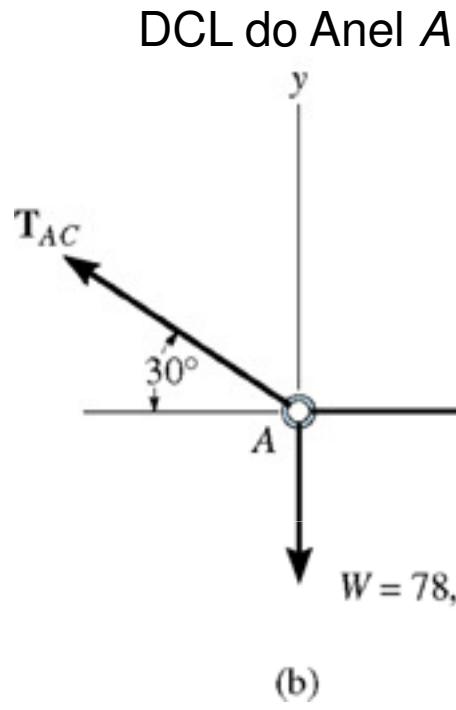
Exemplo 04: Determine o comprimento da corda AC mostrado na figura, de modo que a luminária de 8 kg seja suspensa na posição mostrada. O comprimento não deformado da mola AB é $l'_{AB} = 0,4\text{ m}$ e a mola tem rigidez $k_{AB} = 300\text{ N/m}$



Equações de Equilíbrio

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \text{e} \quad \uparrow \sum F_y = 0$$

Solução: observando a figura consta-se que a componente do cabo AC na horizontal mais o alongamento da mola deve ser igual a 2 m. Então, determinando o alongamento da mola na condição de equilíbrio pode-se determinar ao comprimento do cabo AC.



$$\rightarrow + \sum F_x = 0; \quad T_{AB} - T_{AC} \cdot \cos 30^\circ = 0 \quad [\text{I}]$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad T_{AC} \cdot \sin 30^\circ - 78,5 \text{ N} = 0 \quad [\text{II}]$$

Substituindo I em II

$$T_{AC} = 157 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 136 \text{ N}$$

Alongamento da mola

$$T_{AB} = k_{AB} \cdot s_{AB}$$

$$136 \text{ N} = 300 \text{ N/m} \cdot (s_{AB}) \therefore s_{AB} = 0,453 \text{ m}$$

Alongamento Total

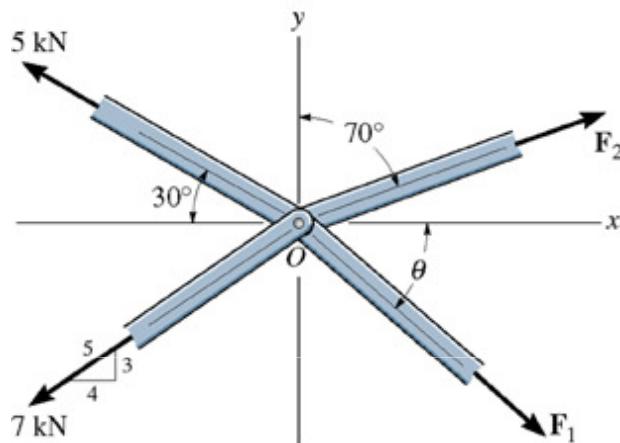
$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB} \therefore l_{AB} = 0,853 \text{ m}$$

Cálculo do comprimento cabo AC

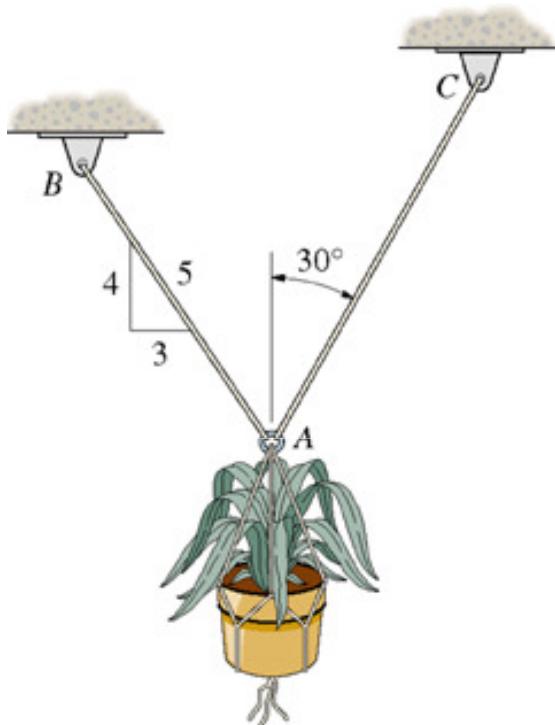
$$2 \text{ m} = l_{AC} \cdot \cos 30^\circ + 0,853 \text{ m}$$

$$l_{AC} = 1,32 \text{ m}$$

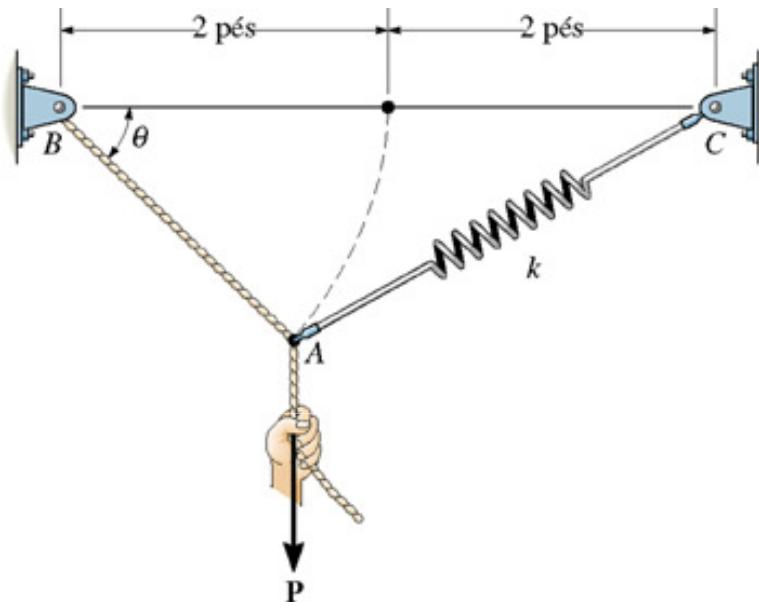
Exercício 01: As partes de uma treliça são acopladas por pinos na junta O , como mostrado na figura. (a) determine as intensidades de \mathbf{F}_1 e \mathbf{F}_2 para o equilíbrio. Suponha que $\theta = 60^\circ$. (b) determine agora as grandezas de F_1 e seu ângulo θ para equilíbrio. Suponha que $F_2 = 6 \text{ kN}$.



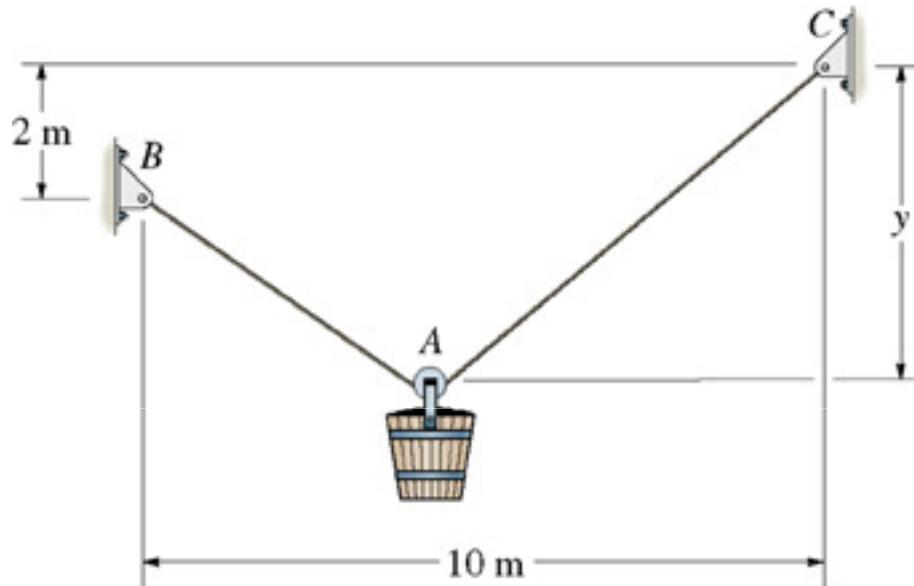
Exercício 02: Determine o peso máximo do vaso de planta que pode ser suportado, sem exceder uma força de tração de 50 lb nem no cabo *AB* nem no *AC*.



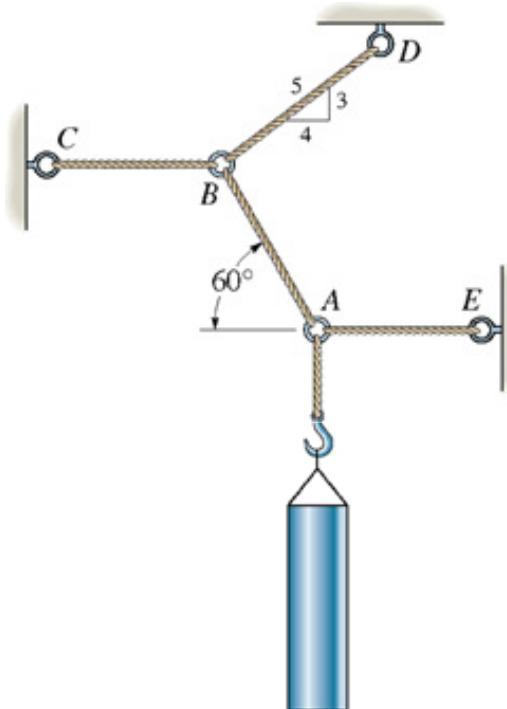
Exercício 03: Determine o comprimento da mola AC sem deformação se uma força $P = 80$ lb forma o ângulo $\theta = 60^\circ$ para que haja equilíbrio. A corda AB tem 2 pés de comprimento. Suponha que $k = 50$ lb/pé.



Exercício 05: O balde e seu conteúdo têm massa de 60 kg. Se o comprimento do cabo é de 15 m, determine a distância y da polia para a condição de equilíbrio. Despreze as dimensões da polia em A.



Exercício 06: O tubo de 30 kg é suportado em A por um sistema de cinco cordas. Determine a força em cada corda para a condição de equilíbrio.

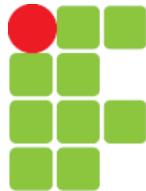




Conceito de Momento de uma Força

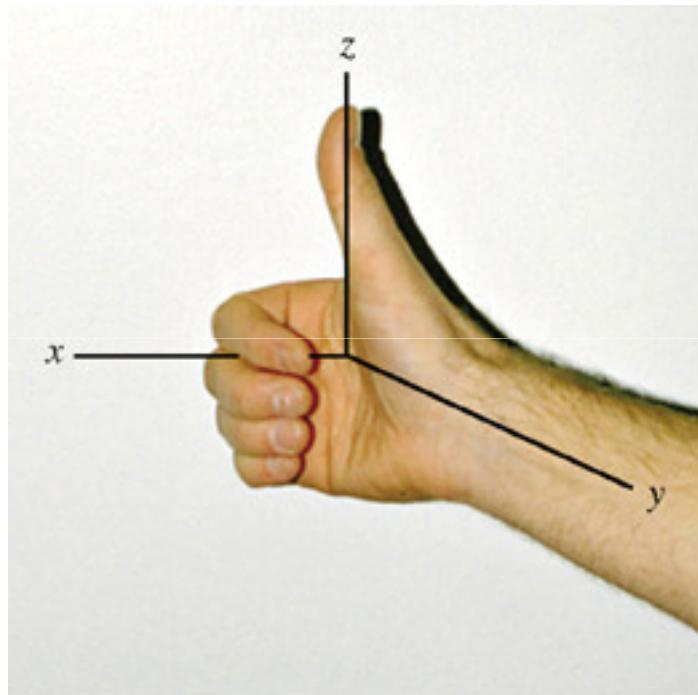
“O momento de uma força em relação a um ponto ou eixo fornece uma medida da tendência dessa força de provocar a rotação de um corpo em torno do ponto ou do eixo.”

Exemplo, abrir porta de uma residência . A força exercida na maçaneta cria a tendência da porta girar em torno do eixo da dobradiça.



Vetores Cartesianos

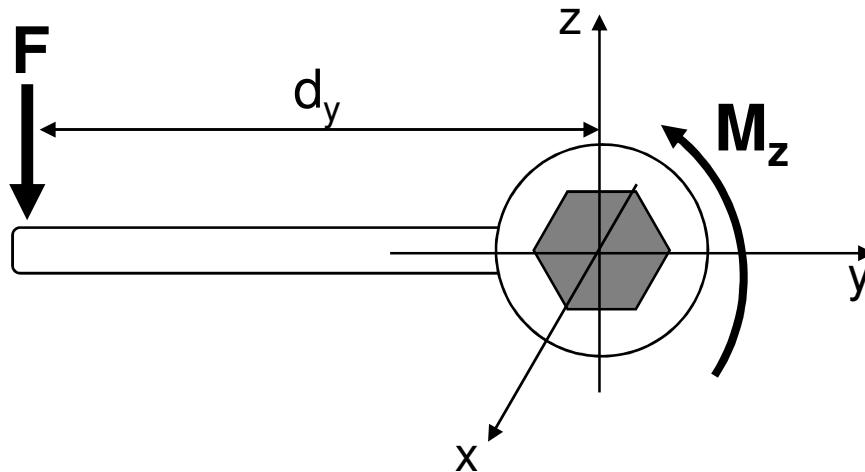
Sistema de Coordenadas Utilizando a Regra da Mão Direita



Sistema de coordenadas da mão direita

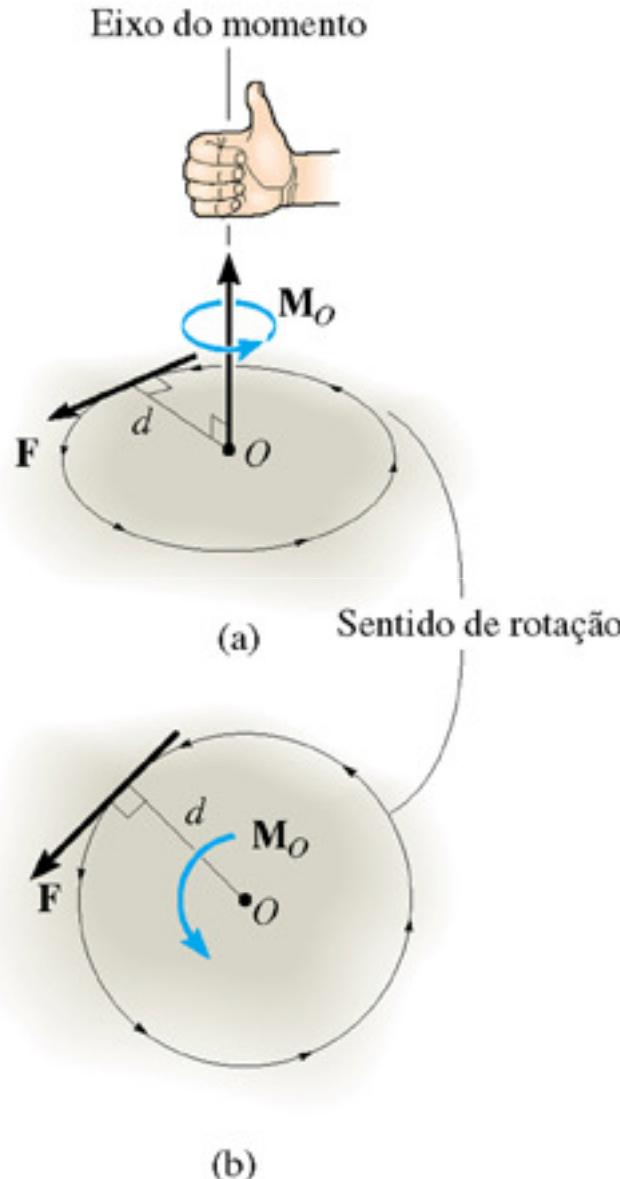
Diz-se que um sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas é da mão direita desde que o polegar dessa mão direita aponte na direção do eixo z , quando os dedos dessa mão são dobrados em torno desse eixo e orientados a partir do eixo x positivo para o eixo y positivo. Além disso, de acordo com essa regra o eixo z , para problema bidimensional, será orientado para fora, perpendicular a página.

A força tende a girar (torcer) a porca em torno do eixo x . Note que quanto maior a força ou a distância, maior será o efeito da rotação.



Momento ou torque é uma grandeza vetorial.

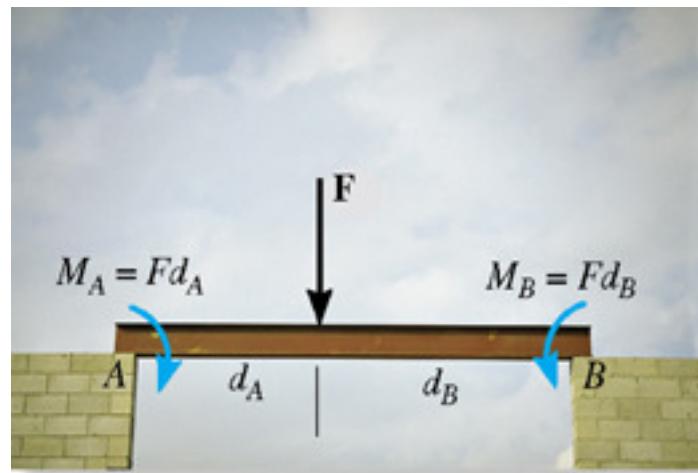
- ✓ Intensidade ou módulo = $F \cdot d$
- ✓ “ d ” é a distância perpendicular do ponto O (ponto onde se deseja medir o efeito do momento) até a linha de ação da força.
- ✓ A direção e o sentido são determinados pela regra da mão direita.



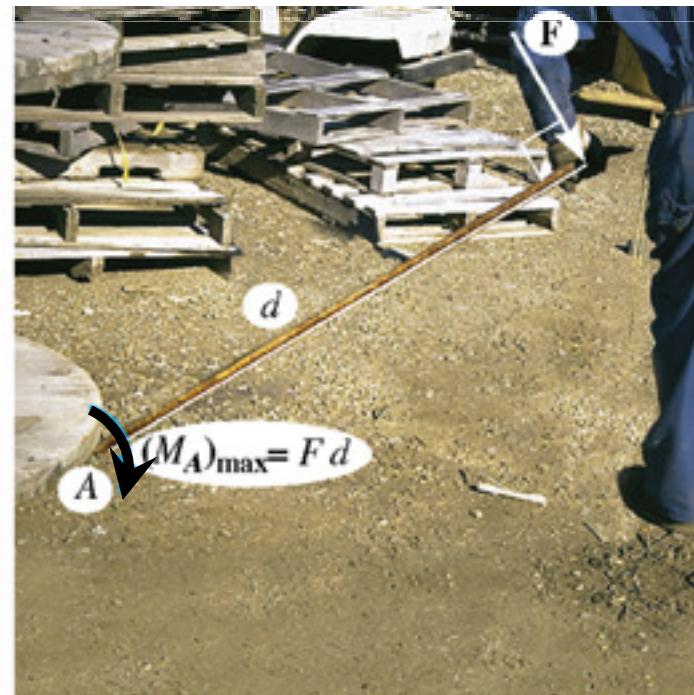
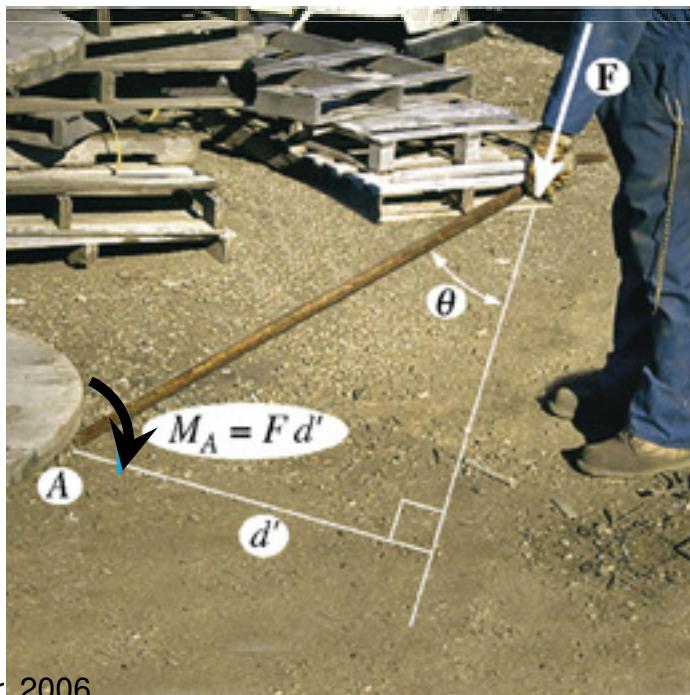
- O sentido de rotação é determinado pelos dedos da mão direita que devem ser curvados no sentido de rotação da força.
- O polegar orienta determina a direção e o sentido do vetor momento que será sempre perpendicular ao plano que contém a força e a distância.



*“O momento de uma força nem sempre provocará rotação. Por exemplo, a força **F** tende a girar a viga-mestra no sentido horário em relação ao suporte A, com momento $M_A = F \cdot d_A$. A rotação efetiva ocorreria se o suporte em B fosse removido. Da mesma maneira **F** cria uma tendência de rotação da viga-mestra no sentido anti-horário em relação a B, com um momento $M_B = F \cdot d_B$. Nesse caso, o suporte em A evita a rotação.”*

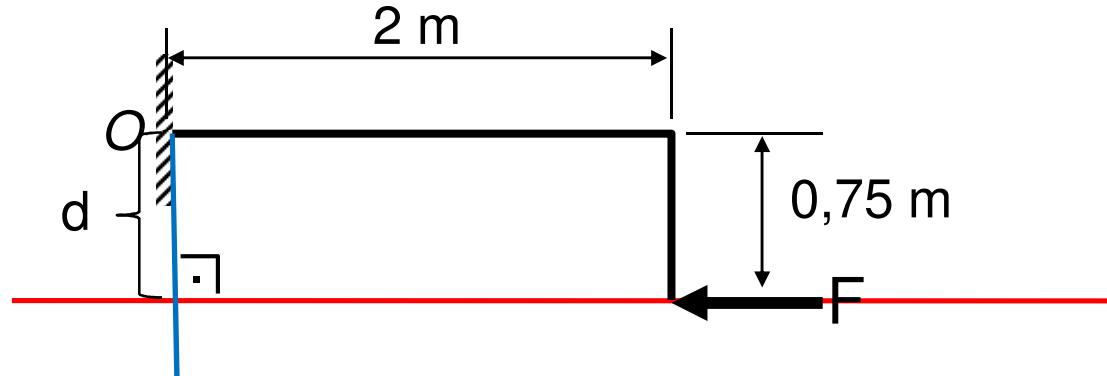


“Ao empurrar para baixo a barra da alavanca, a carga sobre o piso no ponto A pode ser levantada. O efeito de giro provocado pela força aplicada é devido ao momento em relação ao ponto A. Para produzir esse momento com um mínimo de esforço, por intuição sabemos que a força deveria ser aplicada em uma das extremidades da barra; porém, a direção na qual essa força é aplicada também é importante. Isso ocorre porque o momento é o produto da força e do braço do momento. Note que quando a força está a um ângulo de $\theta < 90^\circ$, a distância do braço de momento é menor do que quando ela é aplicada perpendicularmente à barra, pois $\theta = 90^\circ$ isto é $d' > d$. Em consequência, maior momento é produzido quando a força é aplicada no ponto mais afastado do ponto A e perpendicularmente ao eixo da barra, de modo a maximizar o braço de momento.”



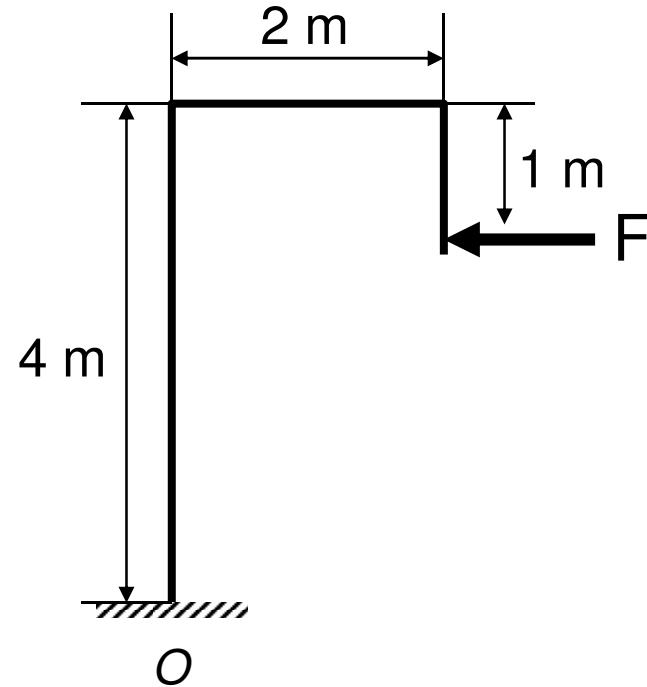
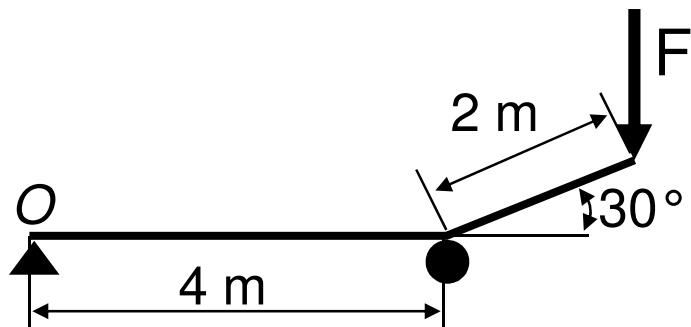
Fonte: Hibbeler, 2006

Exemplo 01: Determine o momento da força $F = 50$ kN em relação ao ponto O em cada caso ilustrado.

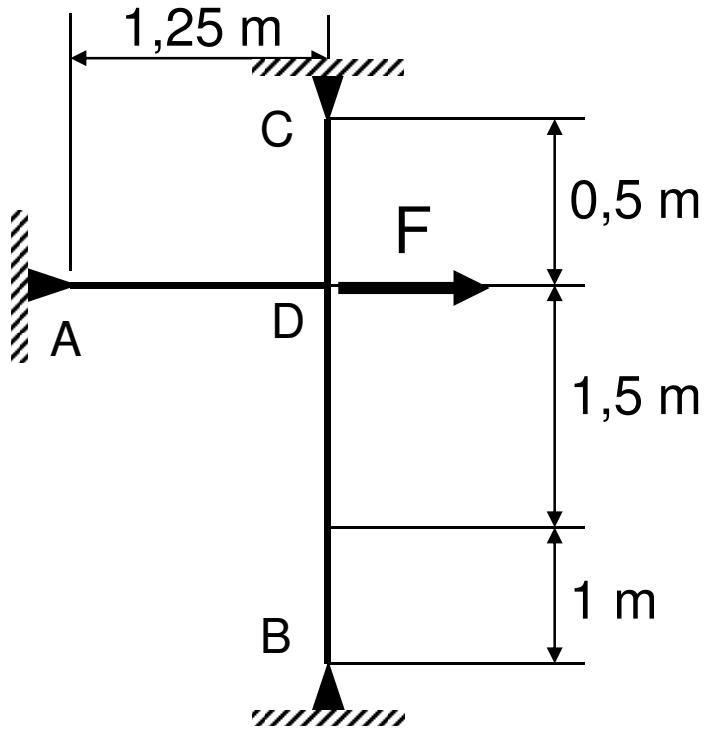


- 1º traça-se a linha de ação da força
- 2º do ponto onde se deseja calcular o momento traça-se uma reta perpendicular a linha de ação da força.
- 3º a distância compreendida do ponto onde deseja-se calcular o momento e o ponto de interseção das duas retas é o braço de alavanca da força.
- 4º o momento é calculado pelo produto do módulo da força pelo braço de alavanca “d”, ou seja, $M = 50 \text{ N} * 0,75 \text{ m} = 37,5 \text{ N.m}$

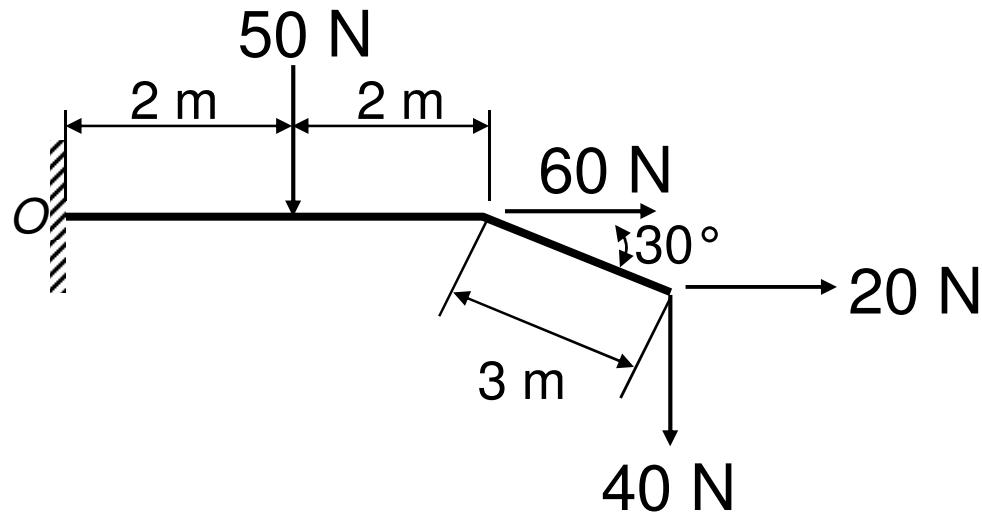
Exercício 01: Determine o momento da força $F = 50 \text{ kN}$ em relação ao ponto O em cada caso ilustrado.



Exercício 02: Determine os momento da força de 800 N que atua sobre a estrutura mostrada na figura em relação aos pontos A, B, C, D.



Exercício 03: Determine os momento resultante das quatro forças que atuam na haste mostrada na figura em relação ao ponto O .

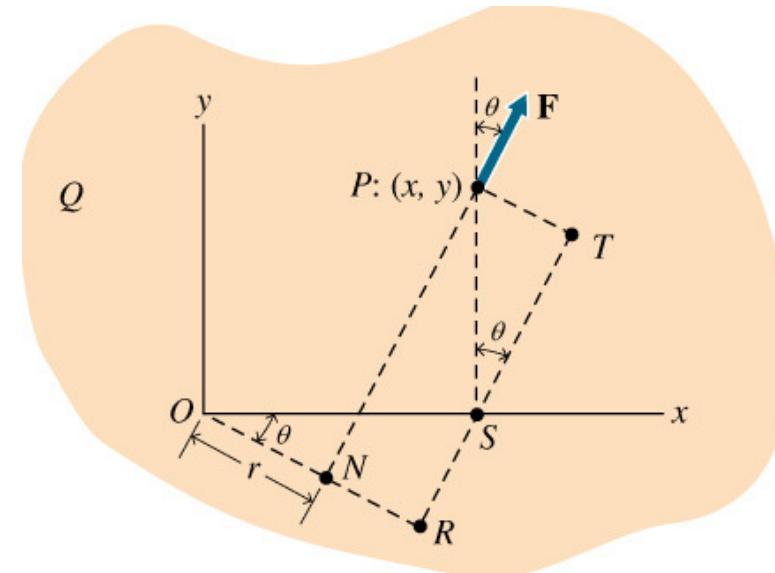
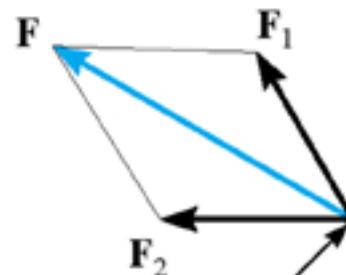


Princípio dos Momentos

Teorema de Varignon (1654-1722)

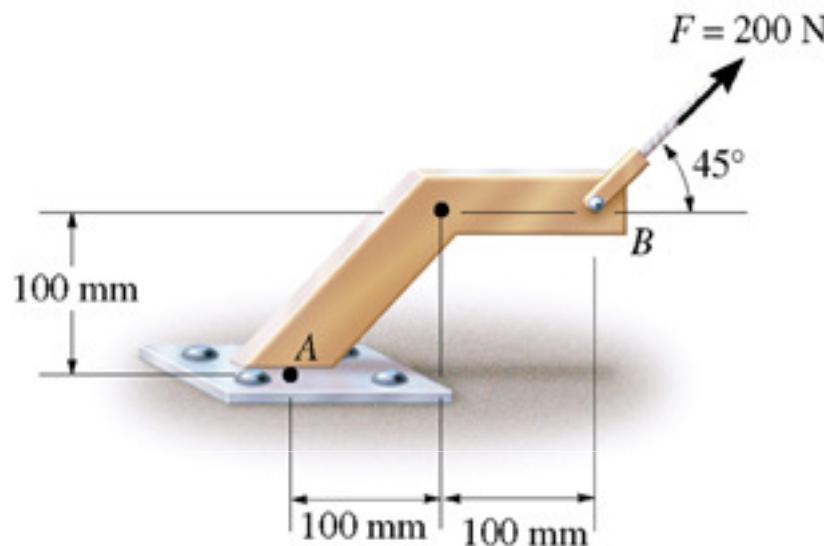
“O teorema estabelece que o momento de uma força em relação a um ponto é igual à soma dos momentos dos componentes das forças em relação ao mesmo ponto.”

$$\overrightarrow{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}$$

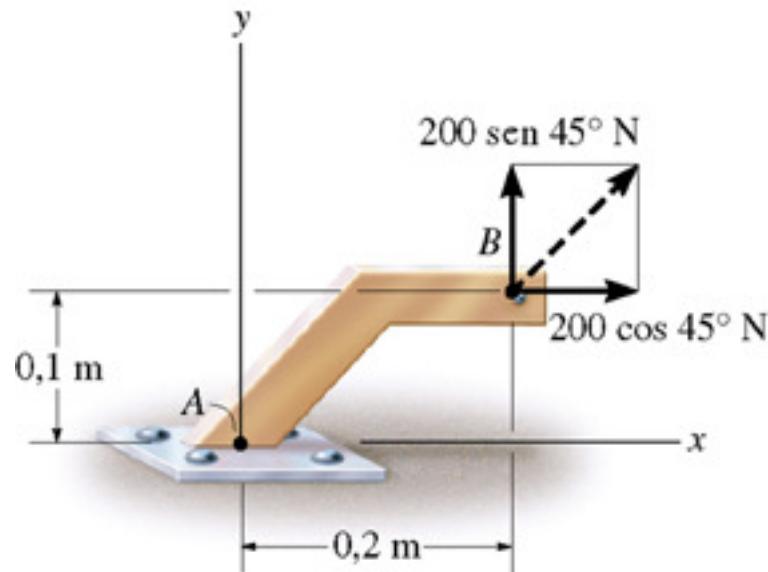
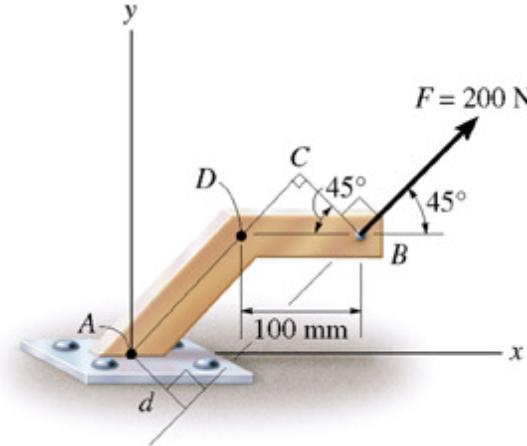


©2001 Brooks/Cole, a division of Thomson Learning, Inc. Thomson LearningTM
is a trademark used herein under license.

Exemplo 02: Uma força de 200 N atua sobre o suporte mostrado na figura. Determine o momento da força em relação ao ponto A.



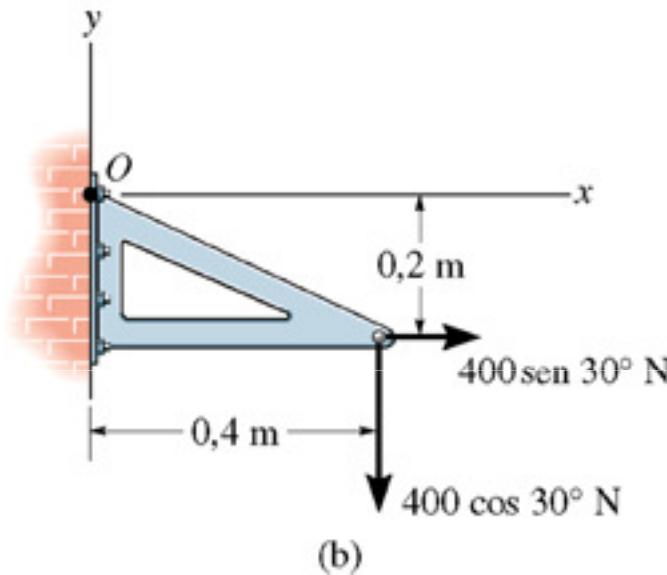
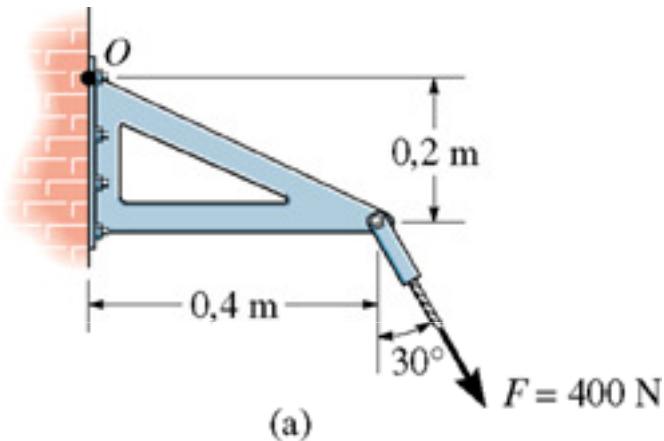
(a)



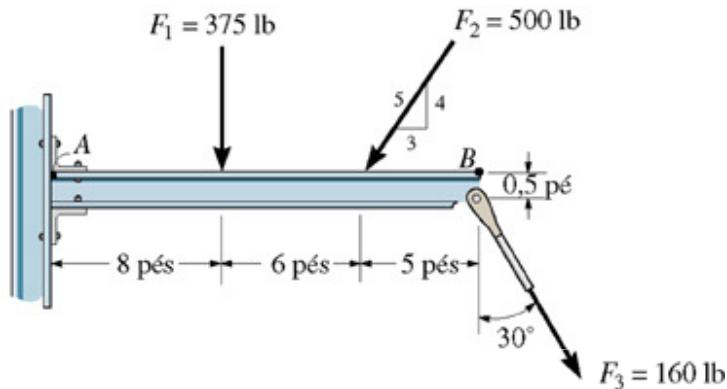
(c)



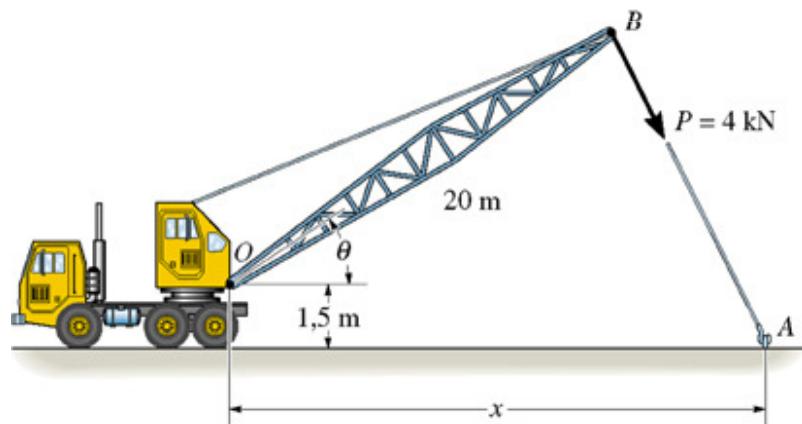
Exemplo 03: A força F é aplicada nos terminais de cada suporte em ângulo mostrado na figura. Determine o momento da força em relação ao ponto O .



Exercício 03: Determine momento em relação ao ponto B de cada uma das três forças agindo sobre a viga.

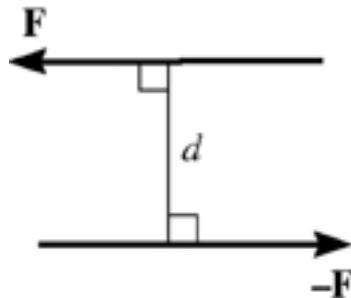


Exercício 04: O cabo do exerce uma força $P = 4 \text{ kN}$ na extremidade do guindaste de 20 m de comprimento. (a) Se $\theta = 30^\circ$, determine o valor de x do gancho preso em A, de forma que essa força crie um momento máximo em relação ao ponto O. Nessa condição, qual é esse momento? (b) Sendo $x = 25 \text{ m}$, determine a posição θ do guindaste, de modo que a força crie um momento máximo em relação ao ponto O. Qual é esse momento?





Momento de um Binário



“Um binário é definido como duas forças paralelas de mesma intensidade, sentido opostos e separadas por uma distância perpendicular d, como mostra a figura acima. Como a força resultante é nula, o único efeito de um binário é produzir rotação ou tendência de rotação em determinada direção. O momento produzido por um binário é chamado momento de um binário.”
(Hibbeler, 2006)

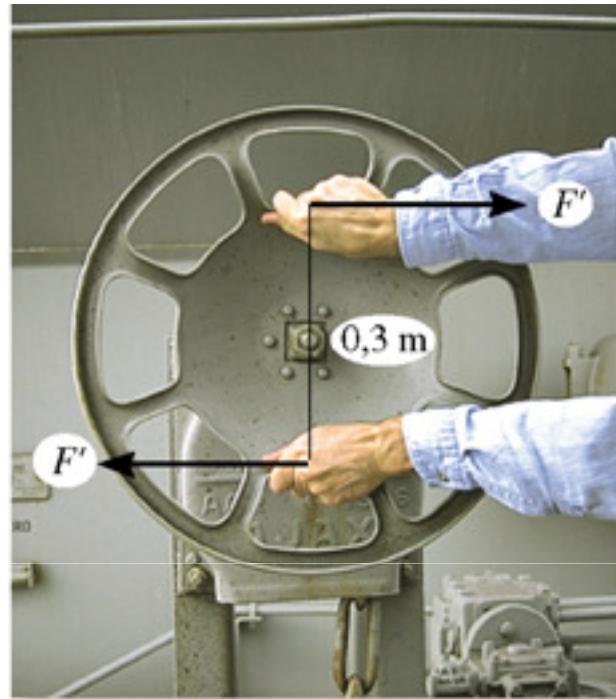
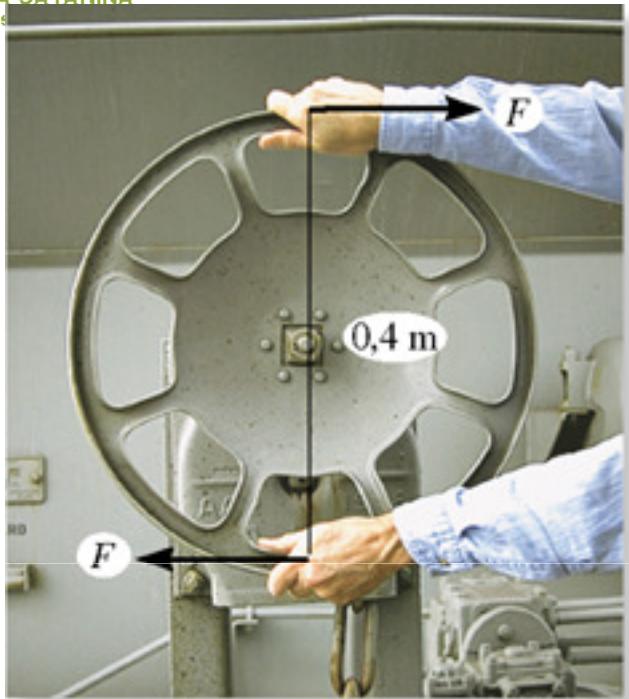
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$M = F \cdot d$$

$$\mathbf{M}_R = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



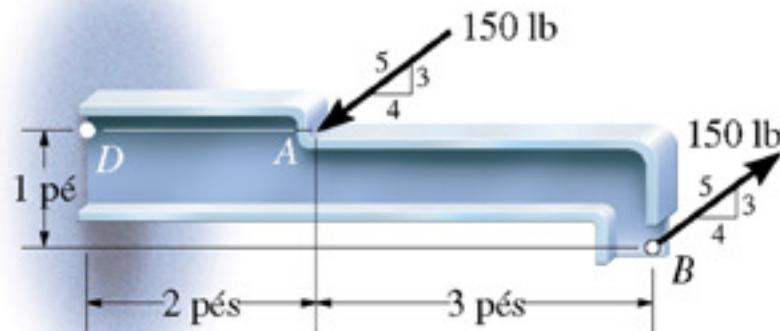
Momento de um Binário



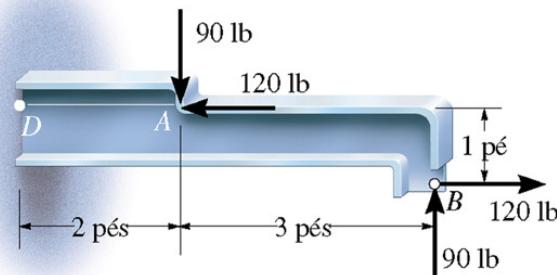
“Um momento de 12 N.m é necessário para girar o eixo conectado ao centro do volante. Para se fazer isso, é recomendável a aplicação de um binário, que é bastante eficiente nesses casos, porque produz rotação pura.[...].” (Hibbeler, 2006)



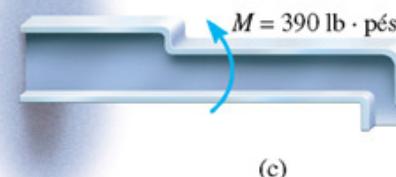
Exemplo 04: Determine o momento de binário que age no elemento mostrado na figura.



(a)



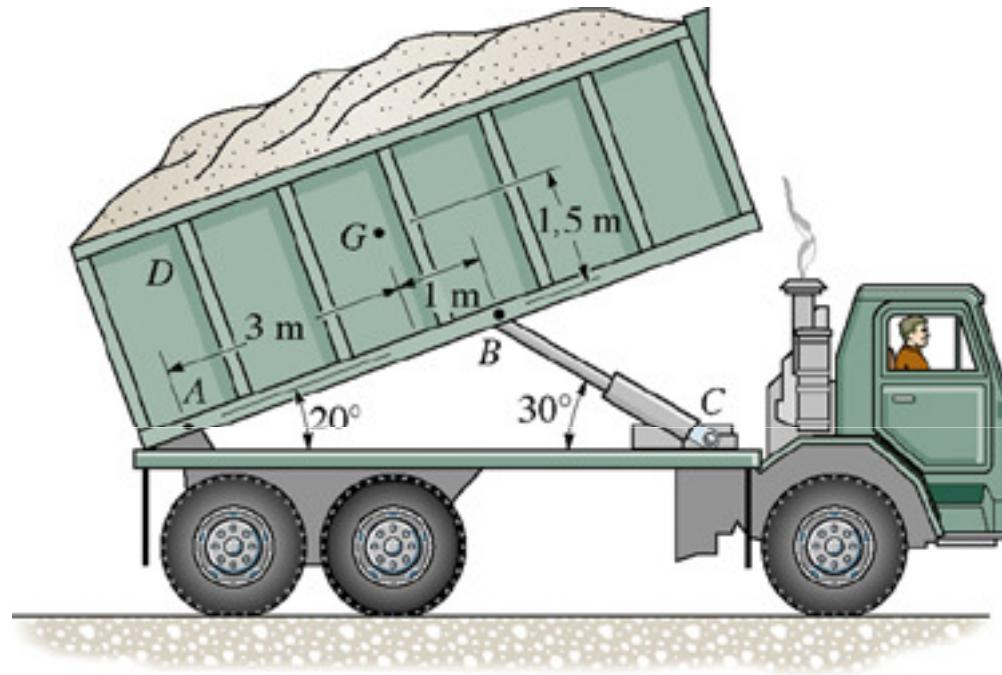
(b)



(c)



Equilíbrio de Um Corpo Rígido



Todo corpo rígido é INDEFORMÁVEL e diferentemente de um ponto material suas dimensões são relevantes à análise estrutural.



Equilíbrio de Um Corpo Rígido

Quando analisamos o equilíbrio de um ponto material, verificamos que para a condição ele deve permanecer parado*, ou seja, o movimento de translação deve ser impedido. Essa condição é atendida quando o somatório das forças externas que agem sobre o ponto material é nulo.

Em um corpo rígido essa condição não é suficiente para a condição de equilíbrio, assim, além de impedir o movimento de translação deve-se impedir também movimento de rotação. Portanto, em um corpo rígido, o equilíbrio é verificado quando o somatório das forças externas for nulo e o somatório dos momentos das forças externas em relação a um ponto do corpo rígido também for nulo.

* Para simplificar o estudo, vamos considerar que quando um corpo está em equilíbrio ele está parado, todavia, não podemos esquecer que se um corpo translada com velocidade constante ele também está na condição de equilíbrio.

Os elementos que impedem movimentos, seja de translação e/ou de rotação, são chamados de APOIOS ou VÍNCULOS. Basicamente podemos classificar os apoios em três classes ou ordens.

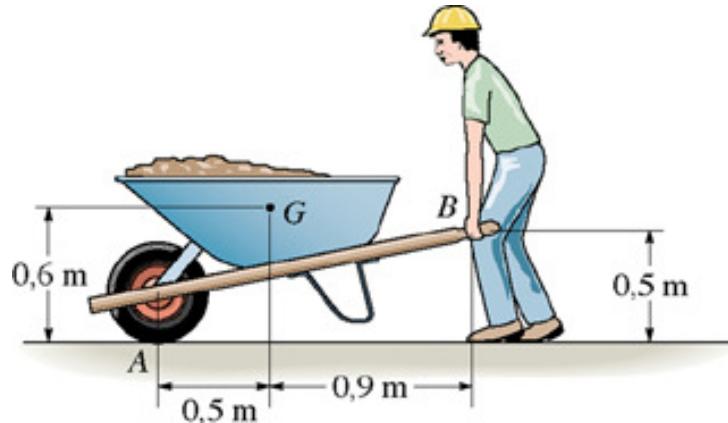
Apoios de PRIMEIRA ORDEM impedem apenas a translação numa única direção, proporcionando a liberdade do corpo rígido transladar e rotacionar em determinada direção, dá-se o nome a esses apoios de **ROLETES**.

Apoios de SEGUNDA ORDEM impedem completamente a translação mas não impedem a rotação, dá-se o nome a esses apoios de **ARTICULAÇÕES**.

Apoios de TERCEIRA ORDEM impedem qualquer tipo de movimento, e dá-se o nome de **ENGASTE**.

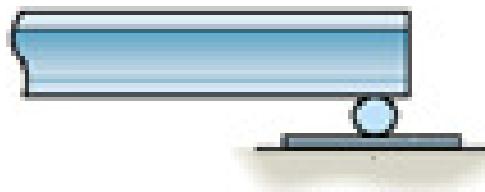


Roletes



Nos exemplos mostrados os apoios impedem o movimento de translação vertical, ou seja, oferecem apenas UMA REAÇÃO ao movimento de translação.

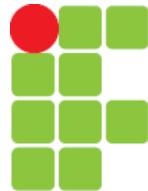
Representação



rolete

Representação da Reação ao Movimento





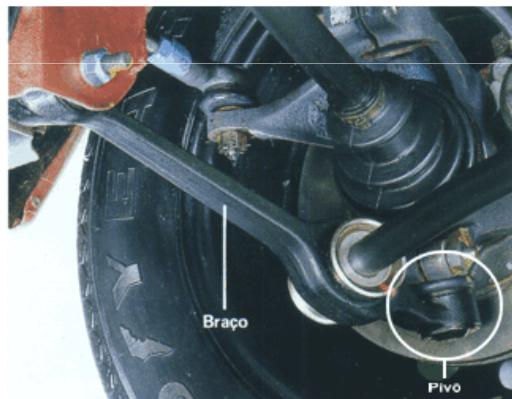
Articulações



Mancal de rolamentos



Lança Escavadeira



Suspensão Automotiva



Suspensão Automotiva

Nos exemplos mostrados os apoios permitem apenas movimento de rotação, ou seja, oferecem DUAS REAÇÕES ao movimento de translação.



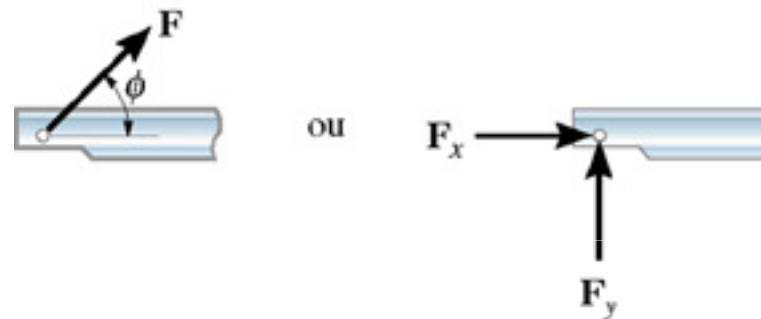
Articulações

Representação



pino

Representação da Reação ao Movimento





Engaste

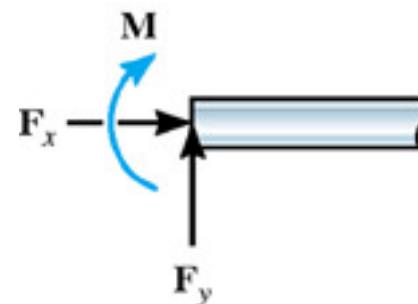


Nos exemplos mostrados o apoio não permite qualquer tipo de movimento seja de translação ou rotação, assim, oferece TRÊS REAÇÕES.

Representação



Representação da Reação ao Movimento



Tipos de Apoios

Prof. MSc Eng Halley Dias

Tipo de acoplamento	Reação	Tipo de acoplamento	Reação
Cabo	Uma incógnita: F	Pino externo	Duas incógnitas: F_x, F_y
Rolete	Uma incógnita: F	Pino interno	Duas incógnitas: F_x, F_y
Apoio	Uma incógnita: F	Engaste	Três incógnitas: F_x, F_y, M

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Equações de Equilíbrio para Corpo Rígido

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Essas três equação são suficientes para a manutenção da condição de equilíbrio de um corpo rígido. Observe que as três equações forma um sistema que torna possível resolver problemas com no máximo três incógnitas. Isto quer dizer que nos problemas de mecânica o número das reações envolvidas não pode ultrapassar a três. Por exemplo: um elemento poderá ser apoiado por um rolete mais uma articulação, ou ser apenas engastado, mas não poderá ser apoiado por duas articulações ou um engaste mais um rolete ou uma articulação*.

Na verdade existem três tipos de estruturas, HIPOESTÁTICAS, ISOESTÁTICAS E HIPERESTÁTICAS. Na primeira o número de incógnitas é menor do que o número de equações de equilíbrio. Na segunda é o caso em estudo, ou seja, o número de incógnitas é igual ao número de equações de equilíbrio. E a terceira é o caso no qual o número de incógnitas é maior que o número de equações de equilíbrio. Nos atentaremos ao estudo do segundo caso.

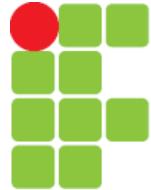
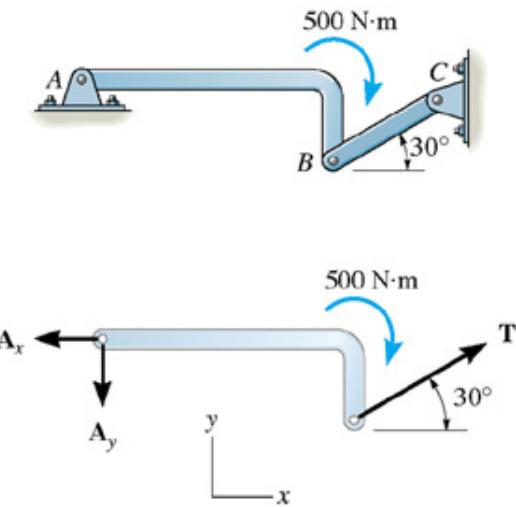
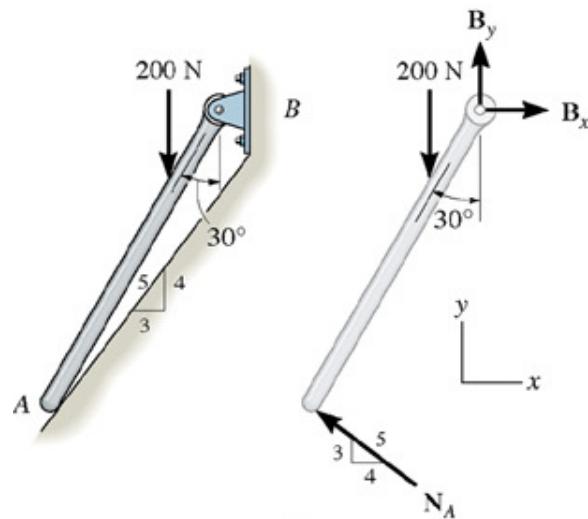


Diagrama de Corpo Livre - DCL

Da mesma maneira com visto no estudo do equilíbrio de um ponto material, o DCL é de fundamental importância na solução de problemas de equilíbrio de copos rígidos. O DCL é o desenho do entorno da estrutura no qual são representados todas as forças externas e momentos que atuam sobre a estrutura (incluindo as reações) e todas as dimensões e ângulos da estrutura em relação a um sistema de coordenadas.

Exemplos da construção de DCL

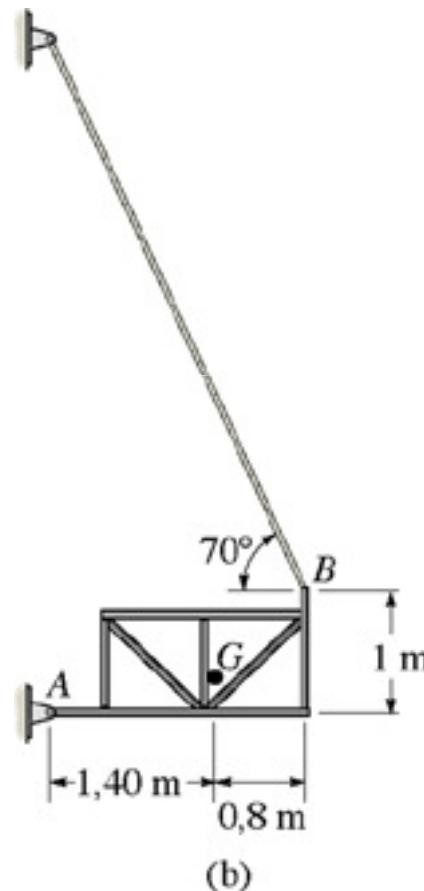




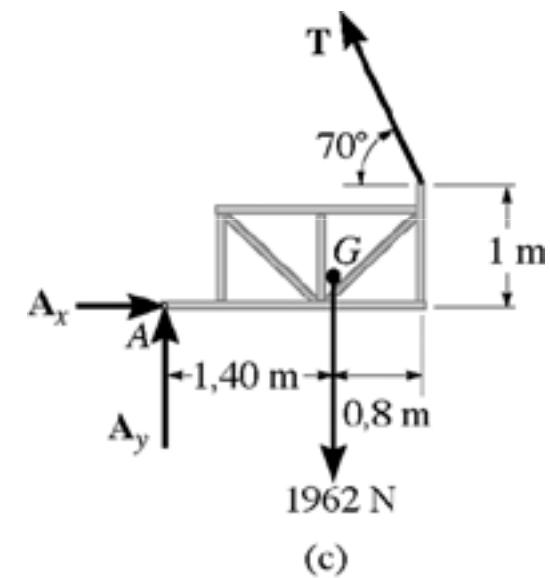
Exemplo da construção de DCL



(a)



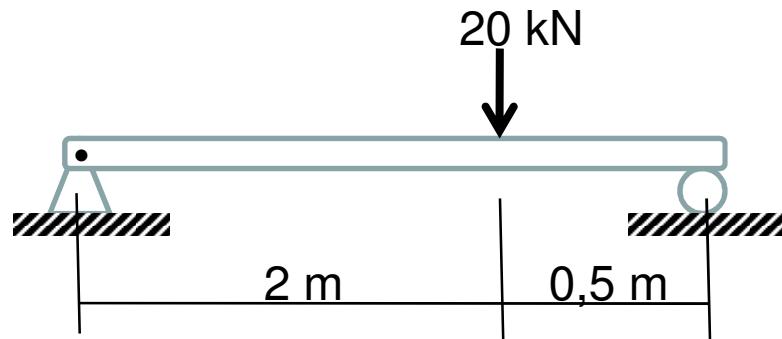
(b)



(c)

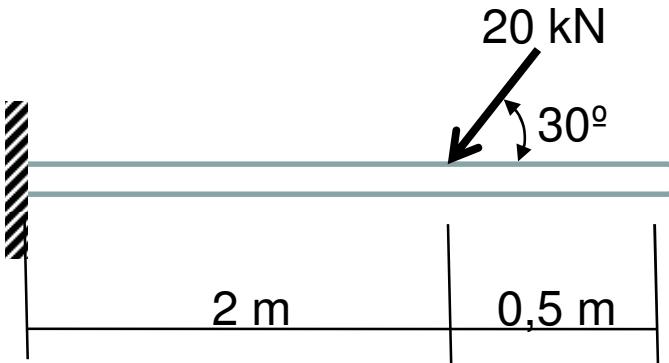


1º Caso: viga biapoiada



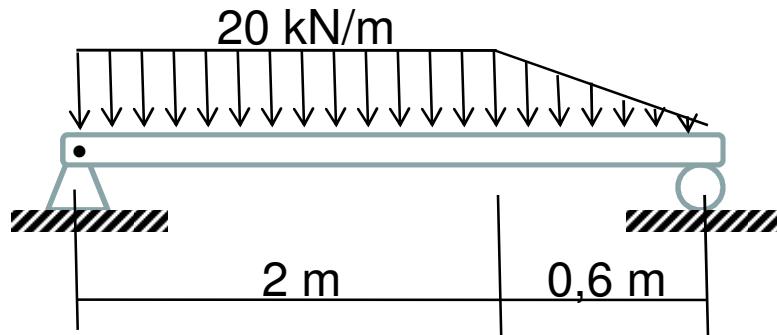


2º Caso: engaste





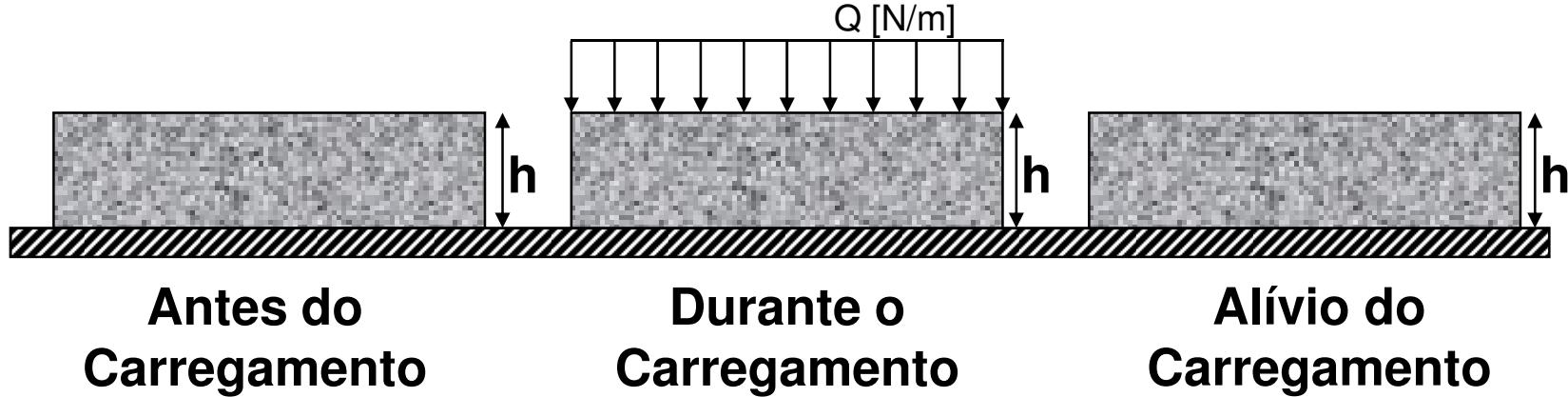
3º Caso: carga distribuída



Introdução à Mecânica

dos Corpos Deformáveis

Análise de um Corpo Rígido

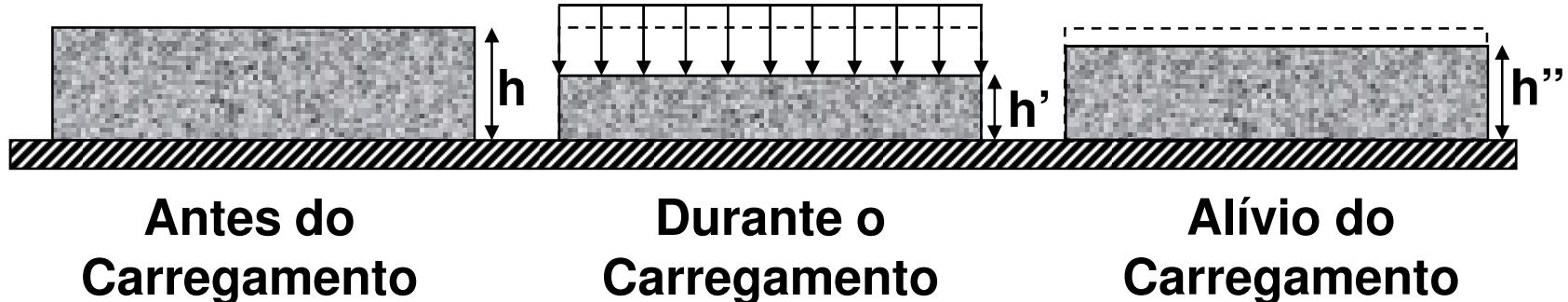


A altura ***h*** do corpo rígido não se altera, pois,

Corpos Rígidos são indeformáveis.

Na realidade corpos sujeitos a carregamentos sofrem deformações, em maior ou menor grau, dependendo, simultaneamente, do tipo de carregamento e das propriedades dos materiais.

Análise de um Corpo Real (deformável)



Antes do
Carregamento

Durante o
Carregamento

Alívio do
Carregamento

A altura **h** do corpo se altera, pois,
corpos reais são **deformáveis**.

h : altura do corpo antes de sofrer o carregamento;

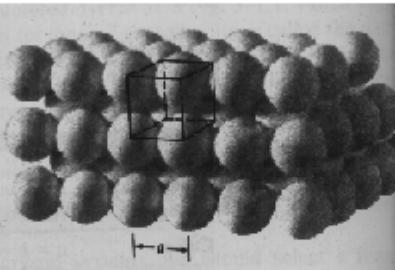
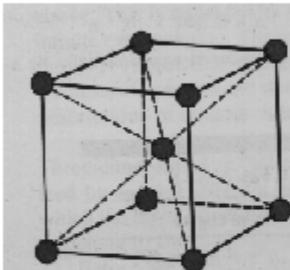
h' : altura do corpo durante o carregamento;

h'' : altura do corpo após o carregamento.



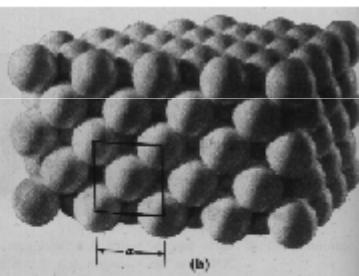
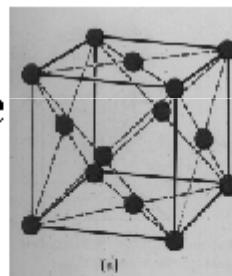
Estrutura Cristalina

Figure 2

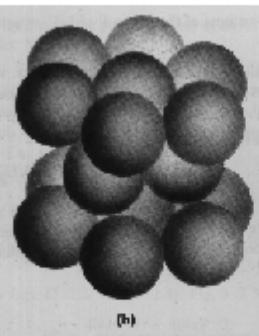
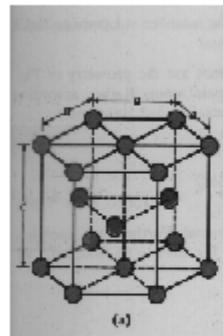


Face centered
cubic (fcc)
structure of
a metal.

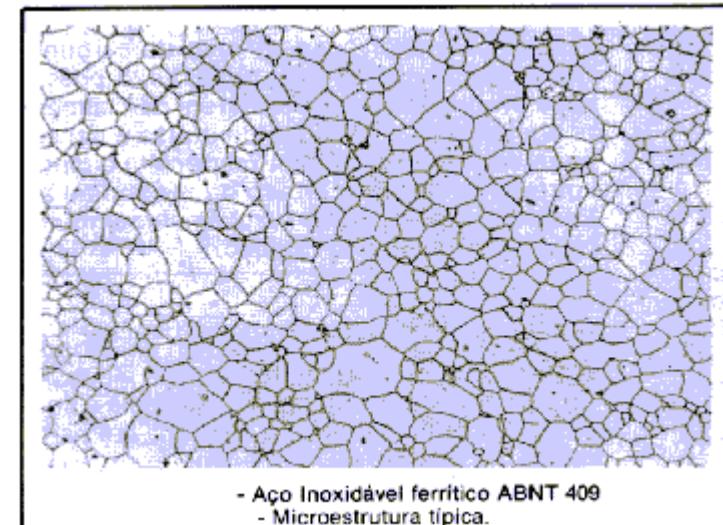
Face centered
cubic (fcc) structure
of a metal.



Hexagonal close packed
structure of a metal.



From Van Vlack, pp. 68, 70, and 74.

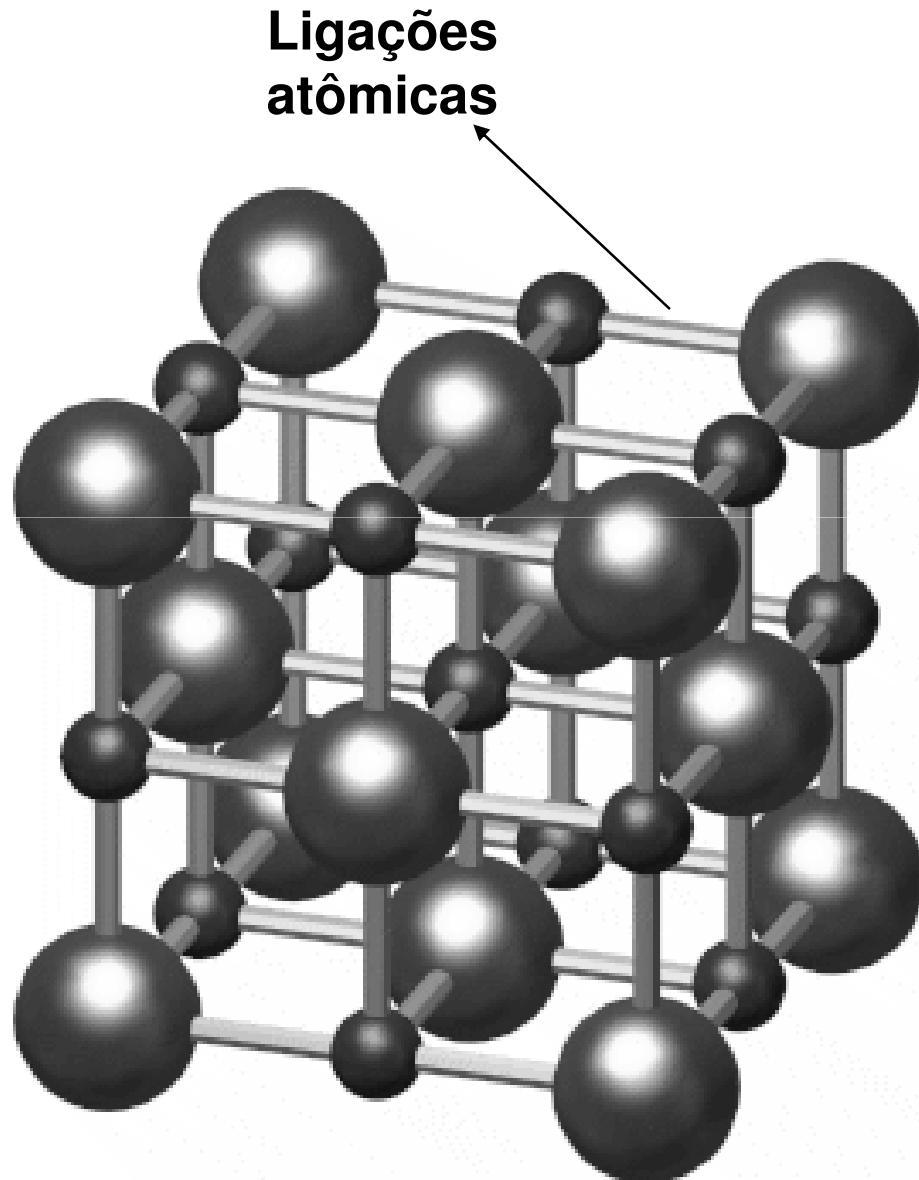


- Aço Inoxidável ferrítico ABNT 409
- Microestrutura típica.

Autor: Engº Ciro de Toledo Piza Tebecherani
É permitida a reprodução total ou parcial deste
artigo, desde que citada a fonte e o autor.
Para maiores informações entrar em contato
[com ciropiza@osite.com.br](mailto:ciropiza@osite.com.br)
CLIQUE AQUI!

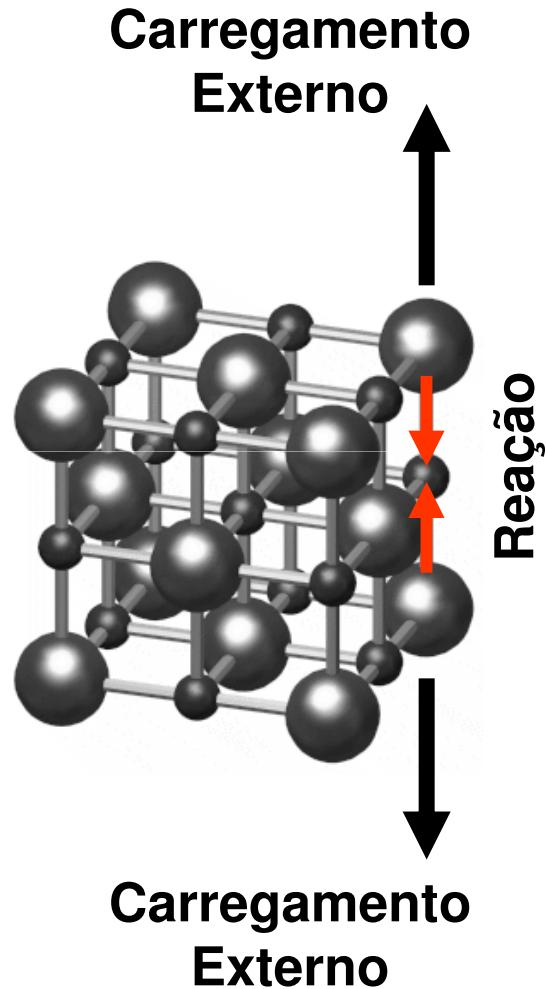


Forças Internas



**Ligações atômicas são
as forças internas
responsáveis pela união
(coesão) atômica dos
materiais**

Forças Internas



Forças internas exercem reação ao carregamento externo e tal reação é manifestada no grau de deformação do material. Em outras palavras, as forças internas tendem a preservar a geometria original do material antes do carregamento. Portanto, as forças internas se opõe ao carregamento externo.



Conceito de Resistência dos Materiais

“Resistência dos Materiais é o ramo da mecânica que estuda as relações entre cargas externas aplicadas a um corpo deformável e a intensidade das forças internas que atuam dentro do corpo.”

Hibbeler, 2006.

Condições de Equilíbrio

$\Sigma M = 0$; somatório dos momentos.

$\Sigma F = 0$; somatório das forças.

Sistema Coplanar

$\Sigma M_z = 0$

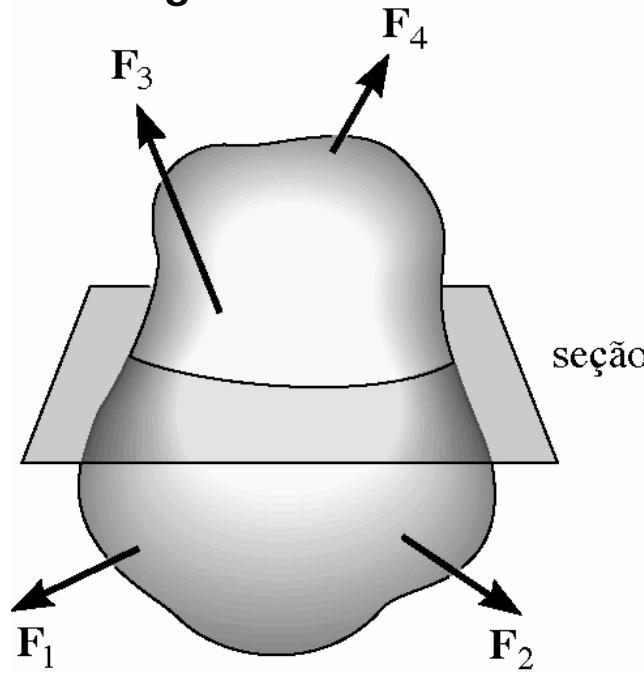
$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

Determinação dos Esforços Internos

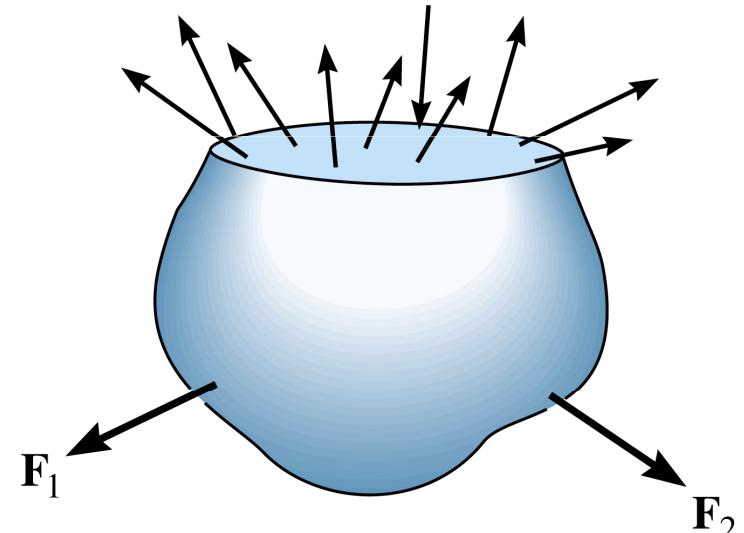
- Método das Seções -

Carregamento Externo



(a)

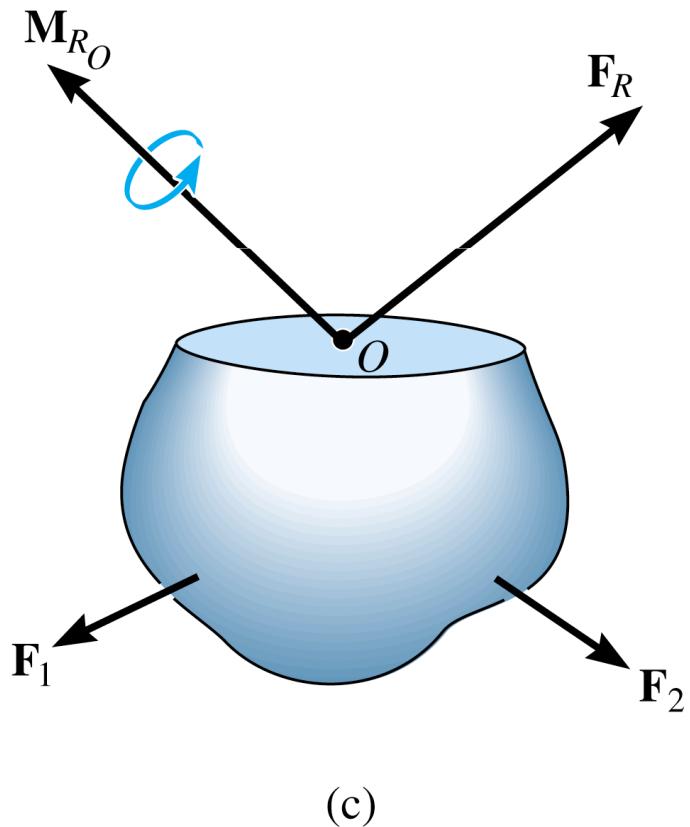
Distribuição das solicitações internas



(b)

Determinação dos Esforços Internos

- Método das Seções -



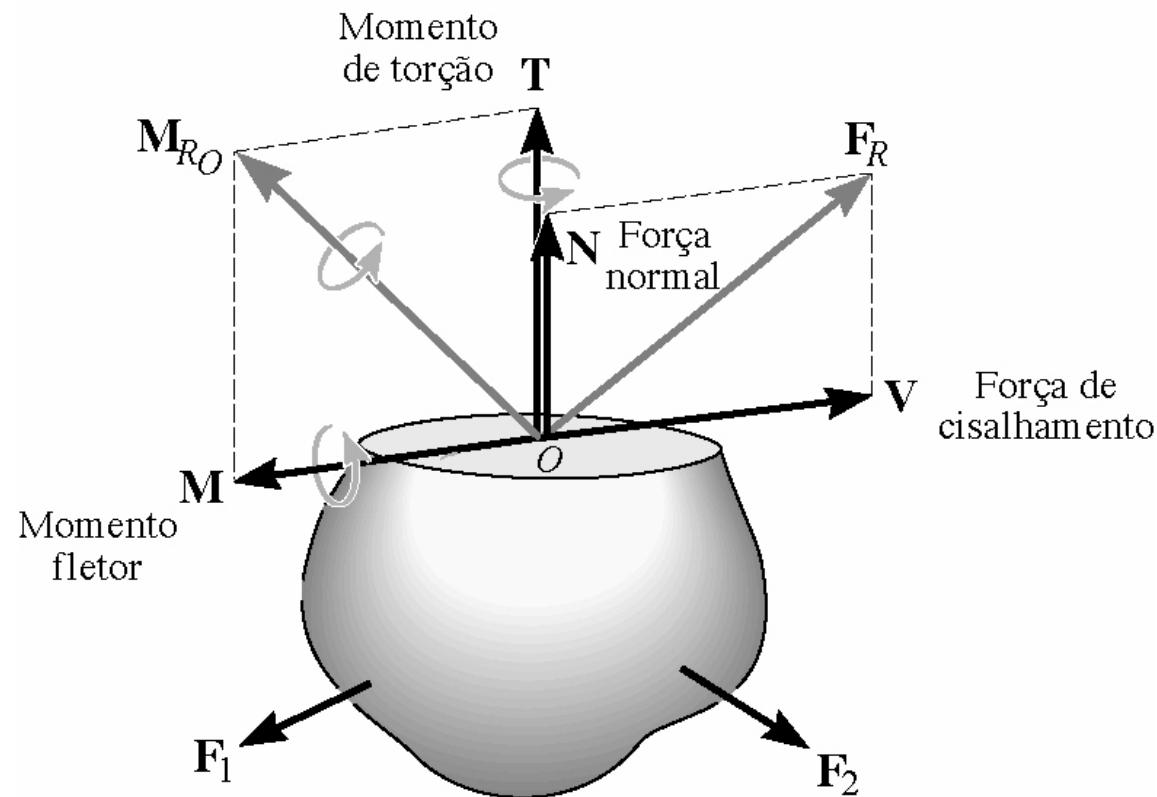
Aplicando as equações de equilíbrio no ponto O da seção (geralmente o centróide) pode-se relacionar as forças externas sobre o corpo à força resultante F_R e ao momento M_{RO} .

M_{RO} e F_R : solicitações internas resultantes responsáveis por manter o corpo unido quando submetido a cargas externas.

Determinação dos Esforços Internos

- Método das Seções -

Componentes das Solicitações Internas



(d)

Determinação dos Esforços Internos

- Método das Seções -

- **N:** Esforço Normal à seção – perpendicular a seção –
- **V:** Esforço Cortante à seção – paralelo a seção –
- **T:** Torque ou Momento Torçor – é perpendicular a seção e associado a possibilidade de rotação da seção em torno do eixo perpendicular a seção.
- **M:** Momento Fletor – tende a fletir (dobrar) o corpo em relação ao eixo localizado no plano da área.

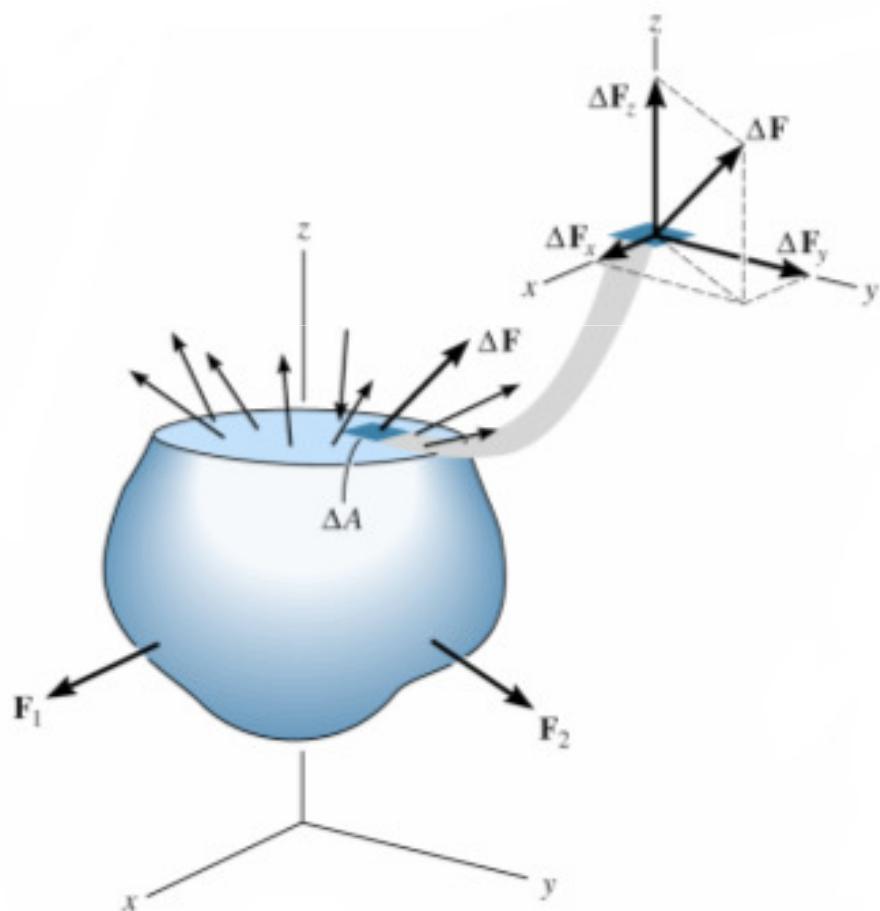
Tensão

Hipóteses com relação às propriedades dos materiais:

- Contínuo: o material apresenta distribuição uniforme de matéria, ou seja, não apresenta vazios.
- Coeso: todas as partes do material estão muito bem unidas, em vez de ter trincas, separações ou outras falhas.

Tensão

Consideremos um força finita ΔF , porém muito pequena, que atua sobre uma área ΔA como mostra a figura abaixo



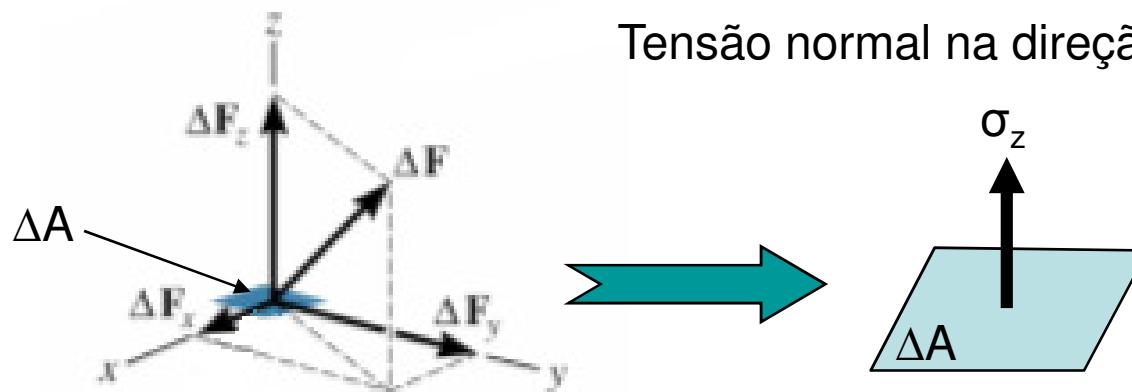
Sejam ΔF_x ; ΔF_y ; ΔF_z , os três componentes de ΔF , assumidos como tangentes e normal à área ΔA . Se fizermos ΔA tender a zero a força ΔF e seus componentes também tendem a zero, contudo, a relação $\Delta F/\Delta A$ tende para um valor finito.

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Conceito de Tensão Normal

“A intensidade da força, ou a força por unidade de área, que atua no sentido perpendicular a ΔA , é definida com tensão normal, σ (sigma). Visto que ΔF_z é normal à área, então: ” Hibbeler, 2006.

$$\sigma_z = \frac{\Delta F_z}{\Delta A}$$



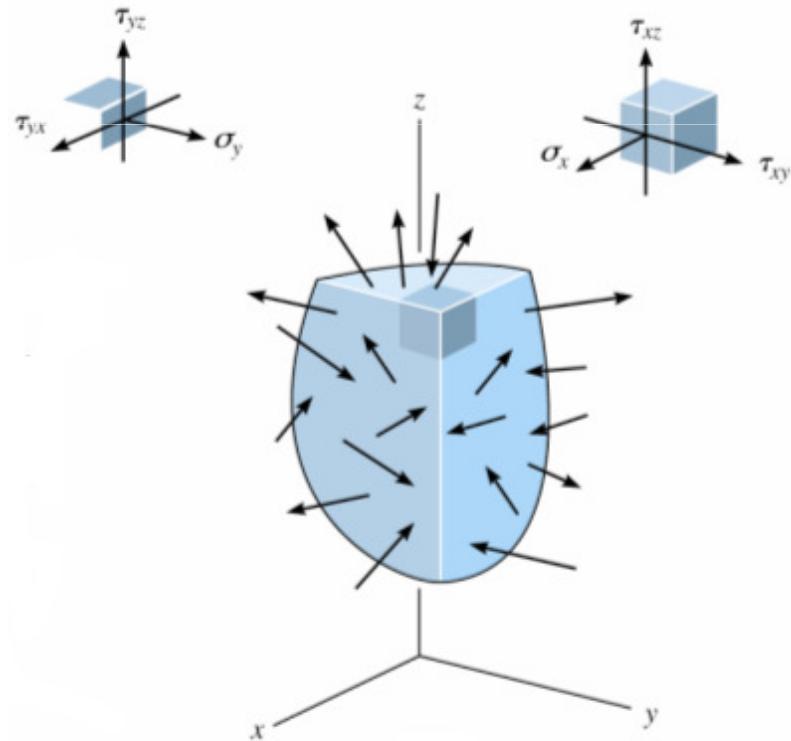
Tensão normal na direção do eixo Z

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Conceito de Tensão Cisalhante

Prof. MSc Eng Halley Dias

“A intensidade da força, ou a força por unidade de área, que atua tangente a ΔA , é chamada de tensão de cisalhamento, τ (tau). Os componentes das tensões de cisalhamento são: ” Hibbeler, 2006.



$$\tau_{zx} = \frac{\Delta F_x}{\Delta A}$$

$$\tau_{zy} = \frac{\Delta F_y}{\Delta A}$$

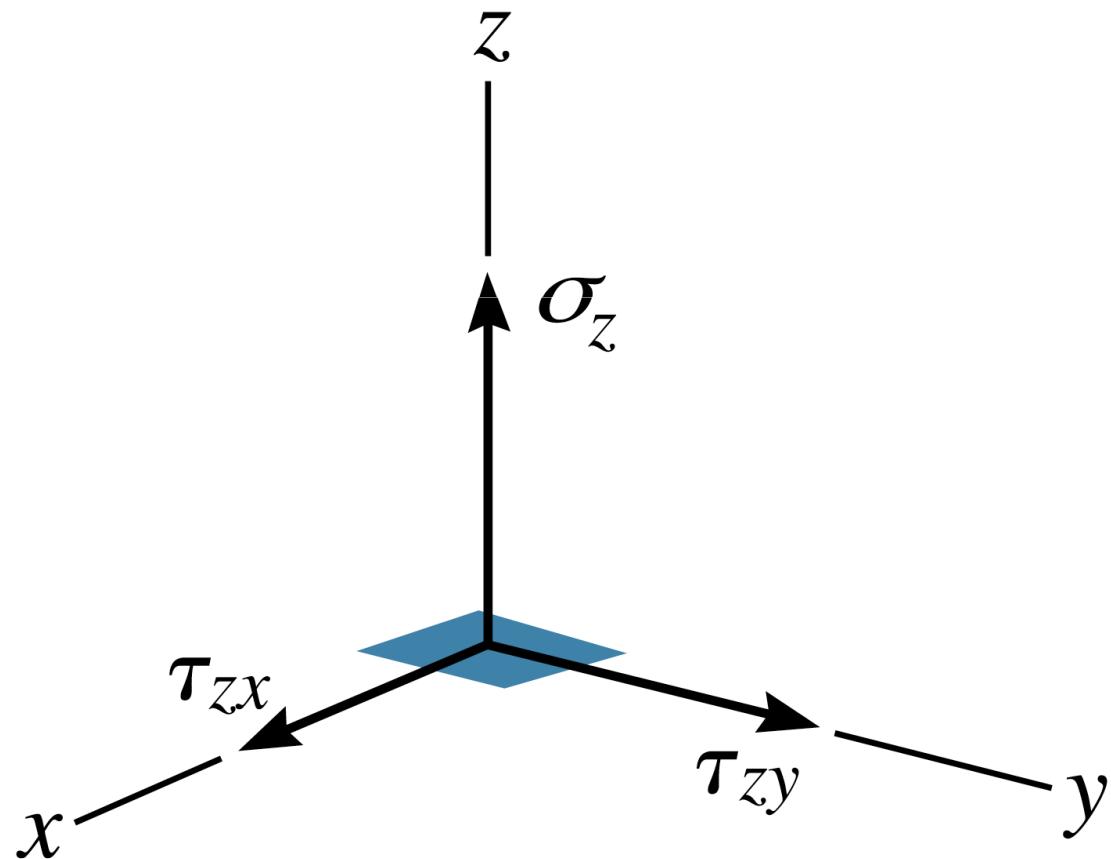
O primeiro índice indica a área e o segundo a direção da tensão de cisalhamento

Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.



Resumindo

Tensões atuando no elemento de área ΔA devido á força ΔF



Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Unidades

No Sistema Internacional (SI)

$$\sigma ; \tau = \left[\frac{N}{m^2} \right] \Leftrightarrow \text{pascal} [Pa]$$

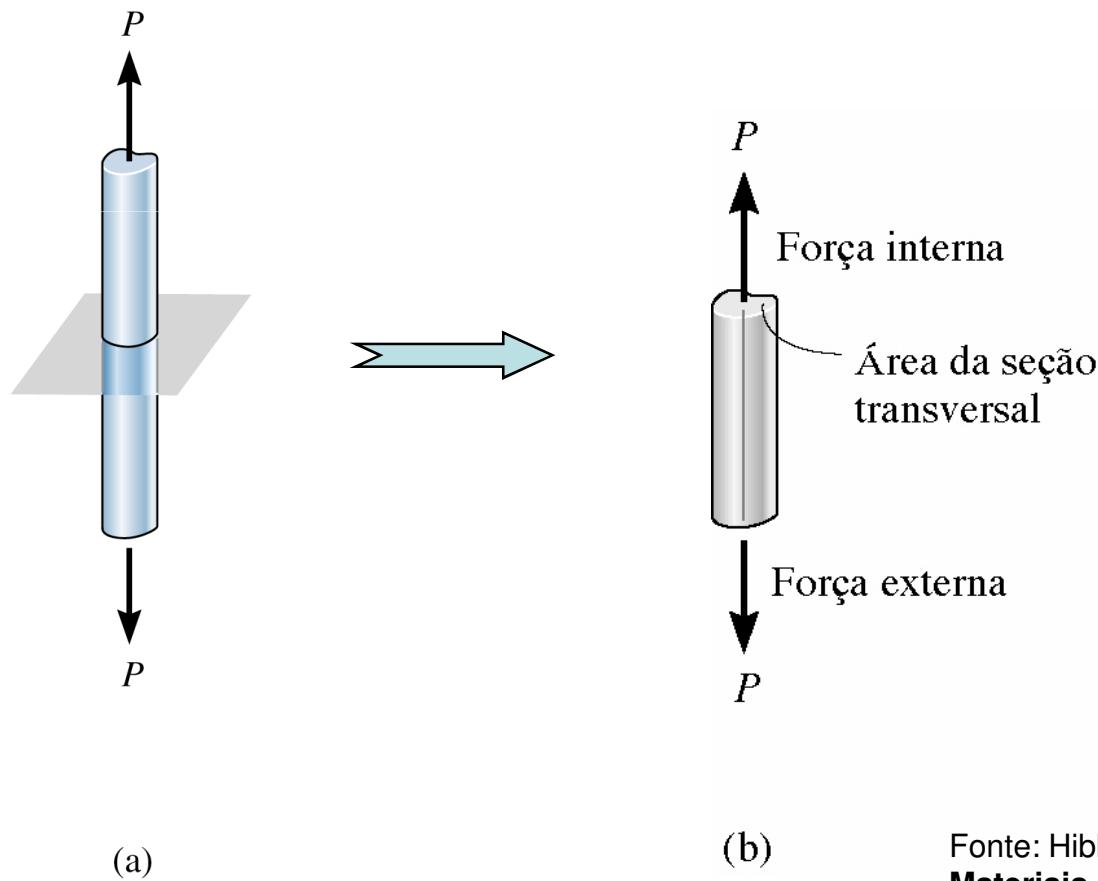
No Sistema Usual Americano

$$\sigma ; \tau = \left[\frac{lb}{pol^2} \right] \Leftrightarrow \text{libras por polegada quadrada} [psi]$$

$$1.000 \text{ } psi = 1 \text{ } ksi \text{ } [\text{quilolibras por polegada quadrada}]$$

Tensão Normal Média em uma Barra com Carga Axial

Cálculo da distribuição média de tensão que atua na seção transversal de uma barra com carga axial, tal como mostra a figura abaixo. Essa seção define a área da seção transversal da barra.



Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Tensão Normal Média

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

- σ : tensão normal média em qualquer ponto da área da seção transversal;
- P : resultante da força normal interna, aplicada no centróide da seção transversal. P é determinada pelo método das seções e pelas equações de equilíbrio.
- A : é a área da seção transversal.



Exemplo de Aplicação

Tirante submetido a esforço de tração

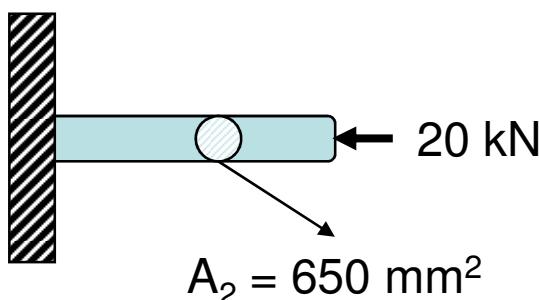
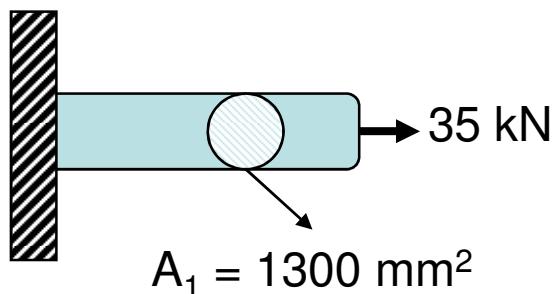


Fonte: Hibbeler, **Resistência dos Materiais**, 5^a ed, 2006.

Exemplo

Cálculo da Tensão Normal Média Máxima

Em muitas aplicações da engenharia ocorrem tanto variações de área como de carregamento nos elementos estruturais. Em função dessas variações a distribuição da tensão normal não é constante ao longo de todo o elemento estrutural. Portanto é necessário que se determine a máxima tensão normal que atua no elemento.



Tensão Admissível

Para garantir segurança, é necessário escolher uma tensão admissível que restrinja a carga aplicada a um valor menor do que a carga que o elemento possa suportar integralmente.

- A carga real pode ser diferente da de projeto.
- Erros na fabricação ou na montagem.
- Vibrações desconhecidas.
- Impactos.
- Cargas acidentais.
- Corrosão atmosférica.
- Variações nas propriedades mecânicas. Ex.: madeira e concreto são materiais anisotrópicos; em baixas temperaturas materiais dúcteis comportam-se como materiais frágeis; altas temperaturas alteram a microestrutura dos materiais; o grau de deformação varia com a velocidade do carregamento, nesse sentido materiais dúcteis podem apresentar comportamento frágil quando solicitados em alta velocidade.

Fator de Segurança

$$FS = \frac{\text{Carga de Ruptura}}{\text{Carga Admissível}}$$

- Carga de Ruptura é obtida por meio de ensaios experimentais. Em materiais dúcteis a carga de ruptura é igual a carga de escoamento do material e para materiais frágeis a carga de ruptura é a própria carga de ruptura do material.
- Fator de Segurança é selecionado com base na experiência, códigos de projetos, manuais de engenharia, o FS é sempre maior ou igual a 1. Exemplos: Aviões FS = 1; Usina Nuclear FS > 3.

Tensão Normal

$$FS = \frac{\sigma_{\text{rup}}}{\sigma_{\text{adm}}}$$

Tensão Cisalhante

$$FS = \frac{\tau_{\text{rup}}}{\tau_{\text{adm}}}$$

Fator de Segurança

Prof. MSc Eng Halley Dias



Em projetos de guindastes e cabos de aço deve-se considerar fatores de segurança adequados, pois envolve a movimentação de cargas pesadas.

Fatores para Determinação do Coeficiente de Segurança

$$FS = A.B.C.D$$

Valores para A

A = 2 para materiais comuns

A = 1,5 para aços de qualidade e aços liga

Valores para B

B = 1 para carga constante

B = 2 para carga intermitente

B = 3 para carga alternada

Valores para C

C = 1 para carga gradual

C = 1,5 para choques leves

C = 2 para choques bruscos

Valores para D

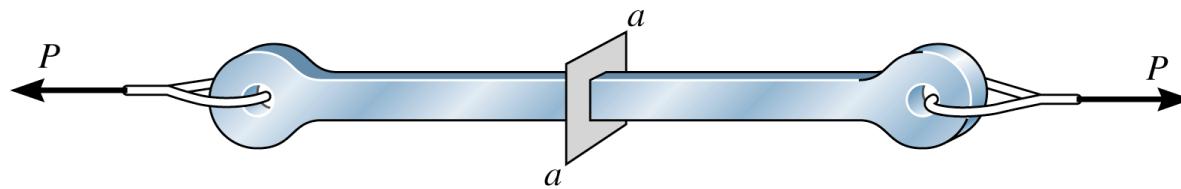
D = 1 a 1,5 para aços

D = 1,5 a 2 para FoFo

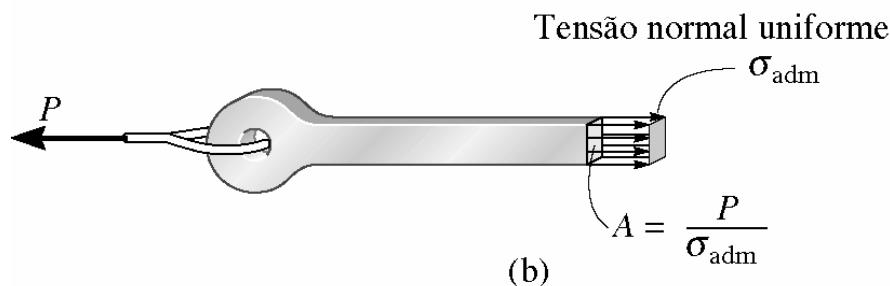
Projetos de Acoplamento

Prof. MSc Eng Halley Dias

1) Área da Seção Transversal de um Elemento de Tração



(a)

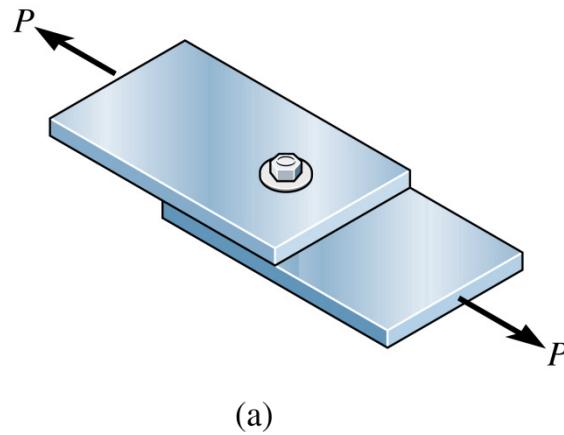


(b)

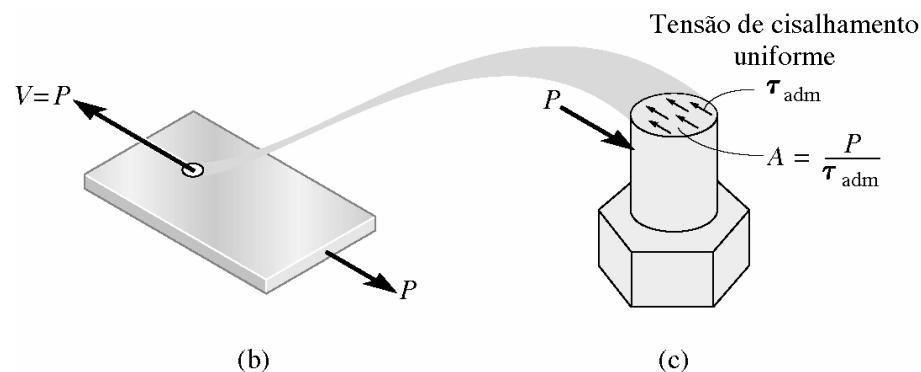
$$A = \frac{P}{\sigma_{adm}}$$

Projetos de Acoplamento

2) Área da Seção Transversal de um Acoplamento a Cisalhamento

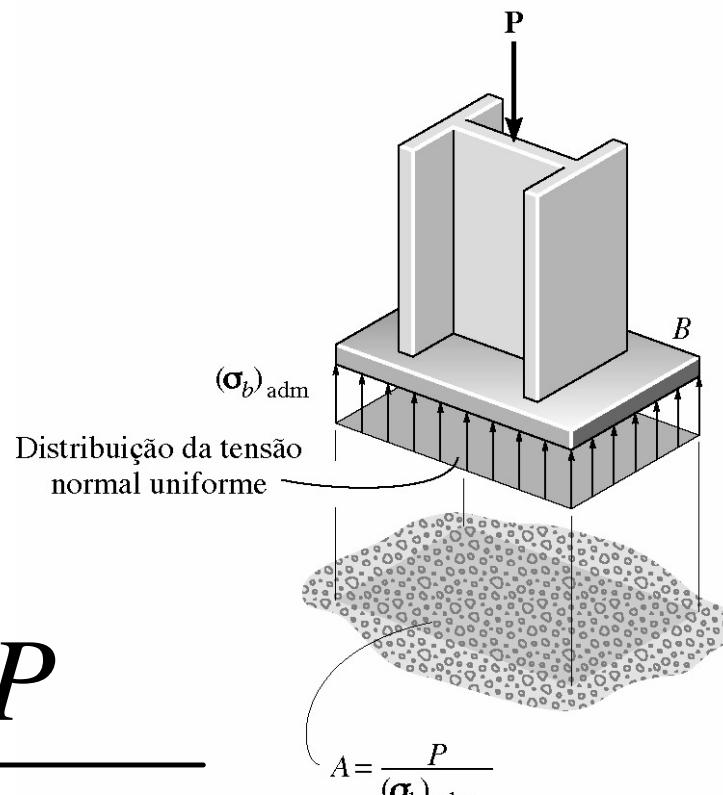


$$A = \frac{P}{\tau_{adm}}$$



Projetos de Acoplamento

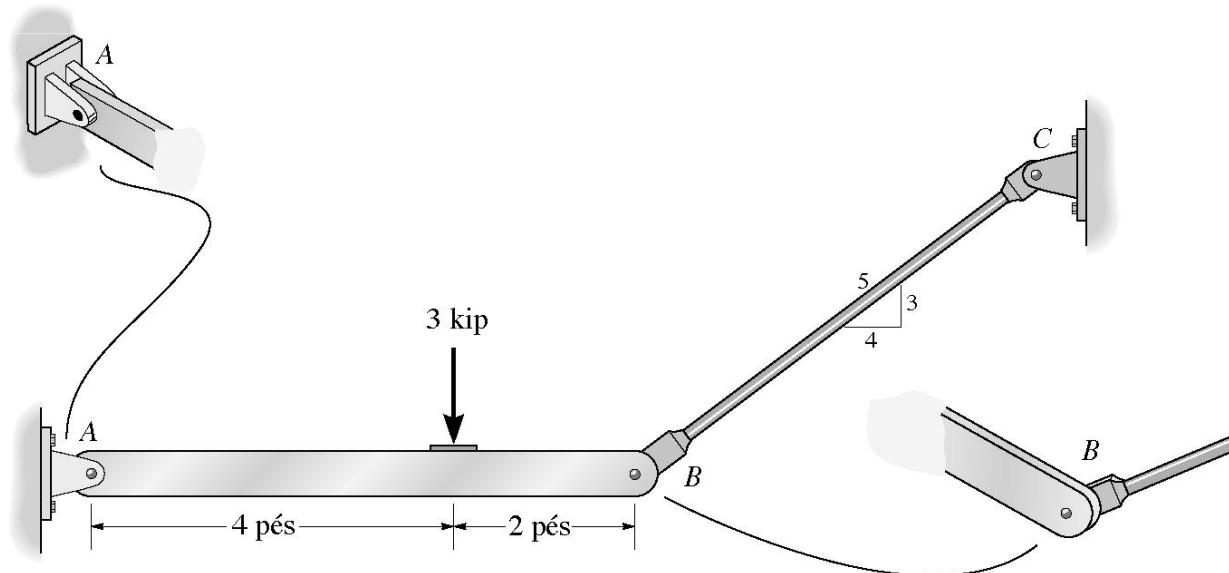
3) Área requerida para resistir ao apoio – Tensão de Apoio é definida como a tensão produzida pela compressão de uma superfície contra outra.



$$A = \frac{P}{(\sigma_b)_{adm}}$$

Exemplo

Os dois elementos estão acoplados em B como mostra a figura. A figura também mostra o topo dos acoplamentos em A e B. Supondo que os pinos tenham tensão de cisalhamento admissível de $\tau_{adm} = 12,5$ ksi e o esforço de tração admissível da haste *CB* seja $\sigma_{adm} = 16,2$ ksi, determinar o menor diâmetro dos pinos A e B, e o diâmetro da haste *CB* necessário para suportar a carga.



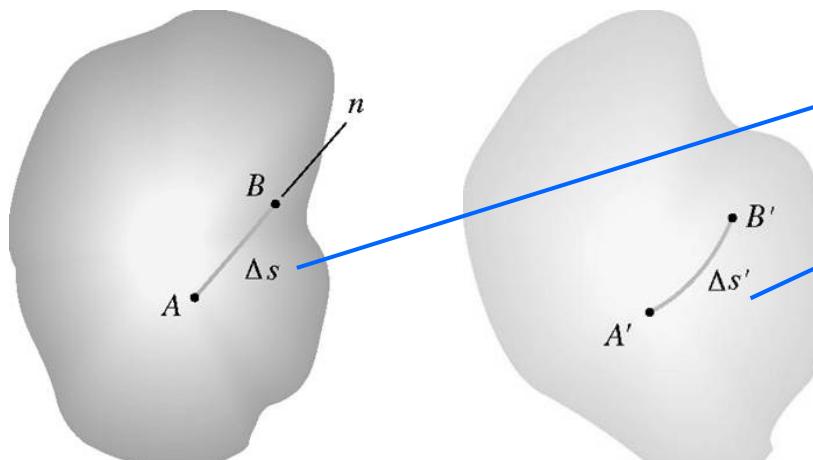
(a)

DEFORMAÇÃO

Corpos submetidos a ação de forças externas tendem a mudar a forma e o tamanho e tais mudanças são denominadas deformação. A deformação pode ser perfeitamente visível ou praticamente imperceptível sem o uso de equipamentos especiais.

DEFORMAÇÃO NORMAL

O alongamento ou a contração de um segmento de reta por unidade de comprimento é denominado **deformação normal**.



Corpo sem deformação
(a)

Corpo deformado
(b)

Δs : comprimento inicial;

$\Delta s'$: comprimento final

Deformação Normal Média

ε_{med} (epsílon)

$$\varepsilon_{med} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

Hibbeler, 2006.

DEFORMAÇÃO NORMAL

Se a deformação normal for conhecida, então é possível determinar o comprimento final aproximado do segmento de reta e por consequênciâ do corpo.

$$\varepsilon_{med} = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s}$$

$$\Delta s' = (1 + \varepsilon) \cdot \Delta s : \text{para segmento de reta}$$

$$l = (1 + \varepsilon) \cdot l_0 : \text{para o corpo real}$$

l : comprimento final

l_0 : comprimento inicial



ANÁLISE PARA PEQUENAS DEFORMAÇÕES

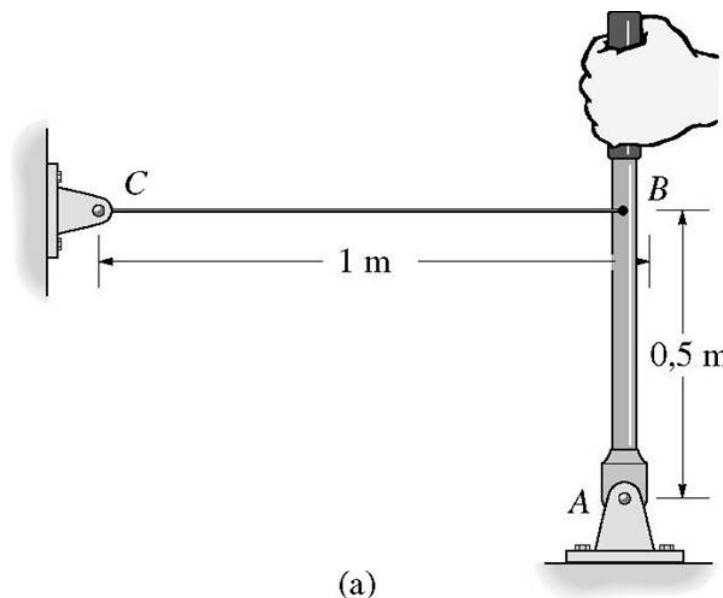
ε : for muito menor que a unidade.

Então $\sin \theta = \tan \theta = \theta$ e $\cos \theta = 1$.

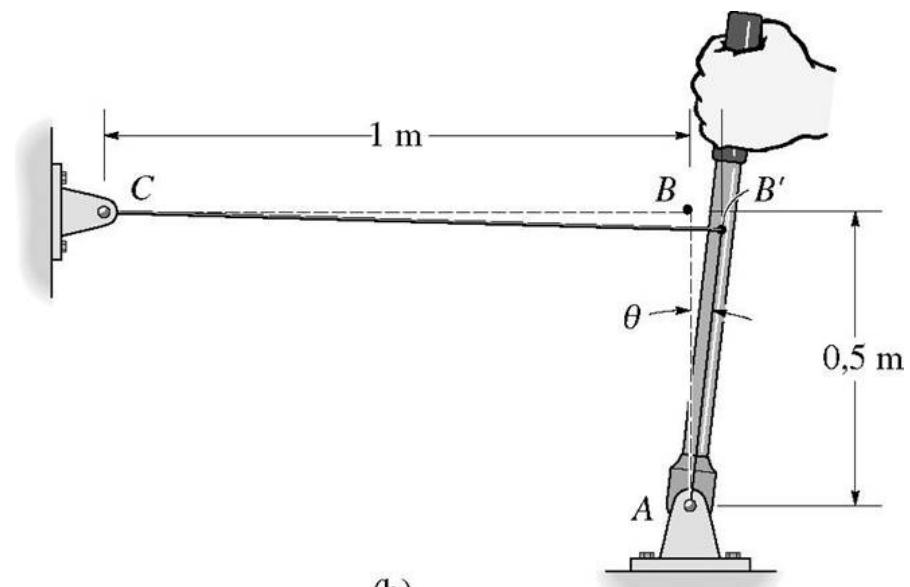
As medidas devem estar em radianos!

EXEMPLO

Uma força que atua no cabo da alavanca provoca uma rotação $\theta = 0,002$ rad na alavanca no sentido horário. Determinar a deformação normal média desenvolvida no arame *BC*.



Antes da aplicação da força



Após a aplicação da força

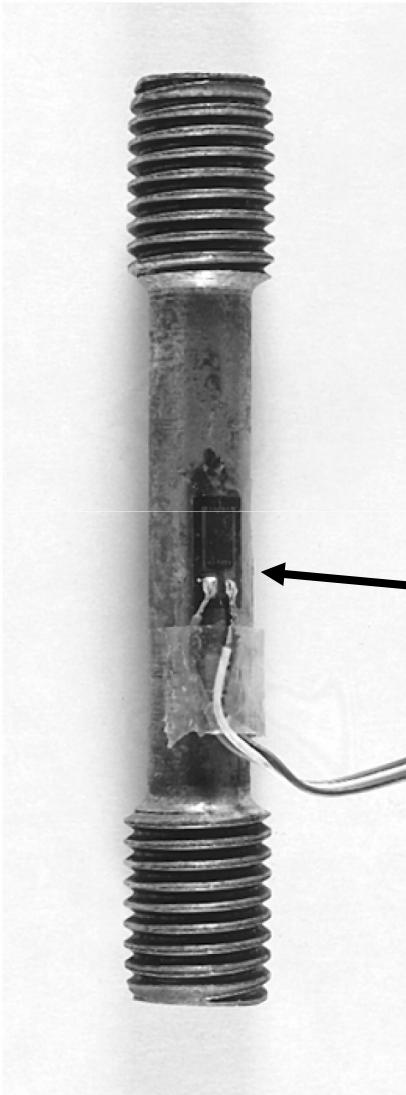
Ensaio de Tração

É um dos ensaios mais importantes e mais freqüentes na área de metais. Consiste em submeter uma amostra a uma força crescente (tração) e medir simultaneamente a força aplicada e a deformação resultante . Os materiais cerâmicos (frágeis) apresentam particularidades que dificultam a realização do ensaio, tais como: dificuldade de usinagem para a fixação e alinhamento da amostra na máquina.

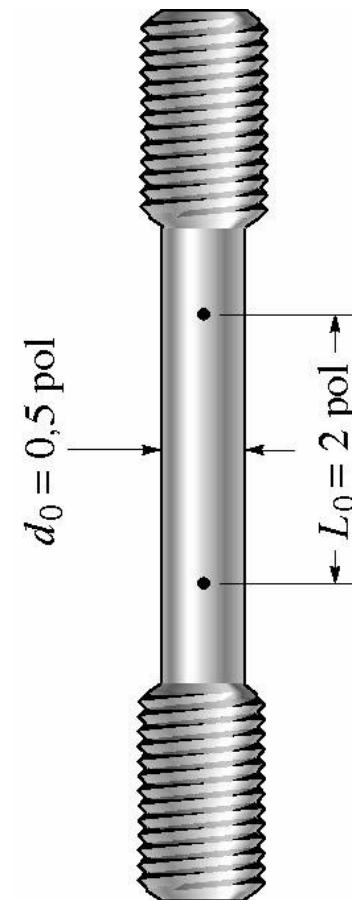
O resultado do ensaio de tração é o Diagrama de Tensão-Deformação.



Corpo de Prova



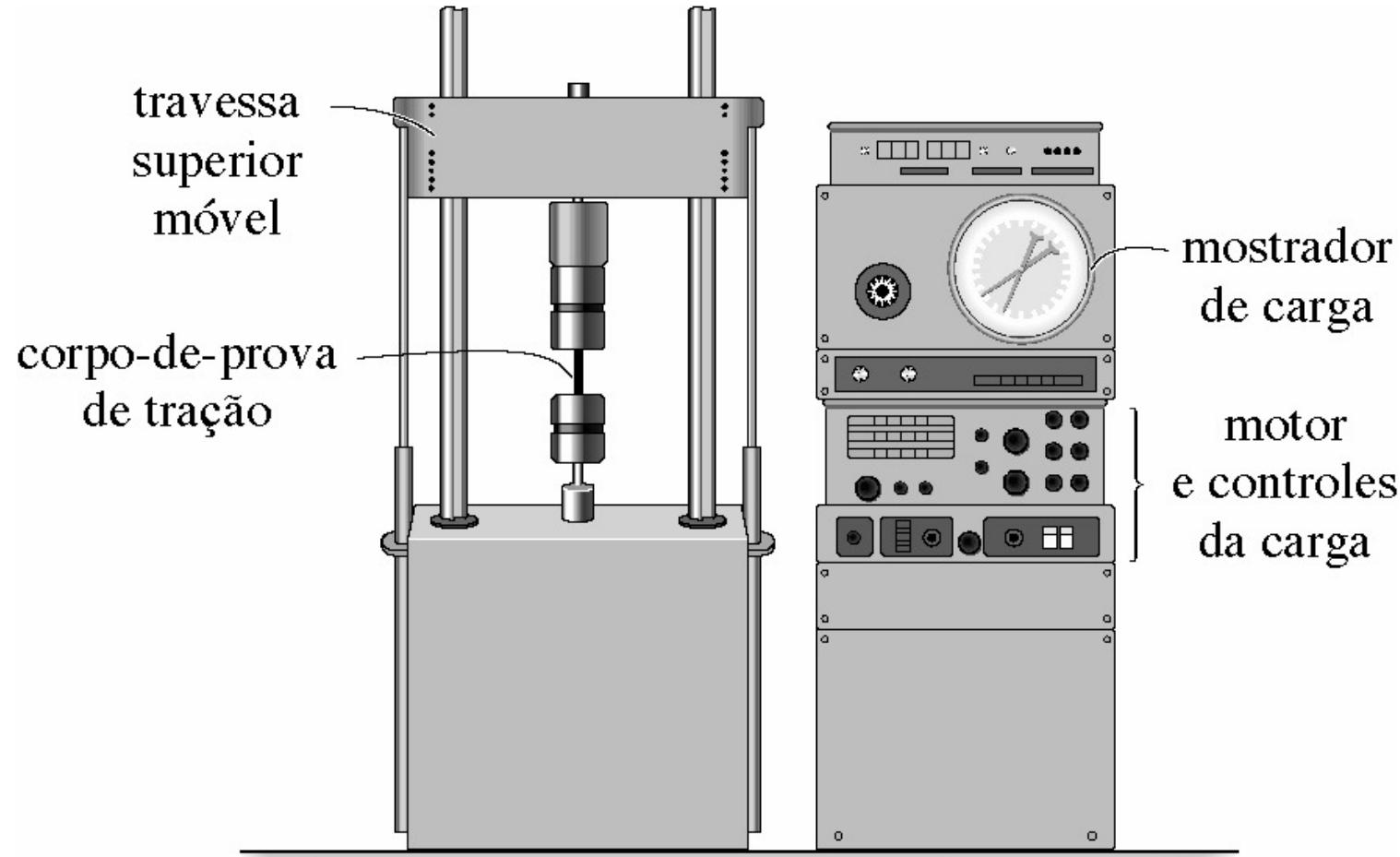
Extensômetro



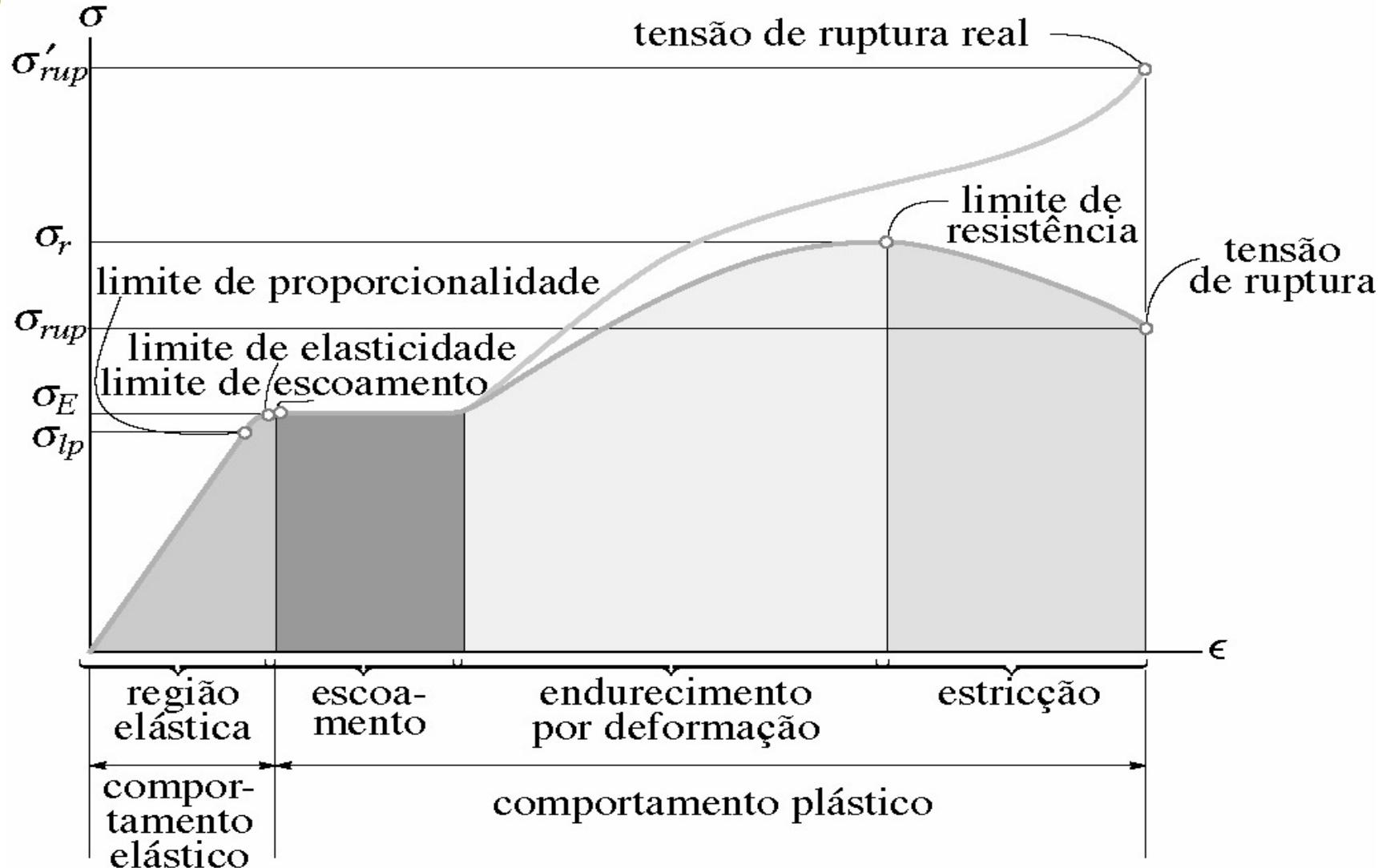
Hibbeler, 2006.

Exemplo da Máquina

de Ensaio de Tração



2.2.1 – Diagrama Tensão Deformação



Diagramas tensão-deformação convencional e real
para material dúctil (aço) (sem escala)

Hibbeler, 2006.

Região Elástica

- ✓ A tensão é proporcional à deformação;
- ✓ O material recupera suas dimensões e formas no alívio do carregamento;
- ✓ As tensões são uniaxiais (carga aplicada no centróide da seção transversal e a barra é prismática).

Escoamento

- ✓ Deformação permanente (plástica);
- ✓ Intenso movimento de discordâncias;
- ✓ Quanto mais alto for o limite de escoamento mais resistente é o material;
- ✓ O limite de escoamento é utilizado como critério de projeto em materiais dúcteis.

Endurecimento por Deformação (Encruamento)

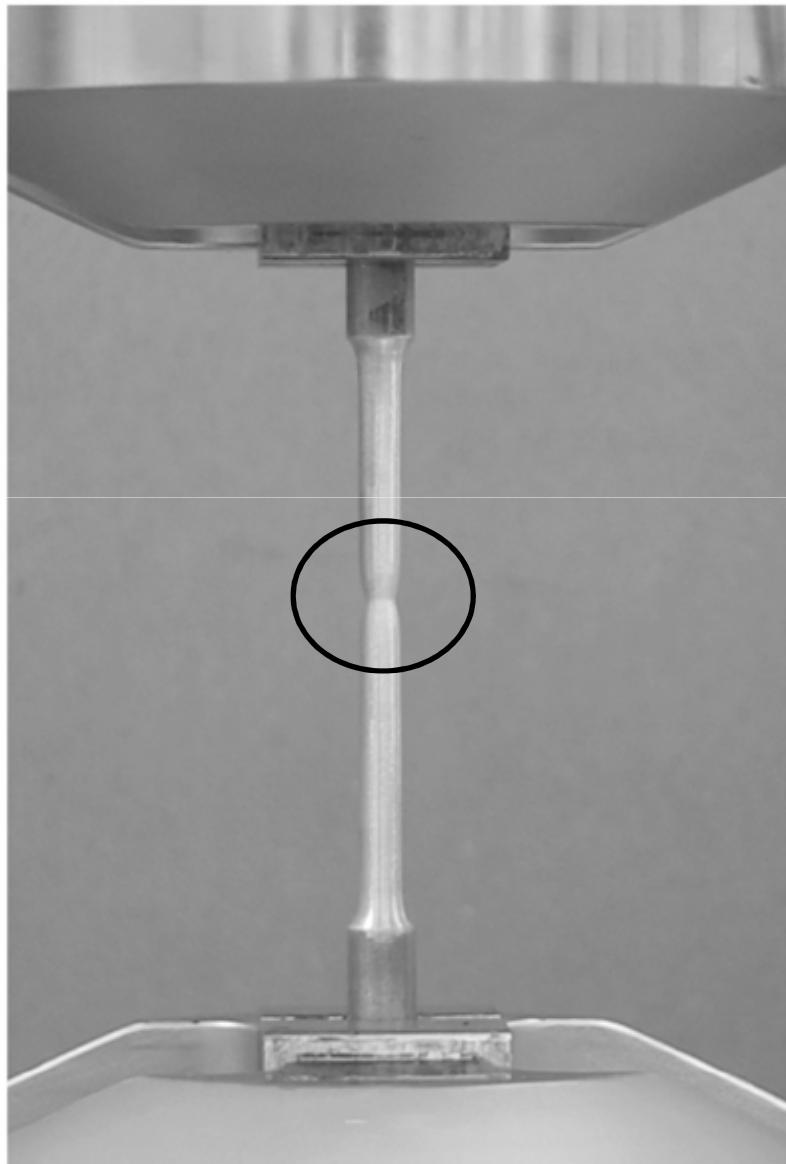
- ✓ A deformação plástica só continua se houver aumento das tensões;
- ✓ O estado de tensão ainda é uniaxial;
- ✓ Limite de resistência é usado como critério de projeto em materiais frágeis;
- ✓ Materiais com altos limites de resistência são resistentes.

Estricção

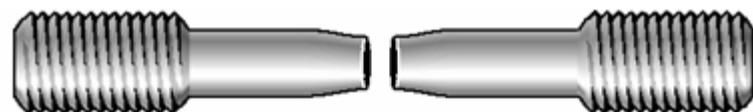
- ✓ Após atingir o limite de resistência a área da seção transversal começa a diminuir em região localizada do corpo de prova;
- ✓ O estado de tensão não é uniaxial;
- ✓ O material se rompe na tensão de ruptura.



Estricção



Estricção



Falha de um
material dúctil

Hibbeler, 2006.

2.3 – Mecânica da Fratura

- ❖ Materiais Dúcteis: qualquer material que possa ser submetido a grandes deformações antes da ruptura é chamado de **material dúctil**. Freqüentemente, os engenheiros escolhem materiais dúcteis para o projeto porque estes são capazes de absorver choque ou energia e, quando sobrecarregados, exibem, em geral, grande deformação antes de falhar.
- ❖ Os materiais que apresentam pouco ou nenhum escoamento são denominados **materiais frágeis**. Os materiais frágeis não possuem tensão de ruptura à tração bem definida, então se registra a tensão de ruptura média observada em um conjunto de testes. Materiais frágeis resistem mais a esforços de compressão do que de tração em função da tendência da compressão “fechar” as trincas na medida que o carregamento aumenta.

2.3.1 – Tipos de Fraturas

- ❖ Fratura Dúctil: quando há deformação plástica macroscópica;
- ❖ Fratura Frágil: quando não há deformação plástica macroscópica.

2.3.2 – Importância o Tipo de Fratura

Fratura dúcteis são consideradas mais seguras que as fraturas frágeis pelos seguintes motivos:

- ✓ propagam-se estavelmente: isto significa que a ruptura só se propaga mediante aumento das tensões impostas no material. Se o nível de tensão não se elevar, o material não se fratura;
- ✓ Apresentam deformação plástica macroscópica: isto significa que se pode perceber visualmente que “algo está indo errado” com o material (devido a deformação visível a lho nú). Servindo de alerta para que se faça a manutenção.
- ✓ As fratura frágeis são perigosas porque uma vez iniciadas, são instáveis, isto é, propagam-se sem necessidade de elevar o nível de tensão.
- ✓ As fraturas frágeis não dão “aviso prévio”.

3 – Lei de Hooke

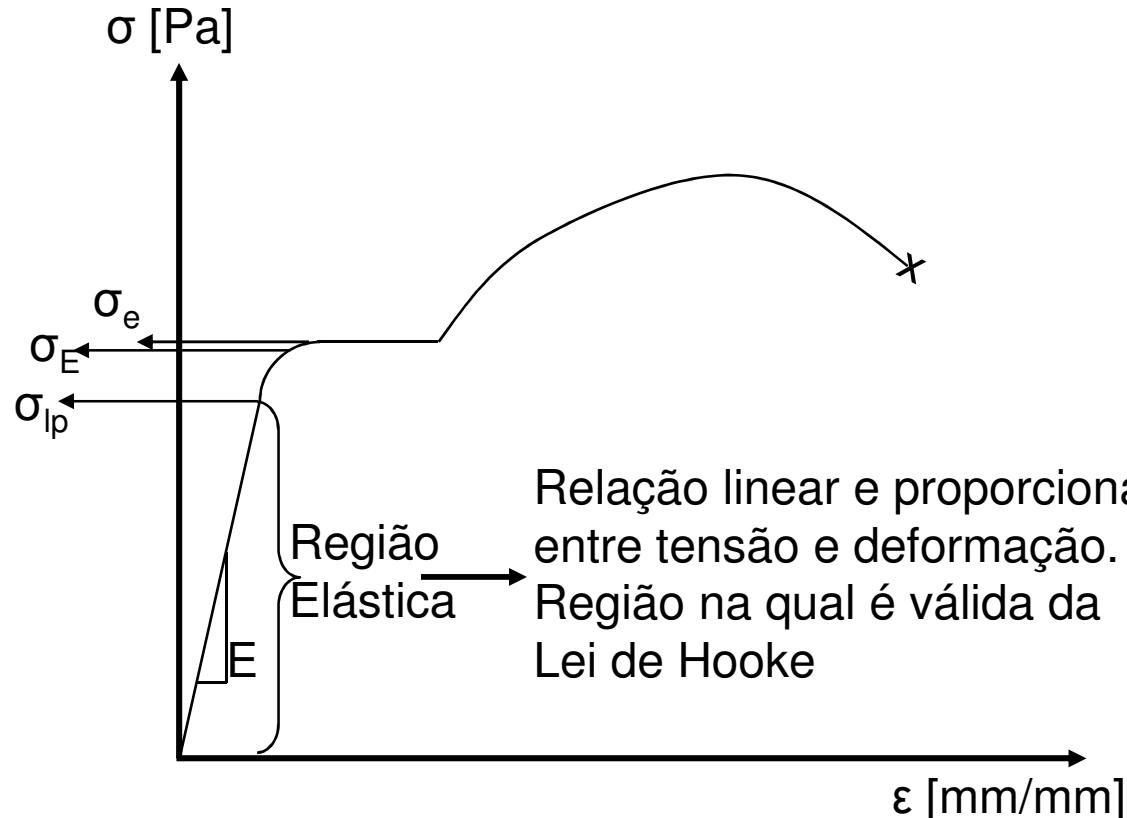


Diagrama Tensão Deformação Aço Estrutural

σ_e : Tensão de escoamento.

σ_E : Tensão limite de elasticidade

σ_{lp} : Tensão limite de proporcionalidade

Lei de Hooke

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

E : constante de proporcionalidade

E : módulo de elasticidade ou módulo de Young

E : representa a rigidez do material

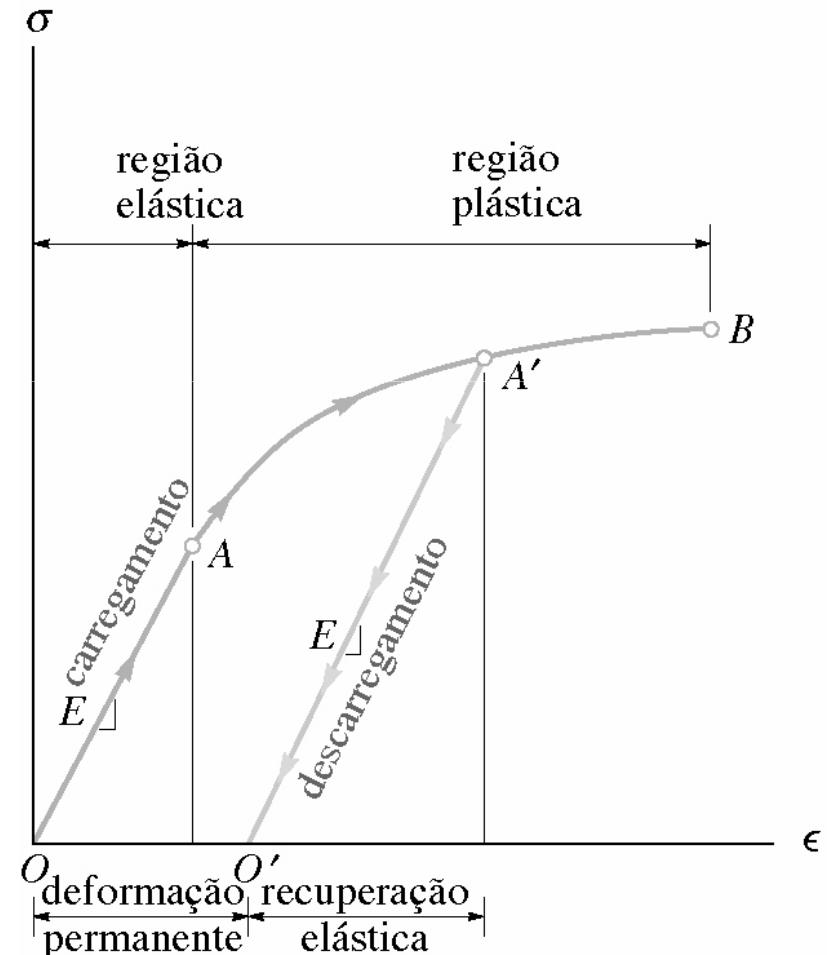
Para aço $E = 210$ GPa

Ligas de Al, $E = 73$ GPa

3.1 – Lei de Hooke

Endurecimento por Deformação

O diagrama ao lado ilustra um corpo de prova que sofreu um carregamento na região plástica e em seguida descarregado. Pode-se notar no diagrama que após o descarregamento o material recupera a deformação elástica à medida que retorna a condição de equilíbrio. Entretanto, o material fica sujeito a uma deformação permanente (plástica).



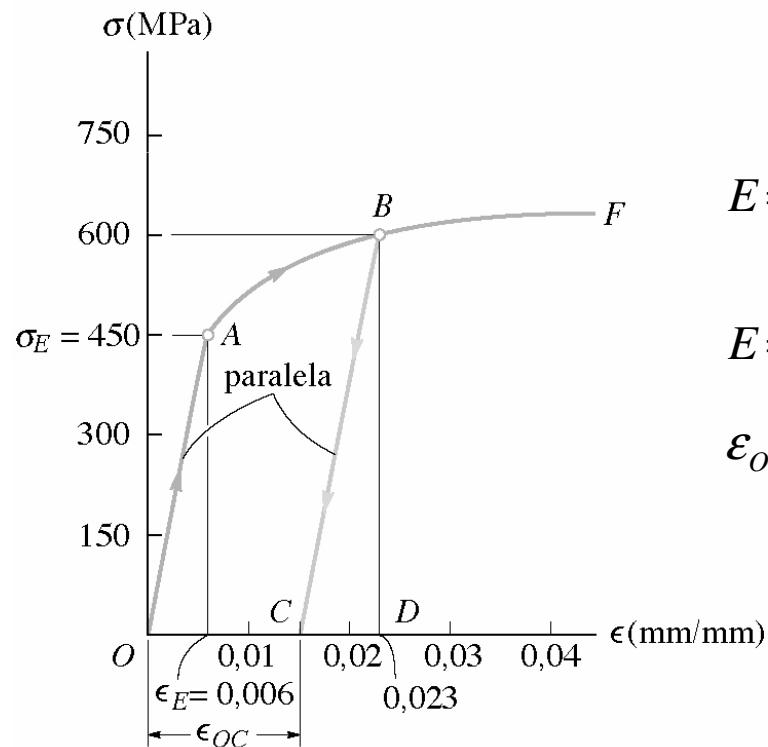
(a)

Hibbeler, 2006.

- ✓ As forças inter-atômicas exercem resistência quando o material é alongado durante o carregamento e também são responsáveis pela recuperação elástica (união dos átomos) quando o carregamento é removido. Conseqüentemente o módulo de elasticidade, E , é o mesmo para o carregamento e para o descarregamento. Isso explica a razão da inclinação das retas OA e $O'A'$ serem iguais.
- ✓ Caso o mesmo corpo de prova seja submetido a um novo carregamento, o novo diagrama tensão deformação irá iniciar em O' . Conseqüentemente o material apresentará uma nova tensão de escoamento A' (maior que A) devido ao endurecimento por deformação. O aumento de resistência o material é devido a perda de ductibilidade.

EXEMPLO

O diagrama tensão-deformação de uma liga de alumínio usada para fabricar peças de aeronaves é mostrado na figura. Supondo que um corpo de prova desse material seja tracionado com 600 MPa, determine a deformação permanente que ficará no corpo de prova quando a carga for removida.



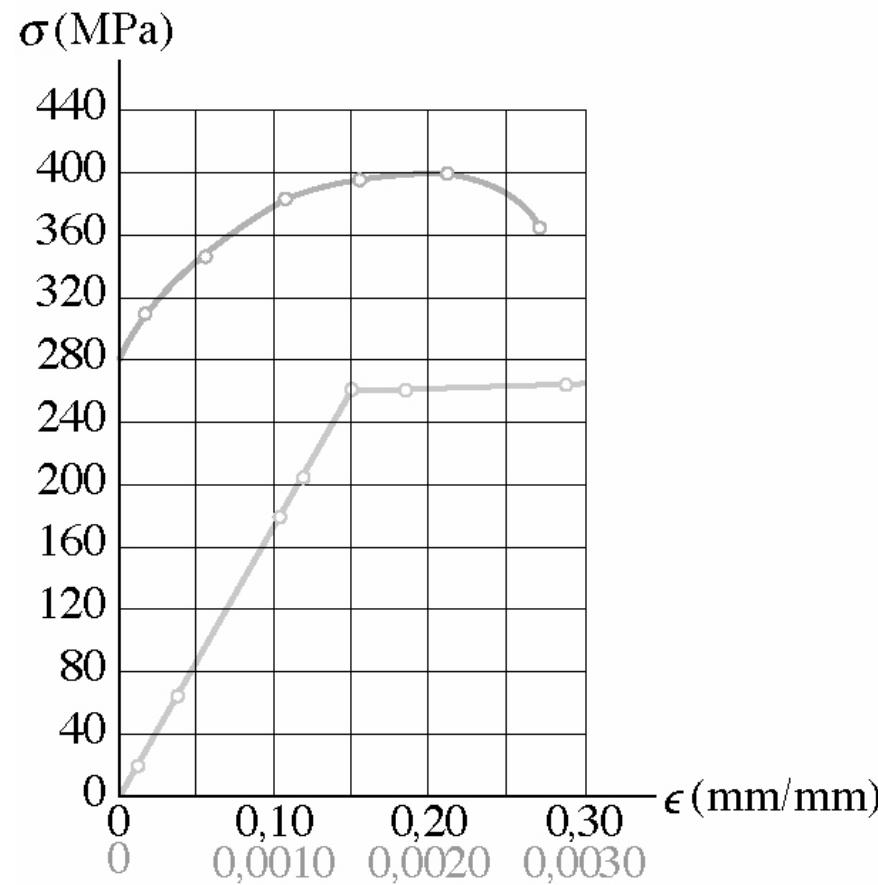
$$E = \frac{450 \text{ MPa}}{0,006 \text{ mm/mm}} = 75,0 \text{ GPa}$$

$$E = \frac{BD}{CD} = \frac{600 \times 10^{-6} \text{ Pa}}{CD} = 75,0 \text{ GPa} \Rightarrow CD = 0,008 \text{ mm/mm}$$

$$\epsilon_{OC} = 0,023 \text{ mm/mm} - 0,008 \text{ mm/mm} = 0,0150 \text{ mm/mm}$$

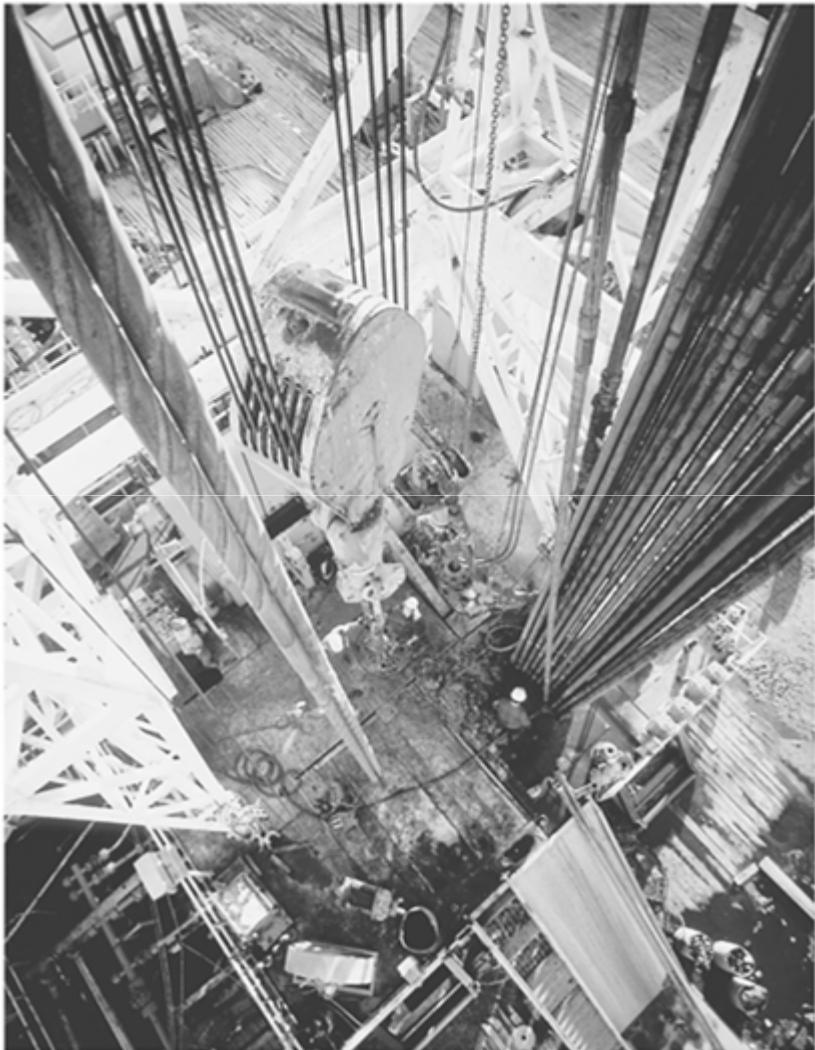


Exercício 02: O diagrama tensão deformação de uma barra de liga de aço é mostrado na figura. Determine aproximadamente o módulo de elasticidade, o limite de proporcionalidade, o limite de resistência. Se for aplicada uma carga à barra até uma tensão de 360 MPa, determinar a deformação elástica recuperada e a deformação permanente da barra quando for retirada a carga.





Carregamento Axial



“A tubulação de perfuração de petróleo suspensa no guindaste da perfuratriz está submetida a cargas e a deformações axiais extremamente grandes.” Hibbeler, 2006.

Membros Carregados Axialmente

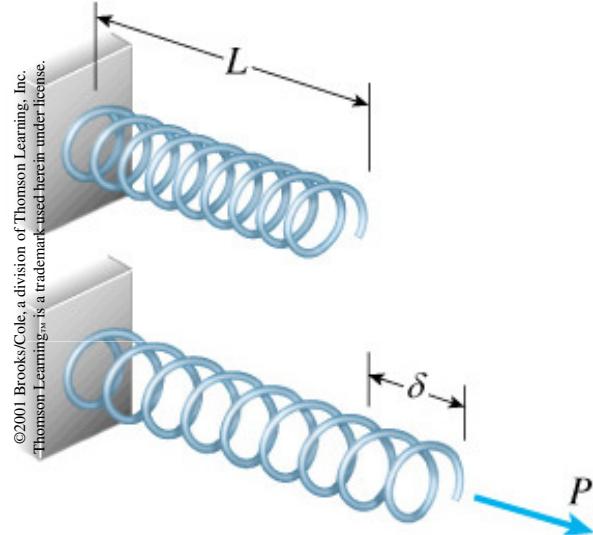
*“Componentes estruturais submetidos apenas à tração ou compressão são chamados de **membros carregados axialmente**. Barras sólidas com eixos longitudinais retos são o tipo mais comum, embora cabos e molas espirais também suportem cargas axiais. Exemplos de barras carregadas axialmente são membros de suporte, hastes de conexão em motores, aros em rodas de bicicleta, colunas de prédios e suportes em armações de motores de aviões.”*

Gere, 2003.

Mudanças nos Comprimentos de Membros

Carregados Axialmente

1) Molas



L_0 : comprimento relaxado ou livre

δ : deformação da mola (“+” tração ou “-” em compressão)

P: carga axial

L_f : comprimento final = $L_0 + \delta$ ($L_f > L_0$ em tração e $L_f < L_0$ em compressão)

Para material Elástico Linear

$$P = k \cdot \delta$$

$$\delta = f \cdot P$$

$$k = \frac{1}{f} \text{ ou } f = \frac{1}{k}$$

k: constante de rigidez da mola, pode ser entendida como a força para produzir uma unidade de alongamento.

f: flexibilidade da mola, pode ser entendida como o alongamento produzido por uma carga de valor unitário.

2) Barras Prismáticas: uma barra pode ser considerada prismática quando seu eixo é longitudinal retilíneo e uma seção transversal constante ao longo do seu comprimento.

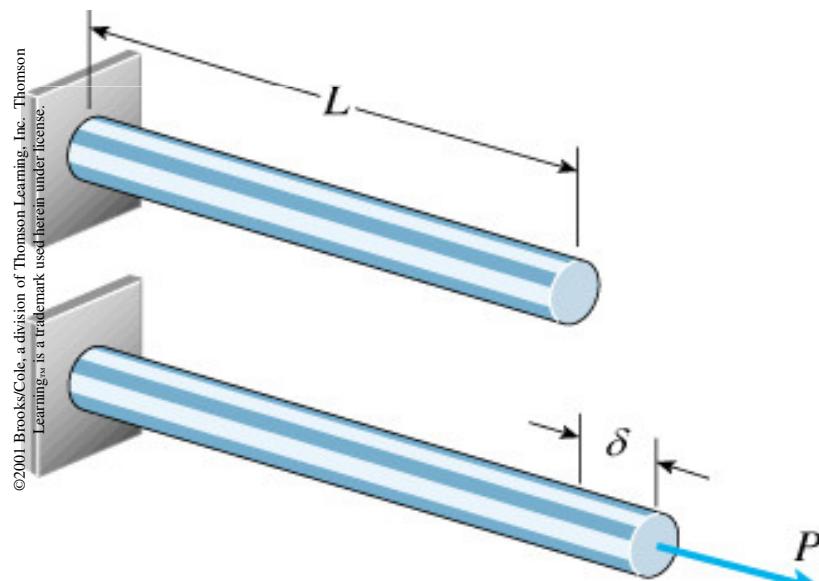
Seções Rígidas



Seções Vazadas ou Tubulares



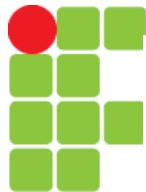
Seções de Perfis Padronizados



$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$k = \frac{E \cdot A}{L}$$

$$f = \frac{L}{E \cdot A}$$



2) **Cabos:** os cabos são utilizados para transmitir grandes forças de tração, por exemplo, ao levantar ou puxar objetos pesados, levantar elevadores, equilibrar torres, e sustentar pontes suspensas. Diferentes das molas e barras prismáticas, os cabos não resistem à compressão.



$$\delta = \frac{P \cdot L}{E \cdot A}$$

$$k = \frac{E \cdot A}{L} \therefore f = \frac{L}{E \cdot A}$$

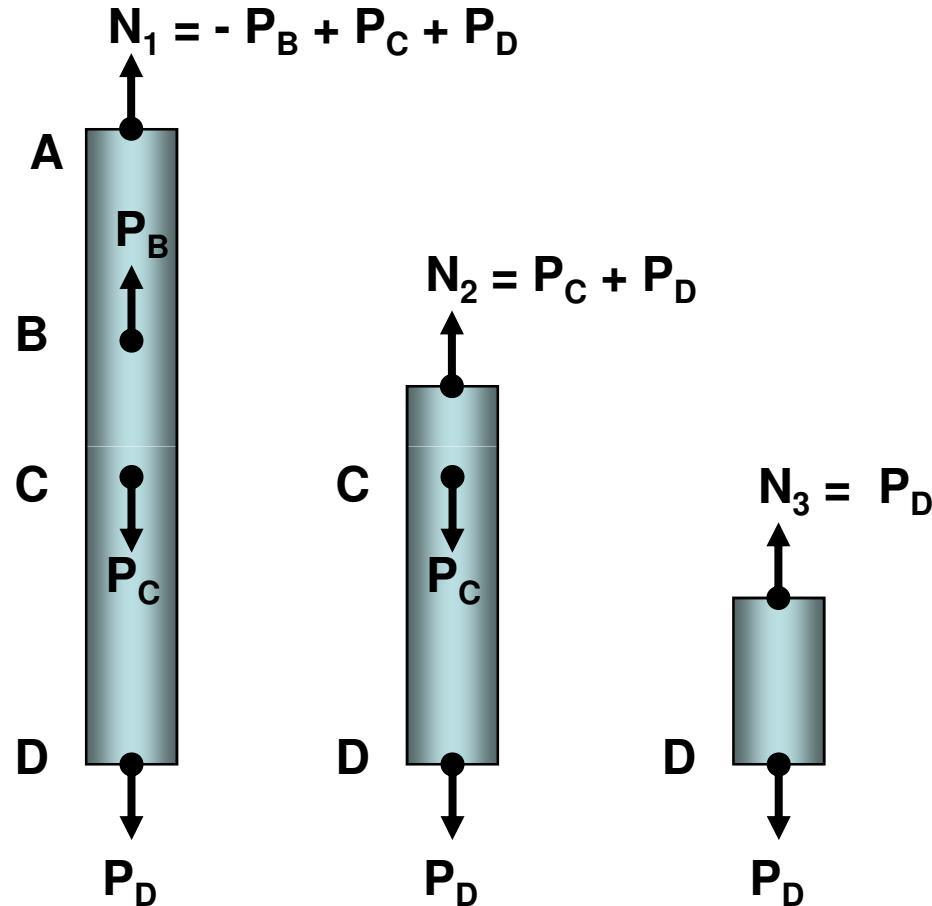
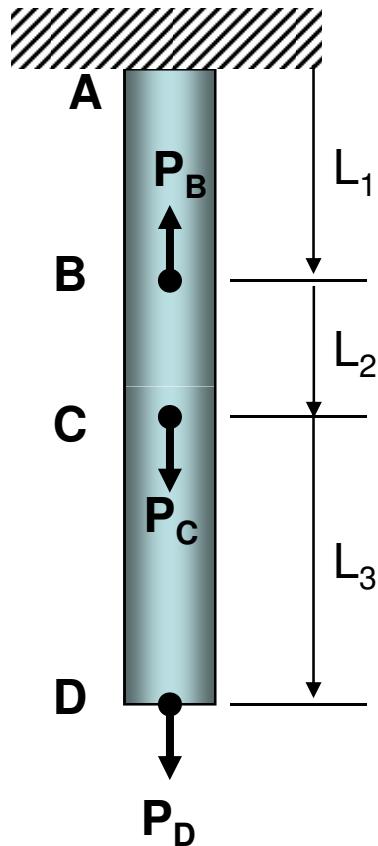
- ✓ O módulo de elasticidade do cabo é menor do que o módulo de elasticidade do material que forma o cabo e por essa razão é chamado de **módulo efetivo** cujo valor médio é da ordem de 140 GPa (20.000 ksi).
- ✓ A área da seção transversal de um cabo é igual à soma das áreas da seção transversal de cada um dos fios que compõe o cabo e é denominada de **área efetiva** ou **área metálica**. Essa área é menor do que a área de um círculo tendo o mesmo diâmetro de um cabo porque existem espaços entre cada um dos fios.
- ✓ A carga admissível é obtida por meio da carga última dividida por um FS que pode variar de 3 a 10 dependendo de como o cabo será utilizado.

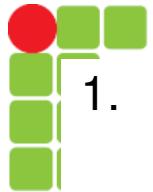


Propriedades de Cabos de Aço (para exercícios)

Diâmetro nominal pol	mm	Peso aprox. Lb/pé	N/m	Area Efetiva pol ²	mm ²	Carga Última lb	kN
0,50	12	0,42	6,1	0,199	76,7	23.100	102
0,75	20	0,95	13,9	0,268	173	51.900	231
1,00	25	1,67	24,4	0,471	304	91.300	406
1,25	32	2,64	38,5	0,745	481	144.000	641
1,50	38	3,83	55,9	1,080	697	209.000	930
1,75	44	5,24	76,4	1,470	948	285.000	1260
2,00	50	6,84	99,8	1,920	1230	372.000	1650

Mudanças nos Comprimentos de Barras não Uniformes





1. Identifique os segmentos da barra (AB , BC , CD) como segmentos 1, 2, 3, respectivamente.
2. Determine as forças axiais internas N_1 , N_2 e N_3 nos segmentos 1, 2, 3, respectivamente através dos diagramas de corpo livre.
3. Determine as mudanças nos comprimentos dos segmentos através da equação $\delta = N \cdot L / E \cdot A$.
4. Some as mudanças em cada comprimento para determinar a variação do comprimento total da barra.

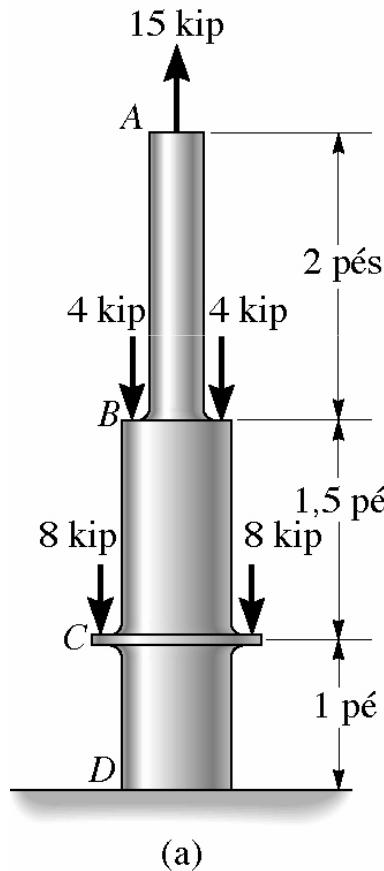
$$\delta_1 = \frac{N_1 \cdot L_1}{E \cdot A} \quad \delta_2 = \frac{N_2 \cdot L_2}{E \cdot A} \quad \delta_3 = \frac{N_3 \cdot L_3}{E \cdot A}$$

$$\delta = \sum_{i=1}^n \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$$

5. Essa mesma aproximação geral pode ser usada quando a barra consiste de vários segmentos prismáticos, cada um tendo forças axiais diferentes, dimensões diferentes e materiais diferentes. A variação no comprimento pode ser obtida através da equação

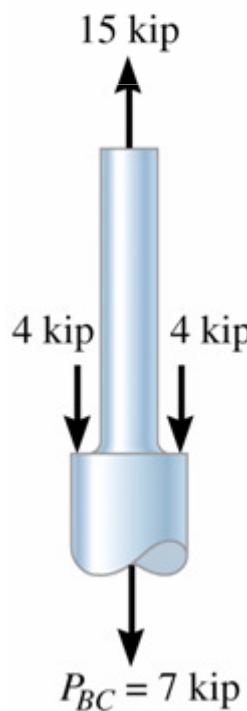
$$\delta = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot L_i}{E_i \cdot A_i}$$

EXEMPLO – 01: A barra composta de aço A-36 mostrada na figura está composta por dois segmentos, AB e BD , com áreas da seção transversal $A_{AB} = 1 \text{ pol}^2$ e $A_{AD} = 2 \text{ pol}^2$. Determinar o deslocamento vertical da extremidade A e o deslocamento de B em relação a C .

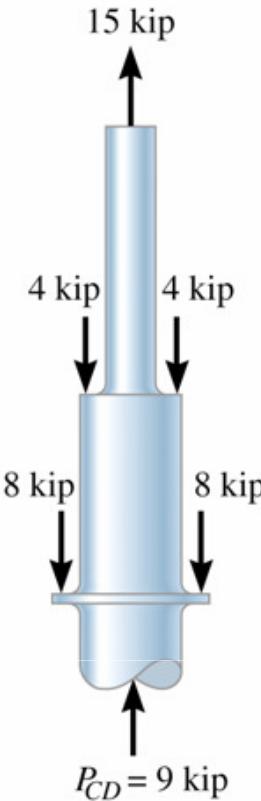




$$\delta_{AB} = \frac{N_{AB} \cdot L_{AB}}{E \cdot A_{AB}} = \frac{15 \text{ kip} \cdot 24 \text{ pol}}{29000 \text{ ksi} \cdot 1 \text{ pol}^2} = 0,01241 \text{ pol}$$



$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{7 \text{ kip} \cdot 18 \text{ pol}}{29000 \text{ ksi} \cdot 2 \text{ pol}^2} = 0,002172 \text{ pol}$$



$$\delta_{CD} = \frac{N_{CD} \cdot L_{CD}}{E \cdot A_{CD}} = \frac{-9 \text{ kip} \cdot 12 \text{ pol}}{29000 \text{ ksi} \cdot 2 \text{ pol}^2} = -0,001862 \text{ pol}$$

$$\delta_A = \delta_{AB} + \delta_{BC} + \delta_{CD}$$

$$\delta_A = 0,01241 \text{ pol} + 0,002172 \text{ pol} - 0,001862 \text{ pol}$$

$$\delta_A = 0,0127 \text{ pol}$$

SOLUÇÃO: (b)

$$\delta_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot L_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{7 \text{ kip} \cdot 18 \text{ pol}}{29000 \text{ ksi} \cdot 2 \text{ pol}^2} = 0,002172 \text{ pol}$$

Carga Térmica

Variação na temperatura produzem expansão (quando aquecidos) ou contração (quando resfriados) de materiais estruturais, resultando em **deformações térmicas e tensões térmicas**.

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$$

ε_T :deformação térmica [m/m]

α : coeficiente de expansão térmica [1/°C]

ΔT : variação de temperatura [°C]



A maioria das pontes é projetada com juntas de dilatação térmica para equilibrar o movimento térmico do tabuleiro e assim evitar a tensão térmica

Deformação Térmica

$$\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L}$$

$$\therefore \quad \delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$$

δ_T :mudança no comprimento do elemento [m]