REGLAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES

Cuadro resumen de las INDETERMINACIONES.

Tipo I. $\lim_{x\to a} f(x) = \left(\frac{k}{0}\right)$

Método: calcular los límites laterales.

Ejemplo: $\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0}\right)$

Tipo II. $\lim_{x\to a} f(x) = \left(\frac{0}{0}\right)$

Caso 1. f(x) es un cociente de polinomios.
Método: simplificar mediante la descomposición en factores primos.

Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2}$

Observación: en la descomposición del numerador y el denominador YA SE CONOCE UNA RAÍZ.

Caso 2. f(x) contiene sumas y raíces cuadradas.
Método: multiplicar y dividir por el conjugado de la parte de la fracción que contenga la raíz cuadrada.

Ejemplo: $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2}$

Tipo III. $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Método: se divide numerador y denominador por la mayor potencia del denominador.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x-4}{5x^3-2x^2+3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Tipo IV. $\lim_{x\to\infty} f(x) = (\infty - \infty)$

Caso 1. Las expresiones contienen raíces cuadradas.
Método: multiplicar y dividir la expresión por el conjugado de la expresión que contenga las raíces.

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3} - x = (\infty - \infty)$

Caso 2. Diferencia de fracciones algebraicas.
Método: efectuar la diferencia para reducirla a una fracción algebraica.

Ejemplo: $\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = (\infty - \infty)$

Tipo. Límites de los polinomios $\lim_{x\to\infty} P(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} P(x)$

Método: considera que a efectos del límite sólo interviene el término de mayor grado.

Estudiemos los límites de los monomios y sus inversos.

- $\lim_{x\to\infty} ax^n = a\cdot\infty^n = a\cdot\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>0 \\ -\infty & \text{si} \quad a<0 \end{cases}$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{ax^n} = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right) = 0$

Esto permite generalizar el límite en el infinito de cualquier polinomio. Lo razonaré para el caso de grado 3

- $$\lim_{x\to\infty} \left(ax^3+bx^2+cx+d\right) = \lim_{x\to\infty} ax^3\cdot\left(\frac{ax^3}{ax^3}+\frac{bx^2}{ax^3}+\frac{cx}{ax^3}+\frac{d}{ax^3}\right) =$$
$$\lim_{x\to\infty} ax^3\cdot\left(1+\frac{b}{ax}+\frac{c}{ax^2}+\frac{d}{ax^3}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(ax^3\right)$$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{P(x)} = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right) = 0$

Conclusión: en los límites en el infinito de los polinomios el término que marca el límite es el de MAYOR GRADO.

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x^2-5x+3\right) = \lim_{x\to\infty}\left(3x^2\right) = +\infty$$

Nota: Si estudiáramos $\lim_{x\to-\infty} P(x)$ tendríamos situaciones parecidas, habría que tener cuidado con los signos

- $\lim_{x\to-\infty} ax^n = a\cdot(-\infty)^n = a\cdot\infty = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a>0 \quad \text{y} \quad n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si} \quad a>0 \quad \text{y} \quad n \text{ es impar} \\ -\infty & \text{si} \quad a<0 \quad \text{y} \quad n \text{ es par} \\ +\infty & \text{si} \quad a<0 \quad \text{y} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{ax^n} = \left(\frac{1}{\pm\infty}\right) = 0$

Como ejercicio sencillo observa y comprende la siguiente tabla:

$x\to\infty$	$x^3+2x^2-5x+7\to+\infty$
$x\to\infty$	$-2x^3+x^2+5\to-\infty$
$x\to\infty$	$-3x^3+200x^2+x+1\to-\infty$

$x\to-\infty$	$2x^3-x^2+88x+7\to-\infty$
$x\to-\infty$	$-2x^4+x^3-4x+1\to-\infty$
$x\to-\infty$	$-x^3+x^2-9x+3\to+\infty$

Tipo I. Indeterminación $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left(\dfrac{k}{0}\right)$

Método: se estudian los límites laterales.

Caso 1.

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0}\right) \qquad \text{NO TIENE}$$

$$\lim_{\substack{x\to 3^+ \\ x>3}} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0^+}\right) = +\infty \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to 3^- \\ x<3}} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Como los límites son distintos se dice que la función NO TIENE LÍMITE

Caso 2.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \left(\frac{3}{0}\right) = \infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -1^+ \\ x>-1}} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{3}{(+0)^2} = +\infty \qquad\qquad \lim_{\substack{x\to -1^- \\ x<-1}} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{3}{(-0)^2} = +\infty$$

Como los límites coinciden se dice que el límite es ∞

Tipo II. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \left(\dfrac{0}{0}\right)$

Caso 1. f(x) es un cociente de polinomios.

Método: se descompone en factores primos el numerador y el denominador, se simplifica y se "toman límites"

- $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{1}{2}$$

  $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$, en este caso se "ve" que se trata de una diferencia de cuadrados. En otro caso se emplea el procedimiento general.

  $$x^2+2x-3 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \text{soluciones} \begin{cases} x=1 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow$$

  $$x^2+2x-3=(x-1)\cdot(x+3)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Descompongamos en factores el numerador y el denominador.

$$\left.\begin{array}{l} x^2-4=(x+2)\cdot(x-2) \\ x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=0, \quad \text{resolviendo} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2-4x+4=(x-2)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\frac{(x+2)\cdot(x-2)}{(x-2)^2}=\frac{x+2}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-2}=\left(\frac{4}{0}\right)$$

Y se resolvería según el **Caso I**. Puedes comprobar que los límites laterales no coinciden siendo

$$\lim_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\frac{x+2}{x-2}=\left(\frac{4}{+0}\right)=+\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}}\frac{x+2}{x-2}=\left(\frac{4}{-0}\right)=-\infty$$

Caso 2. f(x) contiene sumas y raíces cuadradas.
Método: se multiplica y divide por el conjugado de la parte de la fracción que contenga la raíz cuadrada.

Debes recordar una identidad notable y sus derivadas:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

$$\left(\sqrt{a}+b\right)\cdot\left(\sqrt{a}-b\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-b^2=a-b^2$$

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\cdot\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a^2-b$$

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2=a-b$$

- $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{(x-2)}\cdot\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)+1}{\sqrt{x-1}+1}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2-1^2}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\cdot\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = 2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{1+2x}+1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+2x}\right)^2 - 1^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{1+2x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{1+2x}+1 = 2$$

Tipo III. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Método: se divide el numerador y el denominador por la mayor potencia del denominador.
Se pueden distinguir 3 casos según sean los valores relativos de los grados del numerador y denominador.

Caso 1. grado de P(x) = grado Q(x)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x-4}{5x^3-2x^2+3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3+5x-4}{x^3}}{\dfrac{5x^3-2x^2+3x+1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{2}{5}$$

Regla práctica:

Se calcula el cociente de los coeficientes de mayor grado $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+5x-4}{5x^3-2x^2+3x+1} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \dfrac{2}{5}$

Caso 2. grado de P(x) < grado Q(x)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5x-4}{5x^3-2x^2+3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2+5x-4}{x^3}}{\dfrac{5x^3-2x^2+3x+1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

Regla práctica:
El límite es SIEMPRE 0.

Caso 3. grado de P(x) > grado Q(x)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x-4}{5x^3-2x^2+3x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^4+5x-4}{x^3}}{\dfrac{5x^3-2x^2+3x+1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^4}{x^3}+\dfrac{5x}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{2x^2}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}}{5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\left(\frac{\infty}{5}\right)=\infty$$

Regla práctica:
El límite es SIEMPRE $\pm\infty$, el signo depende de los signos relativos de los coeficientes de mayor grado..
A modo de resumen

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\ldots+c}{dx^m+ex^{m-1}+\ldots+f}=\begin{cases}\pm\infty & \text{si}\quad n>m\\ \dfrac{a}{d} & \text{si}\quad n=m\\ 0 & \text{si}\quad n<m\end{cases}$$

Hay un caso que conviene estudiar a parte: <u>En las expresiones del numerador o denominador aparecen raíces.</u>

- $\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

¿Cuál es la mayor potencia del denominador? $\sqrt{x^2}$, que corresponde a **x.**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x-3}{x}}{\dfrac{\sqrt{3x^2+4x-1}}{x}}$$

Observa atentamente el denominador:

$$\frac{\sqrt{3x^2+4x-1}}{x}=\frac{\sqrt{3x^2+4x-1}}{\sqrt{x^2}}=\sqrt{\frac{3x^2+4x-1}{x^2}}=\sqrt{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\sqrt{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

Observa el numerador

$$\frac{2x-3}{x}=\frac{2x}{x}-\frac{3}{x}=2-\frac{3}{x}$$

Recolocando numerador y denominador

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{x}}{\sqrt{3+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Regla práctica: en los polinomios o expresiones algebraicas que tienden a infinito el término que cuenta, el que marca el límite, es el de mayor grado:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-3 \sim 2x \\ \sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tipo IV. $\lim_{x\to\infty} f(x) = (\infty-\infty)$

Caso 1. Las expresiones contienen raíces cuadradas.
Método: multiplicar y dividir la expresión por el conjugado de la expresión que contenga las raíces.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+3}-x = (\infty-\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0$$

Caso 2. Diferencia de fracciones algebraicas.
Método: efectuar la diferencia para reducirla a una fracción algebraica.

$$\lim_{x\to1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = (\infty-\infty)$$

$$\text{el} \quad \text{mcm}\left[\left(x^2-1\right),\left(x-1\right)\right] = x^2-1$$

$$\lim_{x\to1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{2-2x\cdot(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to1} \frac{2-2x^2-2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right)$$

Queda reducida a una indeterminación del tipo $\left(\frac{k}{\infty}\right)$. Se calculan los límites laterales.

$$\lim_{\substack{x\to1^+ \\ x>1}} \frac{2-2x^2-2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{+0}\right) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x\to1^- \\ x<1}} \frac{2-2x^2-2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{-0}\right) = +\infty$$

Como son distintos concluimos: NO TIENE LÍMITE.