

REGLAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES

Cuadro resumen de las INDETERMINACIONES.

Tipo I. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\frac{k}{0} \right)$

Método: calcular los límites laterales.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0} \right)$

Tipo II. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\frac{0}{0} \right)$

Caso 1. $f(x)$ es un cociente de polinomios.

Método: simplificar mediante la descomposición en factores primos.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2}$

Observación: en la descomposición del numerador y el denominador YA SE CONOCE UNA RAÍZ.

Caso 2. $f(x)$ contiene sumas y raíces cuadradas.

Método: multiplicar y dividir por el conjugado de la parte de la fracción que contenga la raíz cuadrada.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2}$

Tipo III. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Método: se divide numerador y denominador por la mayor potencia del denominador.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 4}{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Tipo IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (\infty - \infty)$

Caso 1. Las expresiones contienen raíces cuadradas.

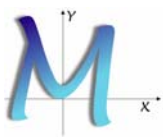
Método: multiplicar y dividir la expresión por el conjugado de la expresión que contenga las raíces.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3} - x = (\infty - \infty)$

Caso 2. Diferencia de fracciones algebraicas.

Método: efectuar la diferencia para reducirla a una fracción algebraica.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{2x}{x-1} = (\infty - \infty)$



Tipo. Límites de los polinomios $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$

Método: considera que a efectos del límite sólo interviene el término de mayor grado.

Estudiemos los límites de los monomios y sus inversos.

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} ax^n = a \cdot \infty^n = a \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^n} = \left(\frac{1}{\pm\infty} \right) = 0$$

Esto permite generalizar el límite en el infinito de cualquier polinomio. Lo razonaré para el caso de grado 3

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = \lim_{x \rightarrow \infty} ax^3 \cdot \left(\frac{ax^3}{ax^3} + \frac{bx^2}{ax^3} + \frac{cx}{ax^3} + \frac{d}{ax^3} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ax^3 \cdot \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2} + \frac{d}{ax^3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax^3)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{P(x)} = \left(\frac{1}{\pm\infty} \right) = 0$$

Conclusión: en los límites en el infinito de los polinomios el término que marca el límite es el de MAYOR GRADO.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 5x + 3) = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2) = +\infty$$

Nota: Si estudiáramos $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ tendríamos situaciones parecidas, habría que tener cuidado con los signos

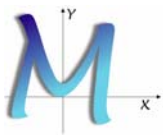
$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n = a \cdot (-\infty)^n = a \cdot \infty = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } a > 0 \text{ y } n \text{ es impar} \\ -\infty & \text{si } a < 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ +\infty & \text{si } a < 0 \text{ y } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{ax^n} = \left(\frac{1}{\pm\infty} \right) = 0$$

Como ejercicio sencillo observa y comprende la siguiente tabla:

$x \rightarrow \infty$	$x^3 + 2x^2 - 5x + 7 \rightarrow +\infty$
$x \rightarrow \infty$	$-2x^3 + x^2 + 5 \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow \infty$	$-3x^3 + 200x^2 + x + 1 \rightarrow -\infty$

$x \rightarrow -\infty$	$2x^3 - x^2 + 88x + 7 \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$-2x^4 + x^3 - 4x + 1 \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$-x^3 + x^2 - 9x + 3 \rightarrow +\infty$



Tipo I. Indeterminación $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\frac{k}{0} \right)$

Método: se estudian los límites laterales.

Caso 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0} \right) \quad \text{NO TIENE}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3^+ \\ x > 3}} \frac{2x}{x-3} = \left(\frac{6}{0^+} \right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 3^- \\ x < 3}} \frac{2x}{x-3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

Como los límites son distintos se dice que la función NO TIENE LÍMITE

Caso 2.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \left(\frac{3}{0} \right) = \infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1^+ \\ x > -1}} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{3}{(+0)^2} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1^- \\ x < -1}} \frac{x+4}{(x+1)^2} = \frac{3}{(-0)^2} = +\infty$$

Como los límites coinciden se dice que el límite es ∞

Tipo II. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \left(\frac{0}{0} \right)$

Caso 1. $f(x)$ es un cociente de polinomios.

Método: se descompone en factores primos el numerador y el denominador, se simplifica y se “toman límites”

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2}$$

$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$, en este caso se “ve” que se trata de una diferencia de cuadrados. En otro caso se emplea el procedimiento general.

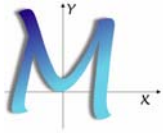
$$x^2 + 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \text{soluciones} \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1) \cdot (x+3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \left(\frac{0}{0} \right)$$

Descomponemos en factores el numerador y el denominador.



$$\left. \begin{aligned} x^2 - 4 &= (x+2) \cdot (x-2) \\ x^2 - 4x + 4 &\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0, \text{ resolviendo } \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow x^2 - 4x + 4 &= (x-2)^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{(x+2) \cdot (x-2)}{(x-2)^2} = \frac{x+2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-2} = \left(\frac{4}{0} \right)$$

Y se resolvería según el **Caso I**. Puedes comprobar que los límites laterales no coinciden siendo

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2^+ \\ x > 2}} \frac{x+2}{x-2} = \left(\frac{4}{+0} \right) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 2^- \\ x < 2}} \frac{x+2}{x-2} = \left(\frac{4}{-0} \right) = -\infty$$

Caso 2. $f(x)$ contiene sumas y raíces cuadradas.

Método: se multiplica y divide por el conjugado de la parte de la fracción que contenga la raíz cuadrada.

Debes recordar una identidad notable y sus derivadas:

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

$$(\sqrt{a} + b) \cdot (\sqrt{a} - b) = (\sqrt{a})^2 - b^2 = a - b^2$$

$$(a + \sqrt{b}) \cdot (a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$$

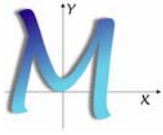
$$(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{(x-2)} \cdot \frac{(\sqrt{x-1})+1}{\sqrt{x-1}+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1})^2 - 1^2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2) \cdot (\sqrt{x-1}+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2) \cdot (\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1}+1} = \frac{1}{2}$$



- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+2x}+1}{\sqrt{1+2x}+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x})^2 - 1^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\sqrt{1+2x}+1)}{1+2x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (\sqrt{1+2x}+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+2x}+1 = 2$$

Tipo III. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Método: se divide el numerador y el denominador por la mayor potencia del denominador.

Se pueden distinguir 3 casos según sean los valores relativos de los grados del numerador y denominador.

Caso 1. grado de P(x) = grado Q(x)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 4}{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3 + 5x - 4}{x^3}}{\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{5}$$

Regla práctica:

Se calcula el cociente de los coeficientes de mayor grado $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x - 4}{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{2}{5}$

Caso 2. grado de P(x) < grado Q(x)

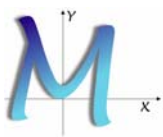
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 4}{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2 + 5x - 4}{x^3}}{\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{0}{5} = 0$$

Regla práctica:

El límite es SIEMPRE 0.

Caso 3. grado de P(x) > grado Q(x)



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 5x - 4}{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4 + 5x - 4}{x^3}}{\frac{5x^3 - 2x^2 + 3x + 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^4}{x^3} + \frac{5x}{x^3} - \frac{4}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + \frac{5}{x^2} - \frac{4}{x^3}}{5 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \left(\frac{\infty}{5} \right) = \infty$$

Regla práctica:

El límite es SIEMPRE $\pm\infty$, el signo depende de los signos relativos de los coeficientes de mayor grado..

A modo de resumen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots + c}{dx^m + ex^{m-1} + \dots + f} = \begin{cases} \pm\infty & \text{si } n > m \\ \frac{a}{d} & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n < m \end{cases}$$

Hay un caso que conviene estudiar a parte: En las expresiones del numerador o denominador aparecen raíces.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$$

¿Cuál es la mayor potencia del denominador? $\sqrt{x^2}$, que corresponde a **x**.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x - 3}{x}}{\frac{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}{x}}$$

Observa atentamente el denominador:

$$\frac{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}{x} = \frac{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{3x^2 + 4x - 1}{x^2}} = \sqrt{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \sqrt{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

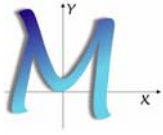
Observa el numerador

$$\frac{2x - 3}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{3}{x} = 2 - \frac{3}{x}$$

Recolocando numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3}{\sqrt{3x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x}}{\sqrt{3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Regla práctica: en los polinomios o expresiones algebraicas que tienden a infinito el término que cuenta, el que marca el límite, es el de mayor grado:



$$\left. \begin{array}{l} 2x-3 \sim 2x \\ \sqrt{3x^2+4x-1} \sim \sqrt{3x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-3}{\sqrt{3x^2+4x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{3x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tipo IV. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (\infty - \infty)$

Caso 1. Las expresiones contienen raíces cuadradas.

Método: multiplicar y dividir la expresión por el conjugado de la expresión que contenga las raíces.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+3} - x = (\infty - \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - x) \cdot (\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0$$

Caso 2. Diferencia de fracciones algebraicas.

Método: efectuar la diferencia para reducirla a una fracción algebraica.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = (\infty - \infty)$$

$$\text{el mcm}[(x^2-1), (x-1)] = x^2-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x \cdot (x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2x^2 - 2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{0}\right)$$

Queda reducida a una indeterminación del tipo $\left(\frac{k}{\infty}\right)$. Se calculan los límites laterales.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1^+ \\ x > 1}} \frac{2 - 2x^2 - 2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{+0}\right) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x < 1}} \frac{2 - 2x^2 - 2x}{x^2-1} = \left(\frac{-2}{-0}\right) = +\infty$$

Como son distintos concluimos: **NO TIENE LÍMITE.**