# Relações de Girard

São fórmulas matemáticas que relacionam os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

**Na equação do 2º.grau:**

$ax^2 + bx + c$, temos $x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$ e $x'.x'' = \dfrac{c}{a}$, onde x' e x'' são raízes.Vejamos o porquê:

A decomposição em fatores do 1°.grau é:

$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$

Dividindo todos os termos por a, temos:

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = (x - x')(x - x'')$

Desenvolvendo o produto, temos:

$x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = x^2 - (x' + x'')x + (x'.x'')$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$\mathbf{(x' + x'') = -\dfrac{b}{a}}$ **e**

$\mathbf{(x'.x'') = \dfrac{c}{a}}$

**Na equação do 3º grau:**

Consideremos a equação algébrica do 3º.grau: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ e sejam x', x'' e x'''as suas raízes.

A sua decomposição em fatores do 1º.grau é:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x')(x - x'')(x - x''')$

Desenvolvendo o produto, temos:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x' + x'' + x''')x^2 + (x'x'' + x'x''' + x''x''')x - x'x''x''']$

Dividindo todos os temos por a, temos:

$x^3 + \dfrac{b}{a}x^2 + \dfrac{c}{a}x + \dfrac{d}{a} = x^3 - (x' + x'' + x''')x^2 + (x'x'' + x'x''' + x''x''')x - x'x''x'''$

Pela igualdade de polinômios, temos:

$\mathbf{x' + x'' + x''' = -\dfrac{b}{a}}$

$\mathbf{x'x'' + x'x''' + x''x''') = \dfrac{c}{a}}$ **e**

$\mathbf{x'x''x''' = -\dfrac{d}{a}}$

**Na equação de grau n:**

De forma análoga, considerando a equação algébrica de grau n:

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ de raízes x', x'', x''', ..., $x^{n'}$, são válidas as seguintes relações entre as raízes e os coeficientes, conhecidas como relações de Girard:

1ª) A soma das raízes é:

$$x' + x'' + x''' + \ldots + x^{n'} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

2ª) O produto de n raízes é:

$$x'.x''.x'''. \ldots . x^{n'} = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a. duas a duas é:

$$x'x'' + x'x''' + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

b. três a três é:

$$x'x''x''' + x'x''x'''' + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

c. quatro a quatro é:

$$x'x''x'''x'''' + x'x''x'''x''''' + \dots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

**Exemplos:**

1) Escrever as relações de Girard para a equação:
$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

Solução:
Sejam as raízes x', x'', x'''.
Temos:
a = 1
b = -5
c = 8
d = -4
Pelas relações de Girard:

$$x' + x'' + x''' = -\frac{b}{a} = \frac{5}{1} = 5$$

$$x'x''x''' = -\frac{d}{a} = \frac{4}{1} = 4$$

$$x'x'' + x'x''' + x''x''' = \frac{c}{a} = \frac{8}{1} = 8$$

2) Resolver a equação $x^3 - 10x^2 + 31x - 30 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é 5.

Solução:
Sejam x', x'', x''' as raízes, tais que x' + x'' = 5 (1)  Das relações de Girard, temos:

$$x' + x'' + x''' = -\frac{b}{a} = \frac{10}{1} = 10 \ (2)$$

De (1) e (2), temos:
5 + x''' = 10
x''' = 10 – 5
x''' = 5  Das relações de Girard:

$$x'x''x''' = -\frac{d}{a} = \frac{30}{1} = 30$$

x'x''.5 = 30

$$x'x'' = \frac{30}{5}$$

x'x'' = 6  Temos:
x' + x'' = 5  e  x'x'' = 6  Intuitivamente, podemos supor x' = 2 e x'' = 3
Substituindo na equação, ou seja, para x = 2, para x = 3 e para x = 5 vemos que a igualdade é verdadeira. Logo 2, 3 e 5 são raízes da equação.