Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina

Unidade de Araranguá

Curso Técnico em Eletroeletrônica

Módulo I:

Preparação Tecnológica

Fevereiro

2008

Ministério da Educação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Unidade de Araranguá
Curso Técnico em Eletromecânica – Módulo 01
Unidade Curricular: Preparação Tecnológica

Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina

Unidade de Araranguá

Curso Técnico em Eletromecânica

Preparação Tecnológica

Material instrucional especialmente organizado pela Prof. Suzy Pascoali para uso do CEFET/SC, Unidade de Araranguá.

Agradeço ao professor Fabrício por elaborar boa parte da apostila. Aos sites da internet que disponibilizam conteúdo didático. Aos professores Cristiano e Jacson do CEFET Chapecó que cederam gentilmente seu material didático.

Fevereiro

2008

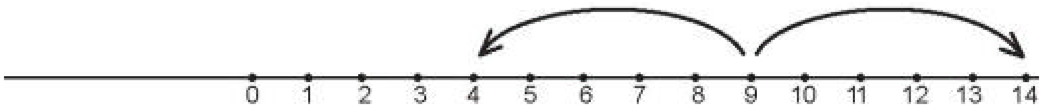
CAPÍTULO 01 – Operações com Números Reais, Regra de Três e Porcentagem.

1.1 – Operações Básicas

Vamos iniciar nosso curso de matemática do 2° grau recordando as quatro operações:

- adição
- subtração
- multiplicação
- divisão

Os números inteiros são os nossos conhecidos 0, 1, 2, 3, ... e também os negativos -1, -2, -3, ... Para visualizar as operações de adição e subtração, representamos os números inteiros como pontos de uma reta.



Na operação 9 + 5 = 14, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a direita e chegamos ao número 14. Na operação 9 - 5 = 4, partimos do número 9, andamos 5 unidades para a esquerda, chegamos ao número 4. Para resumir, as regras são as seguintes:

- Escreve 5 ou +5 é a mesma coisa.
- Quando sinais de números e sinais de operações aparecem juntos, então:

(+)	(+)	=	(+)
(+)	(-)	=	(-)
(-)	(+)	=	(-)
(-)	(-)	=	(+)

- Na multiplicação, a ordem dos fatores não altera o produto. Por isso 5 . 7 = 7 . 5
- Quando um número multiplica uma soma, resolve-se a soma ou multiplica-se cada parcela desta soma primeiramente. 2 . (3 + 5 + 2) = 2 . (10) = 6 + 10 + 4

Na operação 82 ÷ 5, 82 é o dividendo, 5 é o divisor, 16 é o quociente e 2 é o resto.

Exercícios:
1. Leia com atenção e resolva os problemas:

a) Em uma empresa há 358 tornos e 453 osciloscópios. Quantos equipamentos existem nesta empresa?

b) Numa caixa tem 246 arruelas. Foram vendidas 198 arruelas. Quantos arruelas sobraram na caixa?

c) André tem 154 diodos. Lucas tem o triplo de diodos de André. Quantos diodos Lucas tem?

d) Senhora Carmen tem ao total 108 parafuso e porca para separar. O número de parafuso e de porcas são iguais. Quantas porcas ela tem?

2.Resolva as adições:

a)75+12=	b)482+181=
c)24,5+39,4=	d)7,1+4,9=
e)10+0,1=	f)106+0,8=

3. Resolva as subtrações:

a) 248-25=	b) 9,8-1,7=
c) 52,1-13,7=	d) 22-33=

4. Resolva as multiplicações:

a)42x2=	b)145x3=
c)246x3=	d)276x3=

5. Resolva as divisões:

a) 24:4=	b) 145:3=
c) 8,1:3=	d) 1,8:6=
e) 412:4,2=	f) 18:0,6=

6. Escreva as grandezas físicas por extenso:

a) 18 kg____

b) 2 mg____

c) 5 t____

d) 13 cm____

e) 14 km____

f) 0,1 m^2____

g) 2 cm^2____

h) 8 m^3____

i) 3,2 mm^3____

j) 4,02 m/s____

k) 12,1 m^3/s____

l) 12,1 m/s^2____

m) 43 MPa____

n) 10 mbar____

o) 100 kgf/cm^2____

p) 125 A____

q) 302 kW____

r) 69,0 mC____

s) 84 nF____

1.2 Frações

O entendimento de frações evita a memorização de definições e regras, sem compreensão

As frações são aplicadas a diversas "situações-problema“ de casos reais

Uma fração pode representar parte de um todo ou parte de uma quantidade

Vamos criar exemplos de situações em que se toma uma parte do todo:

- Uma pessoa de um casal
- Duas cartas de um baralho
- Três laranjas de uma dúzia

  Como estes exemplos podem ser representados matematicamente

- Ainda nestes exemplos, identifique numerador e denominador

Cálculo de Frações

Quanto é ¼ de 200?

E 1/5 de 50?

Simplifique as frações:

10/20

20/25

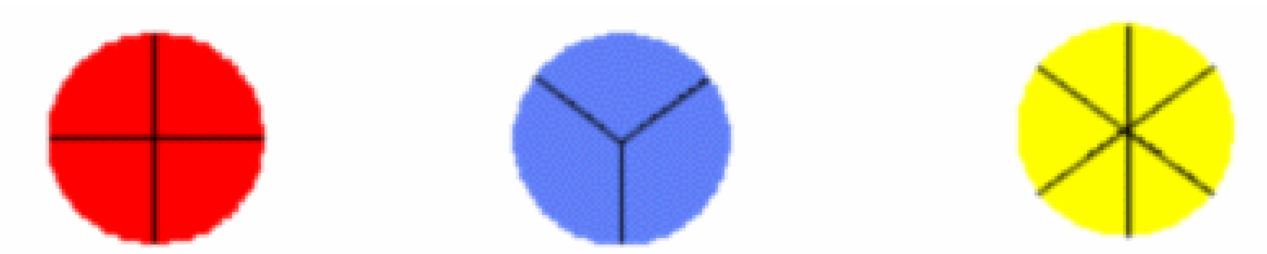
9/12

16/50

As frações 2/5 e 4/10 são iguais?

E as frações 2/5 e 20/50?

Em quantas partes as figuras abaixo estão sendo divididas?



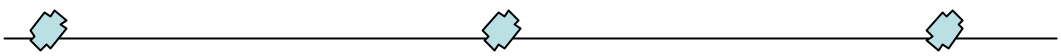
UM POUCO DE HISTÓRIA

Os egípcios usavam cordas para remarcar as terras depois das inundações do rio Nilo

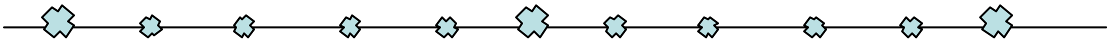
Nessas cordas eles faziam vários nós de modo que a distância entre dois nós consecutivos fossem iguais

Essa distância era a unidade de medida consideradaNessas cordas eles faziam vários nós de modo que a distância entre dois nós consecutivos fossem iguais

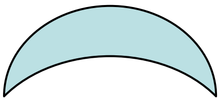
Essa distância era a unidade de medida considerada



Os números decimais eram representados por pequenos nós entre as unidades, que eram divididas em cinco partes



Para escrever frações de numerador 1, os egípcios colocavam um símbolo que representava o denominador embaixo do sinal:



Problemas Envolvendo Frações

1. Uma mulher partiu um terreno em quatro partes iguais e doou uma para cada filho

   Desenhe o terreno com as divisões

   Qual fração indica cada parte de cada filho

   Se o terreno tem 2.400 m^2, qual a área de cada filho?

2. Três amigos, em uma lanchonete, dividiram a conta, cada um pagando 3/8, 1/3 e 7/24, respectivamente.

   Quem pagou a maior parte?

   Quem pagou a menor parte?

3. Um parafuso tem 7/8 polegadas, e um outro, 3/4. Qual deles é o maior?

Operações com Frações

Soma

1/3 + 2/3 = ?

4/6 + 1/6 = ?

1/3 + 2/5 = ?

1 + 2/5 = ?

Subtração

1/3 - 2/3 = ?

4/6 - 1/6 = ?

1/3 - 2/5 = ?

1 - 2/5 = ?

Multiplicação

1/3 * 2/3 = ?

4/6 * 1/6 = ?

3 * 2/5 = ?

1/3 * 2 = ?

Divisão

1/3 : 2/3 = ?

4/6 : 1/6 = ?

3 : 2/5 = ?

1/3 : 2 = ?

Potenciação

$(2/3)^2 = ?$

$(2/5)^{-1} = ?$

$(3/2)^{-2} = ?$

$(2/3)^3 = ?$

1.3 Razão e Proporção

Razão e Proporção são conceitos diretamente relacionados ao conceito de grandeza

Grandeza:

É uma relação numérica estabelecida com um objeto

É tudo que se pode contar, medir, pesar, enfim, enumerar.

Assim, a altura de uma árvore, o volume de um tanque, o peso de um corpo, a quantidade pães, entre outros, são grandezas.

Razão:

É a divisão ou relação entre duas grandezas

Exemplo: se numa classe tivermos 40 meninos e 30 meninas, qual a razão entre o número de meninos e o número de meninas?

$$\frac{\text{número de meninos}}{\text{número de meninas}} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$$

Proporção:

É a igualdade entre razões

Exemplo: meu carro faz 13 km por litro de combustível, então para 26 km preciso de 2 L, para 39 km preciso de 3 L e assim por diante

$$R_1 = \frac{26}{2} = \frac{13}{1} \qquad R_2 = \frac{39}{3} = \frac{13}{1}$$

Logo $R_1 = R_2$

Razões e proporções entre grandezas

Razões entre grandezas de mesma espécie não possuem unidade de medida

Razões entre grandezas de espécies diferentes possuem unidade de medida (Ex: km/h, km/l, …)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Exercício

Para o exemplo do consumo de combustível (apresentado anteriormente)

Teste as propriedades apresentadas

A razão possui unidade de medida?

Grandezas diretamente proporcionais

O aumento de uma implica no aumento da outra

A redução de uma implica na redução da outra

Ex: Número de pães e quantidade de trigo

Grandezas inversamente proporcionais

O aumento de uma implica na redução da outra

A redução de uma implica no aumento da outra

Ex: Velocidade média de um avião e tempo de viagem

Exercícios

Classifique as relações em diretamente proporcionais e indiretamente proporcionais

Quantidade de cimento e área da obra

Velocidade de uma impressora e páginas impressas por minuto

Velocidade de uma impressora e tempo necessário para imprimir 100 páginas

Quantidade de kwh consumidos e conta de energia

Desconto promocional e valor pago por um produto

Uma pesquisa realizada com 200 pessoas para se conhecer qual é o canal de televisão preferido pelo público mostrou que 120 delas tinham preferência pelo canal X.

Qual a razão entre as pessoas que preferem o canal X e as pessoas entrevistadas?

Numa classe há 20 rapazes e 25 moças

Qual a razão entre o número de rapazes e moças?

Qual a razão entre o número de moças e rapazes?

Qual a razão entre o número de rapazes e o número de alunos na sala?

Qual a razão entre o número de moças e o número de alunos na sala?

Uma sala tem 8 m de comprimento. Um arquiteto representa esta sala com 20 cm em um desenho

Qual a escala do desenho?

Qual será o tamanho da representação de uma sala de 3m?

Se eu mantenho uma velocidade média de 4,8Km/h, em quanto tempo irei percorrer 6.000m?

Qual a escala do desenho?

Qual será o tamanho da representação de uma sala de 3m?

A igualdade 6/14 = 9/21 é uma proporção.

1.4 Regra de Três

Regra de Três é o cálculo ou processo matemático utilizado para resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas

As grandezas podem ser diretas ou grandezas inversamente proporcionais.

É aplicável à vários tipos de problemas de várias áreas

Engenharia

Física

Logística

Financeira

Além de vários problemas do cotidiano

A Regra de Três pode ser simples ou composta

Simples: envolve somente duas grandezas

Composta: envolve mais de duas grandezas

Exemplo: Um copo de água mineral custa R$1,50. Quanto custam 6 copos?

Grandeza 1: copo de água mineral

Grandeza 2: preço

1	1,50
6	x

$$1 * x = 6 * 1,50$$

$$x = R\$ \ 9,00$$

Exemplo: Uma torneira despeja 30 litros de água em 6 minutos. Para encher um reservatório de 1.000 litros, essa torneira levará quanto tempo?

Grandeza 1: litros de água

Grandeza 2: tempo

30 ———————— 6

1000 ———————— x

30 * x = 6 * 1000

x = 200 minutos ou 3h20min

Exercício:

Um automóvel percorre um espaço de 480km em 2h. Quantos quilômetros ele percorrerá em três horas? R: 720 km

Até agora só trabalhamos com problemas cujas grandezas são diretamente proporcionais

Há problemas em que uma Exemplo: Um ciclista percorre uma determinada distância em 06 horas a 5Km/h. Quanto tempo gastará para percorrer esta mesma distância a 03 Km/h.

Grandeza 1: tempo (diminui à medida que a velocidade aumenta)

Grandeza 2: velocidade

Uma grandeza sofre variação oposta em relação a outra

Ou seja, se uma aumenta, a outra diminui
Exemplo: Se 20 homens trabalhando durante 15 dias constroem 500 metros de um muro, quantos homens serão necessários para construir mais 1000 metros deste muro em 30 dias?

Grandeza 1: Número de homens trabalhando

Grandeza 2: Tempo de duração do trabalho

Grandeza 3: Tamanho do muro

20 ↑ ———— ↑ ———— 15 ↓

x ———— ———— 30

20/x = 500/1000 * 30/15

x = 20 homens

Exemplo: Se 10 carros consomem em 05 dias a quantidade de 1000 litros de gasolina, quantos carros usaremos para consumir somente 500 litros de gasolina no espaço de 02 dias?

Grandeza 1: Número de carros

Grandeza 2: Número de dias

Grandeza 3: Litros de gasolina

10	↑	5	↓	1000	↑
x		2		500	

$$10/x = 2/5 * 1000/500$$

x = 12,5, ou seja, 13 carros

Regra de Três Composta

Exercício

Na alimentação de 02 bois, durante 08 dias, são consumidos 2420 kg de ração. Se mais 02 bois são comprados, quantos quilos de ração serão necessários para alimentá-los durante 12 dias? R:7260kg

1.4 Porcentagens

A porcentagem é útil em expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, número ou quantidades

A porcentagem, como o próprio nome já diz, sempre toma como base 100 unidades

Logo, uma porcentagem equivale a uma fração de denominador 100

Exemplos de situações do nosso dia-a-dia que envolvem porcentagem:

Liquidação: Descontos de até 30%

Combustíveis sobem 11,5%

Consumo de café cresce 6,8% no país

Interpretando Porcentagens

Em uma estimativa do IBGE, 61% dos brasileiros teriam de 15 a 59 anos

A fração desta porcentagem é 61/100

Significa que a cada 100 brasileiros, 61 estarão nesta faixa de idade

Considerando uma população aproximada de 188 milhões de habitantes, temos a equação:

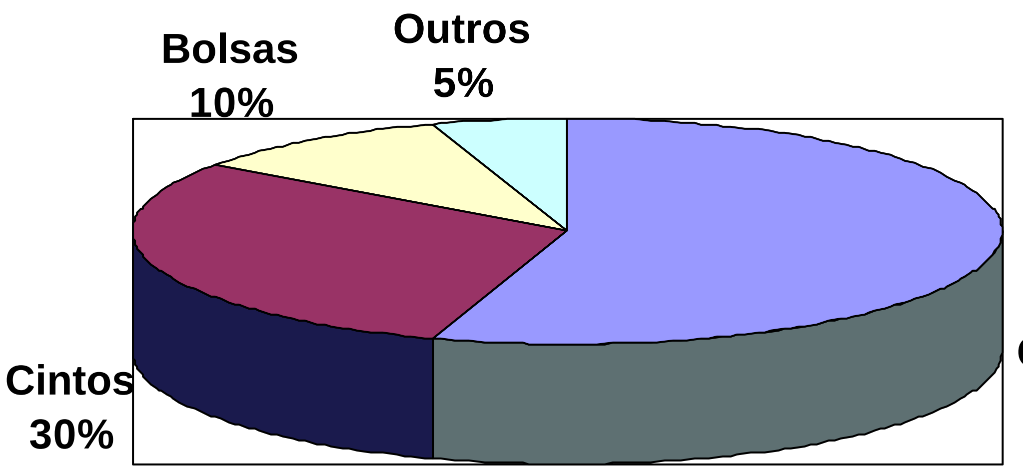
ou seja, aproximadamente 114,68 milhões de brasileiros nesta faixa de idade

A porcentagem é uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela. Veja:

- 50% é o mesmo que $\frac{50}{100}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 0,50 ou 0,5 ou metade.
- 75% é o mesmo que $\frac{75}{100}$ ou $\frac{3}{4}$ ou 0,75.
- 9% é o mesmo que $\frac{9}{100}$ ou 0,09.
- 0,4 é o mesmo que 0,40 ou $\frac{40}{100}$ ou 40%.
- 8 pessoas em um grupo de 10 correspondem a $\frac{8}{10}$ ou $\frac{80}{100}$ ou 80% do grupo.

$$188*10^{6}*\frac{61}{100}=114,68*10^{6}$$

Exercício: Uma fábrica de calçados apresentou o seguinte gráfico contendo informações sobre suas exportações. Interprete as porcentagens



Considere a seguinte situação:

Numa eleição em que votaram 12.000 eleitores, o candidato a vereador mais votado teve 5% dos votos.

Quantos votos ele obteve?

Se o candidato menos votado teve 2 votos, qual porcentagem deste candidato na eleição?

Considere a seguinte situação:

Um computador, no valor de R$1100,00, foi vendido a prazo. Foram dados 30% de entrada e o restante foi dividido em 4 prestações iguais.

Qual o **valor** de cada prestação?

Considere a seguinte situação:

Uma prova de Matemática foi realizada por 40 alunos, sendo que 36 deles foram aprovados.

Qual a porcentagem de alunos aprovados?

E de reprovados?

Considere a seguinte situação:

Um produto está sendo vendido a R$500,00, com desconto de 20% no pagamento à vista.

Quanto se deve pagar por este produto na compra à vista?

Considere a seguinte situação:

Em um determinado ano, um produtor de laranjas recolheu 4.200 caixas. No ano seguinte a produção aumentou 8,5%.

Quantas caixas de laranja foram produzidas no segundo ano?

Exercício: Calcule a porcentagem abaixo:

a) Num total de R$300,00, a quantia de R$21,00 equivale a quantos porcentos do total?

b) Se uma mercadoria que custa R$450,00 está sendo vendida com desconto de 8%, quanto é o valor do desconto e por quanto ela está sendo vendida?

c) Qual é o valor de 45% de 60?

d) Uma geladeira cujo preço à vista é de R$680,00, tem um acréscimo de 5% no seu preço se for paga em 3 prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação?

e) O salário de um trabalhador era de R$840,00 e passou a ser de R$966,00. Qual foi a porcentagem de aumento?

1.5 Potenciação

Dados um número real positivo a e um número natural n diferente de zero, chama-se potência de base a e expoente n o número a^n que é igual ao produto de n fatores iguais a a.

Propriedades fundamentais:

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ multiplicação de potências de mesma base
- $(a^m)^p = a^{m \cdot p}$ potência de potência
- $a^0 = 1$, com a ? 0
- $a^{-n} = 1/a^n$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplos

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^2 = 3^{2+5+2} = 3^9$

$$\frac{2^3}{2^1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$$

1.6 – Radiciação

Radiciação $\sqrt[3]{8} = 2$, onde 8 é o radicando.

Exemplos:

$\sqrt[3]{125 = 5}$

$\sqrt[4]{81} = 3$

1.7 – Notação Científica

A notação científica permite escrever números usando potências de 10. Sua principal utilidade é a de fornecer, num relance, a idéia da ordem de grandeza de um número que, se fosse escrito por extenso, não daria essa informação de modo tão imediato.

Exemplos:
$300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$
$0{,}0052 = 5{,}2 \cdot 0{,}001 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$
$5249 = 5{,}249 \cdot 1000 = 5{,}249 \cdot 10^3$

EXEMPLOS:

01) Calcule o valor numérico correspondente:

a) $\{35 - [20 - (5 + 3^2) \div 2] + 4^0\} = \{35 - [20 - 14 \div 2] + 1\} = \{35 - [20 - 7] + 1\} = \{35 - 13 + 1\} = 23$ ou $\frac{23}{1}$ ou 23,0.

b) $$\frac{(-2)^3 - (-3)^2 . (-5)^0 + (+10)^3}{(+5)^2 - (-4)(-5)} = \frac{-8 - 9.1 + 1000}{25 - 20} = \frac{-8 - 9 + 1000}{5} = \frac{983}{5}$$ ou 196,6

c) $(\frac{2}{3})^2 - (\frac{6}{5})^{-1}.(\frac{1}{2})^{-3} = \frac{4}{9} - \frac{5}{6}.2^3 = \frac{4}{9} - \frac{20}{3} = \frac{4-60}{9} = -\frac{56}{9}$ ou 6,222…

d) $18^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} - \sqrt{8} = \sqrt{2.3^2} - \sqrt{2^3} = 3.\sqrt{2} - 2.\sqrt{2} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

Exercício:

1. Calcule as potências com expoente inteiro

a) 3^4
b) $(2,5)^2$
c) $(-2)^3$
d) $(1/2)^3$
e) $(-2)^6$
f) 0^5
g) 5^0
h) $[v(2)]^2$
i) $[v(7)]^3$
j) 6^{-2}
l) $(-2)^{-2}$
m) $(-3/2)^{-1}$

2. Calcule o valor de:

a) $x=(-1/3)^3+[3^{-1}-(-3)^{-1}]^{-2}$

b) $y=(2^{-2}+2^2-2^{-1})/(2^{-2}-2^{-1})$

3. Calcule:

a) 10^6
b) 10^9
c) 10^{-4}
d) $10^{-6} . 10^4$

4.Escreva como potência de base 10:

a) 10000
b) 100000/100
c) 0,001
d) 0,0000001

5. calcule as potências

a) $5^{2/7}$
b) $2^{3/4}$
c) $(1/2)^{1/2}$
e) $9^{1/2}$
f) $0^{3/8}$
g) $2^{1 + 1/3}$
i) $7^{0,4}$
j) $6^{-2/3}$
l) $(-2)^{-3/2}$

d) $[v(3)]^{4/5}$ h) $8^{0,666}$ m) $(-3/2)^{-1/3}$

6. calcule o valor de:

a) $(27^{1/3}+64^{1/2}-8^{-2/3}+4^{1/2})^{1/2}$

b) $[3^{o}+(-2)^{2}-(1/3)^{-1}]/(1/2)^{-2}$

7. reduza a única potência

a) $7^4.7^2$ e) $3^{10}/3^4$ i) $5^{(2^3)}$

b) 3.3^8 f) a^6/a j) 7^{3^2}

c) $2^3.2^7.2^2$ g) $(2^5)^3$ l) $(2^7.2^3)/2^{-4}$

d) $5^9:5^2$ h) $(2^6)^x$ m) $(3^4.3)^{-2}$

8. escreva em notação científica os seguintes números:

a) 500 e) 0,034 i) 48000

b) 0,0006 f) 0,8 j) 7000000000

c) 0,00000025 g) 20,39 l) 923,1

d) 0,002 h) 0,000008 m) 40400

9. escreva o valor de cada número escrito em notação científica:

a) 8.10^4 c) $3,52.10^5$

b) 5.10^{-2} d) $1,6.10^{-3}$

Resolva as seguintes Somas:

a) $180m+3m$
b) $10m+100n$
c) $20m+100p$
d) $5m+25m$
e) $10G+250M$
f) $10G+250M+2M+2G$

g) $100k + 10M$
h) $1m + 0{,}025m$
i) $100p + 0{,}01n$
j) $10m + 0{,}02m$
k) $1m + 0{,}025m$

1.8 Calculadora Científica

A calculadora científica permite conversão entre bases numéricas além cálculos de trigonométricos, lógicos, exponenciais, logarítmicos, fatoriais e outros

É útil em estatística, aplicações matemáticas, engenharia, computação...

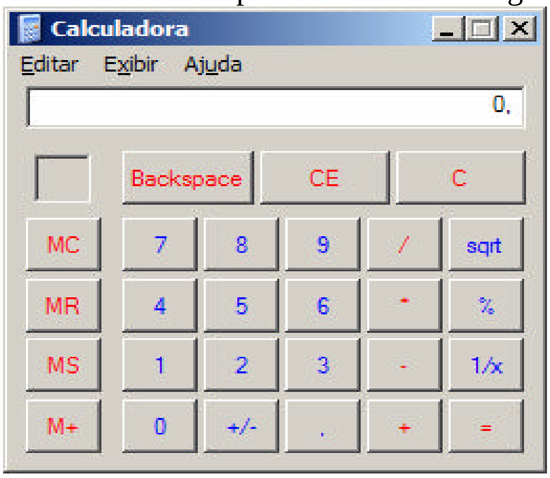
É um pré-requisito para esta aula o conhecimento de operações aritméticas básicas em calculadoras

Utilizaremos aqui a Calculadora do Windows

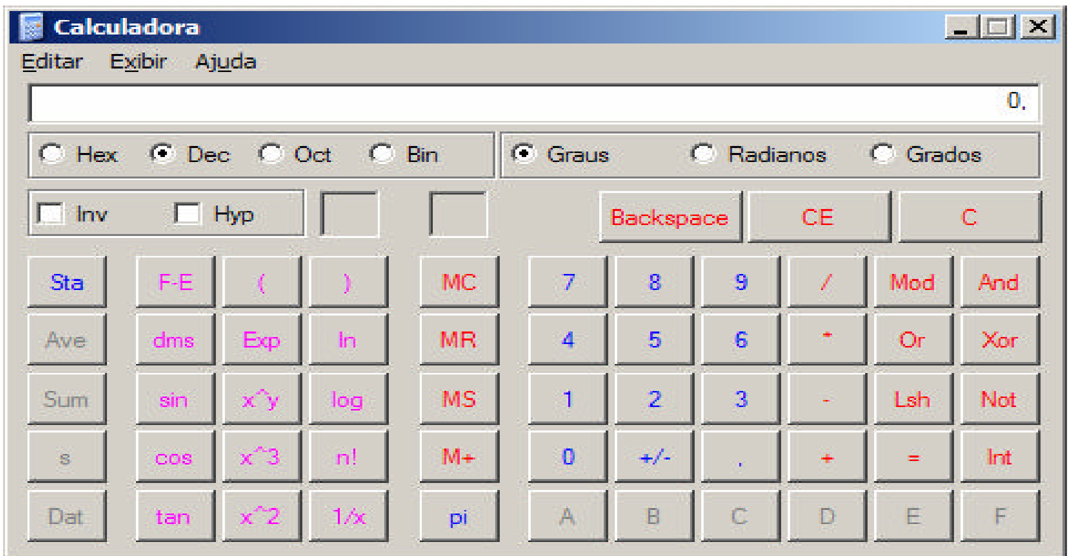
Calculadora é um software do Microsoft Windows presente no sistema operacional desde 1985.

O acessório simula uma calculadora onde é possível fazer cálculos matemáticos. Possui dois tipos: padrão e científico

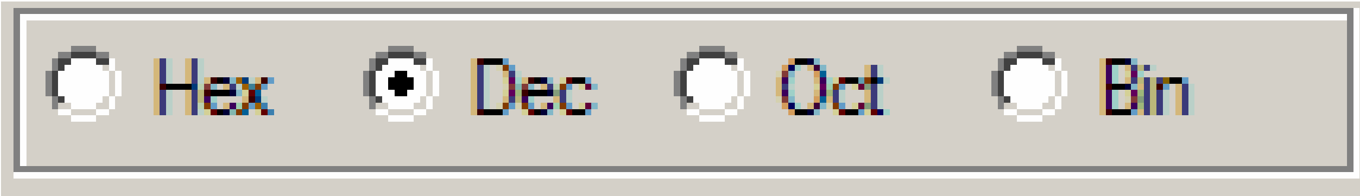
Inicialmente a Calculadora se apresenta conforme a figura (calculadora padrão)



No menu Exibir há a opção de escolher entre a calculadora padrão e a científica
A calculadora científica é ilustrada abaixo



A Calculadora permite operações em Hexadecimal, Decimal, Octal e Binário



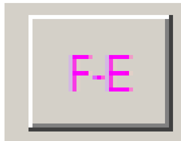
Nesta aula trabalharemos apenas com números Decimais

Notação Científica

Números muito grandes podem ser expressos usando notação científica

Exemplo: $50*10^6$ em notação científica pode ser expresso 5.e+6

Esta opção pode ser habilitada ou desabilitada através do botão

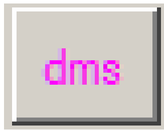


Entretanto, números maiores ou iguais a 10^{32} serão sempre expressos exponencialmente

Formato Grau-Minutos-Segundos

Um número decimal pode ser convertido para o formato g-m-s utilizando o botão

Exemplo: 2,5 pode ser convertido em 2m30s utilizando o botão

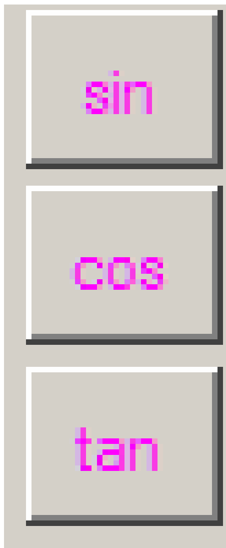


O inverso pode ser obtido clicando em Inv e depois em dms

Funções Trigonométricas

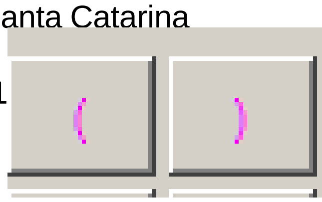
As teclas **sin** , **cos** e **tan** calculam o seno, cosseno e tangente, respectivamente, de um número decimal em graus

Para calcular o arco de um seno, cosseno tangente, basta clicar em **Inv** e posteriormente em um dos botões **sin** , **cos** e **tan**



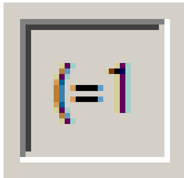
Trabalhando com Equações

Os botões de parênteses são úteis para trabalhar com expressões maiores em que se faz necessário o uso de precedência nas operações



O número máximo de níveis de parênteses é 25

Os níveis de parênteses são exibidos pela caixa



Cálculos de Potências

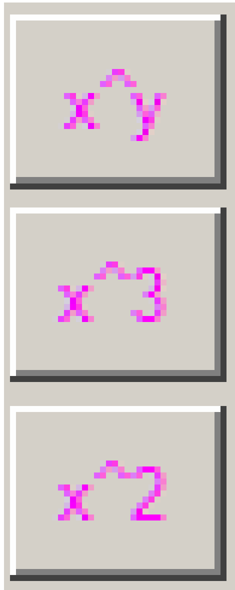
Este botão calcula a yª potência de x.

Clicando em Inv, calcula a yª raiz de X

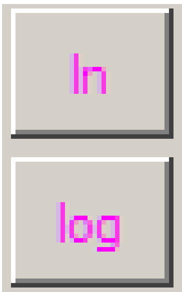
Eleva um número ao cubo. Combinado com Inv, calcula raiz cúbica

Eleva um número ao quadrado.

Combinado com Inv, calcula a raiz quadrada



Cálculo de Logarítmos



Calcula logarítmo neperiano (base **e**).

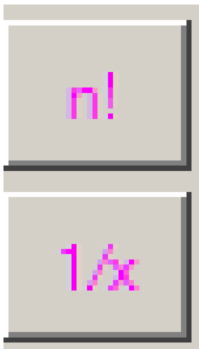
Se combinado com Inv,

calcula **e** elevado a x^e potência

Calcula logarítmo comum (base 10).

Se combinado com Inv, calcula 10

elevado à xª potência



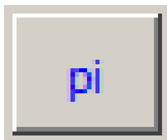
Outras Funções

Calcula fatorial de um número

Calcula o inverso de um número

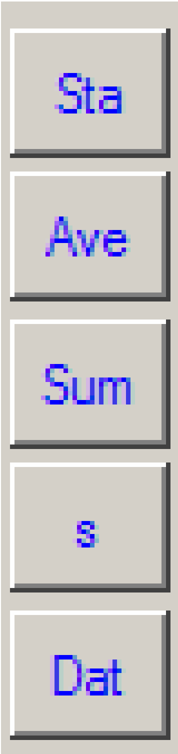
Exibe o valor de pi (3,1415…)

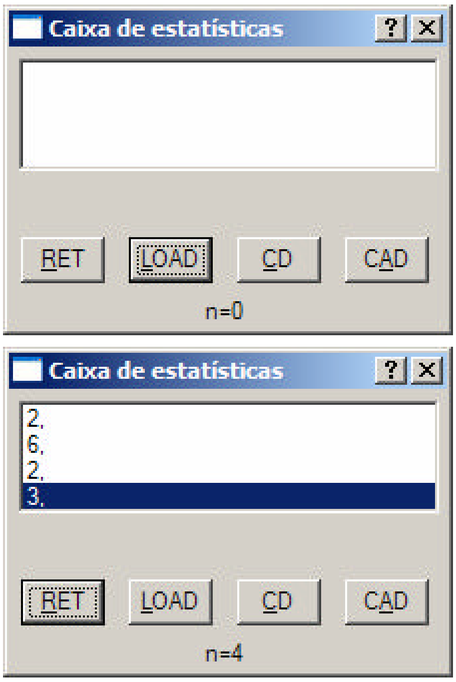
Calcula resto de x/y



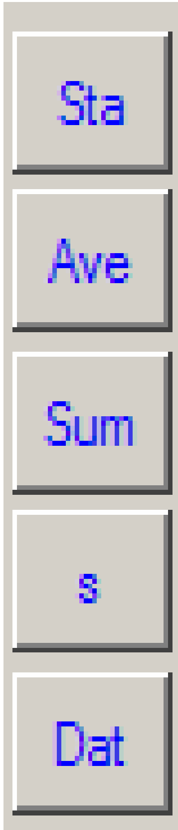
Cálculos Estatísticos

Para iniciar um cálculo estatístico, digite os primeiros valores na calculadora e clique em Sta e a seguinte janela irá abrir Clique em RET para





retornar à Calculadora



Clique em Dat para salvar os números a serem digitados

Após todos os valores terem sido digitados, clique em:

Ave: para obter a média dos valores

Sum: para obter a soma

s: para obter o desvio padrão

1.9 Áreas de Superfícies Planas

Quadrado	Retângulo	Paralelogramo	Trapézio
Losango	Triângulo	Círculo	

Aplicações

- Engenharias (civil, elétrica, naval, aeronáutica, mecânica, florestal, …)
- Cartografia
- Ciências Biológicas
- Estatística
- Indústria têxtil
- Outros

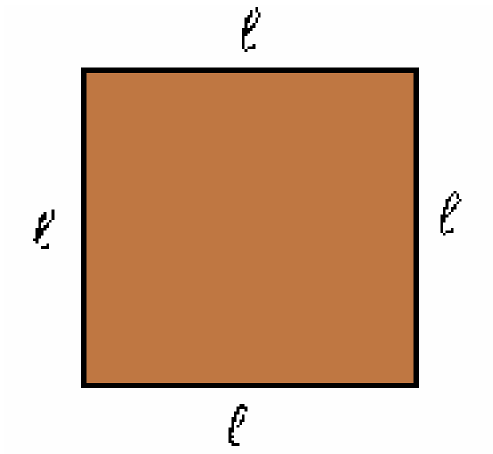
Área…

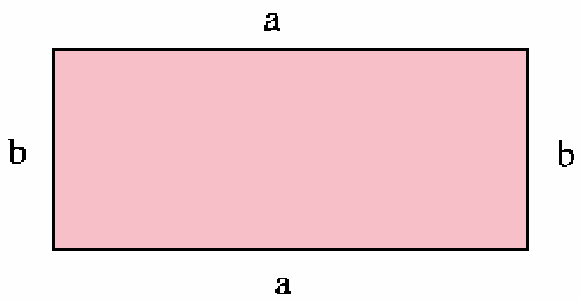
…é um número real, maior ou igual a zero, que representa a medida de uma superfície

…é a quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície

A área de um quadrado, cujo lado mede l, é dada por:

$$A = \ell^2 \qquad\qquad A = a * b$$





Exercício

Suponha uma peça de roupa cuja forma se aproxima de um quadrado, cujo lado mede 80cm. Qual a área de tecido necessária para fabricar esta peça?

A área de um retângulo de comprimento **a** e largura **b**, é dada por:

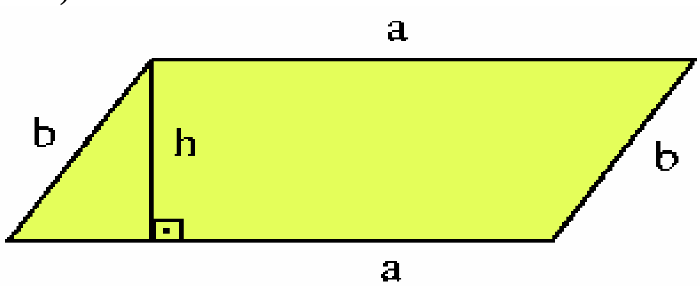
Exercício

Deseja-se produzir uma PEÇA, cuja forma aproxima-se a dois retângulos de lados 100cm e 30cm.

Qual a área de chapa necessária para produzir esta calça?

A área de um paralelogramo é obtida multiplicando-se o seu comprimento (base) pela sua largura (altura):

$$A = a * h$$

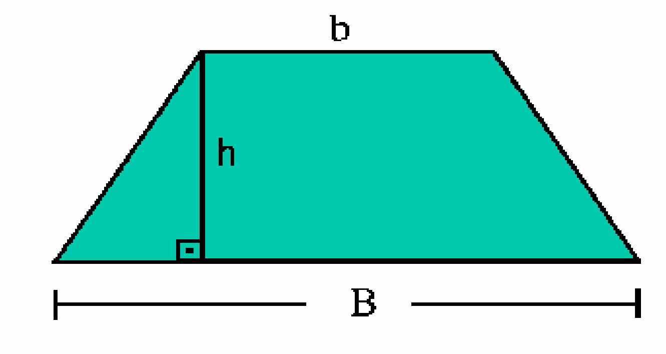


Exercício

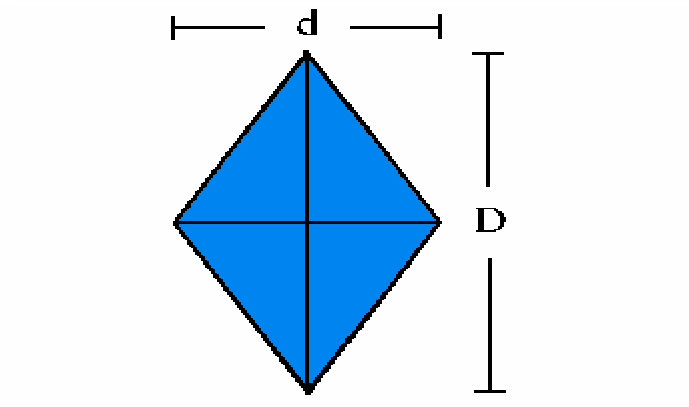
Por que as áreas do paralelogramo e do retângulo possuem fórmulas equivalentes?

A área de um trapézio é igual à metade do produto da altura pela soma das bases maior e menor:

$$A = \frac{(B*b)*h}{2}$$



$$A = \frac{D*d}{2}$$



Exercício

Deseja-se fabricar uma saia com 50 cm de cintura, 80cm de barra e 70cm de altura. Qual a área de tecido necessária?

A área de losango é igual à metade do produto das medidas diagonais

Exercício

Os vértices de um losango são os pontos médios dos lados de um retângulo. Mostre que a área do retângulo é o dobro da área do losango.

2. Sistema de medida

Para a mecânica, qualquer grandeza pode ter a sua unidade dada pela combinação da unidade de comprimento, massa e tempo. Então escolhendo o metro, o quilograma e o segundo tem-se:
Velocidade (m/s), aceleração (m/s^2), força ($kg.m/s^2$), energia ($kg.m^2/s^2$), quantidade de movimento (kg.m/s), pressão ($kg/(s^2.m)$), etc. Algumas unidades derivadas recebem nomes especiais: Para a força Newton, para a pressão, Pascal. Para a energia o Joule.

2.1 Unidade de Comprimento:

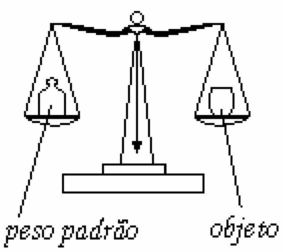
O sistema métrico trouxe algo de muito bom com relação aos múltiplos e submúltiplos: uma escala decimal de grandezas . Raciocinar de 10 em 10 é muito mais fácil para o ser humano, que na pior das hipóteses pode usar os dedos da mão para ajudar a raciocinar.:

Milímetro (mm).........0,001 m.
Centímetro (cm).............0,01 m
Decímetro (dm)...............0,1 m
Metro (m)..................1 m
Decâmetro (dam)................10 m
Hectômetro (hm).............100 m
Quilômetro (km)...........1000 m

No sistema anglo-saxão (inglês) as unidades de comprimento são:

- 1 polegada (2,54 cm) deve ser igual ao comprimento de três grãos de cevada alinhados.
- 1 jarda (0,914 m) deve representar a distância entre a ponta do nariz e o polegar, com o braço estendido, do rei Henrique I, Século XII;
- 1 pé igual a 12 polegadas (0,305 m).

2.2 Unidade de massa



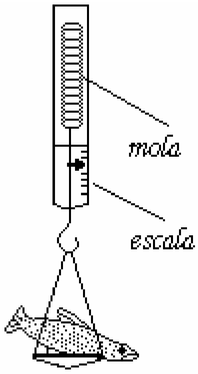


FIG. 1 Balança de pratos FIG.2 – Balança de mola

massa do peso padrão . g = massa do objeto . g
cortando g
massa do peso padrão = massa do objeto

O padrão de massa, o grama é definido como a massa de 1 cm cúbico de água destilada à 4ºC. Apenas para construção de padrão representativo da unidade ter-se-ia adotado por convenção a massa de 1000 g; o quilograma. Os submúltiplos deste padrão de massa deveria obedecer a uma escala decimal, assim:

grama (g)	decagrama (dag)	hectograma (hg)	quilograma (kg)
0,001 kg	*0,01 kg*	*0,1 kg*	*1 kg*

2.3 Unidade de tempo

O segundo foi escolhido como unidade padrão de tempo e definido como sendo a fração 1/86400 do dia solar médio. Mas como a duração do dia tem variação ao longo dos anos (o dia tem aumentado a sua duração de 0,5 s por ano!) em 1967 se estabeleceu uma efinição mais rigorosa para o segundo: " É a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição de um elétron entre os dois níveis do estado fundamental do átomo de Césio 133". Os relógios atômicos podem medir o tempo com muita precisão fornecendo o padrão de comparação de tempo segundo muito confiável.

2.4 Unidade de Temperatura

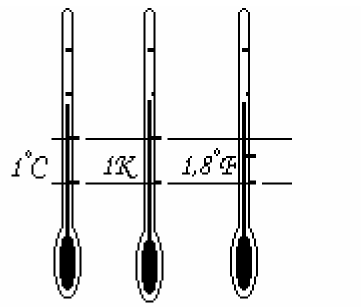


FIG. 3 – Variação de temperatura

Kelvin é uma escala absoluta, esta unidade não leva o símbolo de graus como as outras unidades, assim escreve-se 273,16K e não 273,16°K. Além disso a variação de 1K é igual à variação de temperatura de 1°C.
Assim a conversão de graus Kelvin (T) para graus Celsius (t) obedece a relação:

$$t = T - 273,15$$

Repare que não é 273,16 e sim 273,15, estabelecida por definição. Assim o zero absoluto se dá a –273,15ºC.

Para transformar kelvin para celsius $\mathbf{t = T-273,15}$
Para transformar celsius para kelvin $\mathbf{T = t+273,15}$
Para transformar celsius para faherenheit(F) $\mathbf{F = 1,8*t+32}$
Para transformar faherenheit para celsius $\mathbf{t = (F-32)/1,8}$

2.5 Unidade de energia

Em todos os sistemas vistos anteriormente a energia é uma grandeza derivada, Partindo da definição de trabalho, que é energia, força x deslocamento pode-se escrever:

Sistema CGS	-----	dina.cm	= erg
Sistema MKS	-----	N.m	= Joule
Sistema MKS*	-----	kgf.m	= quilogramagrâmetro
Inglês inercial	-----	poundal.ft	= sem nome especial
Inglês ponderal	-----	lb_f.ft	= sem nome especial

Um erg é mais ou menos a energia que você gasta para dar um piscada.
E a caloria?
A caloria é uma unidade de energia, cujo uso não é recomendado mas ainda muito utilizada. Ela é definida como a quantidade de energia necessária para elevar de 14,5°C a 15,5°C 1 g de água. Por ser 1 g é designada como "caloria-grama". A caloria-grama eqüivale sempre , a uma quantidade de energia mecânica de 4,186J, o equivalente mecânico do calor. É interessante notar que é uma unidade definida com grandezas muito disponíveis, 1g de água e temperatura de 14,5ºC que é a temperatura média da água lá na Europa. O BTU (british thermal unit) e eqüivale a 252 calorias – grama, note que esta unidade é muito usada em em sistemas de ar condicionado.

2.6 Unidade de potência

O conceito físico de potência, energia por tempo. No SI potência é joule/segundo (J/s). Mas, também são unidades de potência o cavalo vapor (cv ou hp - horse – power em inglês)

Ps. O quilowattt – hora não é potência é energia. Unidade muito usada na comercialização de energia elétrica. Assim é o trabalho executado por um sistema que fornece 1 quilowattt de potência durante uma hora, o que eqüivale a 1000 wattts x 1 hora ou 1000 joules/segundo x 3600 segundos que dá 3 600 000 joules, é muita energia!
Um chuveiro tem uma potência de 6 kw (seis quilowattt), você gasta 20 minutos (1/3 de hora) para tomar um banho e admitindo que o quilowattt – hora custe R$ 0,30 então você vai pagar:

6 x 1/3 x 0,30 = R$ 0,60 (sessenta centavos)

Você paga por energia e não potência.
Acho que dá para tomar um bom banho até em 5 minutos.

2.7 Unidade de corrente elétrica e luminosidade

Para unidades na eletricidade precisamos da definição de corrente elétrica.
"O ampère é a intensidade de uma corrente elétrica constante que, mantida em dois condutores paralelos, retilíneos, de comprimento infinito, de secção circular desprezível e situadas à distância de 1m entre si , no vácuo, produz entre estes condutores uma força igual a 2 x10^{-7} newton por metro de comprimento.

A unidade de intensidade luminosa "Candela" é definida como: A intensidade luminosa, numa dada direção de uma fonte que emite uma radiação monocromática de freqüência 540 x 10^{12} hertz e cuja intensidade energética nesta direção é 1/638 wattt por esterradiano".

2.8Tabela de unidades

COMPRIMENTO / MASSA

Unidade	SI	Multiplicar por	Unidade	SI	Multiplicar por
n(nano)	.m	10^{-9}	.g	kg	0,001
µ(micro)	.m	10^{-6}	Ton	kg	1000
Dm	.m	0,1	lb_m	kg	0,45359237
Cm	.m	0,01	Slug	kg	14,594
.mm	.m	0,001	oz (onça)$_{avoirdupois}$	kg	$28,35.10^{-3}$
m	.m	1000	Grão	kg	$6,48.10^{-6}$
Ft	.m	0,3048	Tonelada (inglesa)	kg	1016
In	.m	0,0254	Utm	kg	9,80665
yd (jarda)	.m	0,9144	Arroba	kg	14,688

ÁREA / VOLUME

Unidade	SI	Multiplicar por	Unidade	SI	Multiplicar por
Are	.m^2	$4,047.10^3$	barril (petróleo)	m^3	0,159
Acre	.m^2	100	cm^3	m^3	10^{-6}
Hectare	.m^2	10000	gal (galão americano)	m^3	$3,785.10^{-3}$
km^2	.m^2	10^6	gal (galão imperial)	m^3	$4,545963.10^{-3}$
Pé^2 (ft^2)	.m^2	0,06451	litro (L)	m^3	10^{-3}
Polegada quadrada (in^2)	.m^2	9,290304	Pé cúbico (ft^3)	m^3	0,028317
			Polegada cúbica (in^3)	m^3	0,00001639

FORÇA / PRESSÃO

Unidade	SI	Multiplicar por	Unidade	SI	Multiplicar por
Dina	N	10^{-5}	atmosfera (atm)	Pa	$1,01325.10^5$
Kgf	N	9,8	Bar	Pa	10^5
libra força (lbf)	N	4,45	Barie	Pa	0,1
Poundals	N	0,13825	mm Hg	Pa	133,322

			mca (metro de coluna de áua)	Pa	9,80665
			Milibar	Pa	10^2
			lbf/ft^2	Pa	
			lbf/in^2	Pa	

VISCOSIDADE / CONDUTIVIDADE TÉRMICA

Unidade	SI	Multiplicar por	Unidade	SI	Multiplicar por
Centipoise (cp)	kg/(m.s)	10^{-3}	Cal/(cm^2.s.ºC/cm)	W/(m^2.K/m)	418
Poise (P)	kg/(m.s)	0,1	BTU/(ft^2.h.ºF/ft)	W/(m^2.K/m)	1,73073
lb_m/(ft.h)	kg/(m.s)	2,1491	Kcal/(m^2.h.ºC/m)	W/(m^2.K/m)	$1,5048.10^5$
Lb_m/(ft.s)	kg/(m.s)	$6,7197.10^{-4}$			
Kg/(h.m)	kg/(m.s)	0,0036			

DENSIDADE / VAZÃO

Unidade	SI	Multiplicar por	Unidade	SI	Multiplicar por
g/l	.kg/m^3	1	L/h	m^3/s	$2,778.10^{-7}$
.kg/l	.kg/m^3	1000	ft^3/h	m^3/s	$2,16.10^{-6}$
.g/cm^3	.kg/m^3	1000	gal/min (gpm)	m^3/s	$6,308.10^{-5}$
.lb_m/ft^3	.kg/m^3	16,018			
.lb_m/in^3	.kg/m^3	$2,768.10^4$			

1. Converta as medidas abaixo para notações no SI:

a) 327 g	f) 60 km	k) 350 dm^2	p) 3 g/cm^3
b) 0,32 toneladas	g) 32 km	l) 40000 mm^2	q) 5 g/cm^2
c) 40 mg	h) 425 mm	m) 4523 cm^3	r) 0,1 g/m^2
d) 73645 mg	i) 35 cm	n) 0,54 km^2	s) 3 h
e) 4025 g	j) 766 cm	o) 90 km/h	t) 40 km/h^2

2. Utilizando a tabela de fatores de conversão, transforme as medidas dadas:

Ex: 25 hp (horsepower)em W (watt): *– Fator de conversão: 1 hp = 745,7 W =>*

– Para obter a quantidade na nova *f = 45,7*

unidade, utilizamos a fórmula: Q' = f x *Q* *Q = 25*

Q' = 745,7x 25 = 18642.5 W

R: 25 hp = 18642.5 W

a) 1,65 m (*metro*) em pol:

b) 1 mês em h (*horas*):

c) 150 kcal (*kilocaloria*) em J (*joule*):

d) 450 W (*Watt*) em cv (*cavalovapor*):

e) 20 lbf (*libraforça*) em N (*newton*):

f) 1.2 atm (*atmosfera*) em Pa (*Pascal*):

g) 71 kg (*kilograma*) em lb (*libra*):

i) 9,8 N (*Newton*) em dyn (*dina*):

3. Obtenha o fator de conversão para as seguintes unidades baseando-se no exemplo:

Ex: de m^2 *para* cm^2*:* $1m^2 = (1\ m) \times (1\ m) = (10^{-2}cm) \times (10^{-2}\ cm) = 10^{-4} cm \times cm = 10^{-4} cm^2$

a) m^3 para cm^3:

b) pol^2 para m^2:

c) m/s para km/h:

d) $kg.m/s^2$ para $g.cm/s^2$:

e) $m^2.kg$ para $cm^2.g$:

4. Faça a conversão dos seguintes valores:

(a) 26 km/*h* para m/*s*; **R:**

(b) $\frac{46{,}8\ cm^5}{s^5.g}$ para $\frac{m^5}{dia^5.kg}$; R: $2{,}25\times10^{19}\frac{m^5}{dia^5.kg}$

(c) 1,3 *Km/s* para *milhas/h* ; **R: 2908,15 milhas/h**

(d) 300 *J/min* para *Hp*; **R: 6,7´10^{-3} Hp**

(

.5. Qual a diferença entre pressão manométrica e absoluta? O que é vácuo? A pressão absoluta pode ser negativa?

6. Transforme:

a) 3 atm para N/cm^2 ; **R: 30,4 N/cm²**

b) 30,0 *cmHg* de vácuo para *at*m; **R:0,395 atm**

c) 650 *mmHg* para metros de coluna de água (*mc*a). **R:8,84 mca**

2.9 Grandezas Escalares e Vetoriais:

As grandezas vistas anteriormenre são denominadas grandezas escalares. Por outro lado, existem grandezas físicas que, para sua perfeita caracterização, exigem, além da intensidade, uma orientação espacial (direção e sentido). Tais grandezas recebem o nome de grandezas vetoriais. Como exemplo de grandezas vetoriais, podemos citar: força, impulso, quantidade de movimento, velocidade, aceleração e muitas outras.

Vetores:

As grandezas vetoriais são representadas por um ente matemático denominado vetor.

Um vetor reúne, em si:

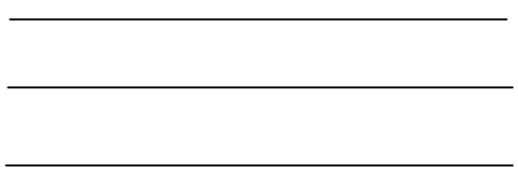
módulo, representando o valor numérico ou intensidade da grandeza,

direção

sentido, representando a orientação da grandeza.

É importante salientarmos as diferenças entre direção e sentido: um conjunto de retas paralelas tem a mesma direção.

Retas horizontais



E, a cada direção, podemos associar uma orientação.

A figura abaixo representa uma grandeza vetorial qualquer: um segmento de reta orientado (direção e sentido) com uma determinada medida (módulo).

?
Vetor a

- módulo: representado pelo comprimento do segmento AB.
- Direção: reta determinada pelos pontos A e B.
- Sentido: de A para B (orientação da reta AB)

Para indicar um vetor, podemos usar qualquer uma das formas indicadas abaixo:

? ?
a ou AB
A ————————————? B
origem extremidade

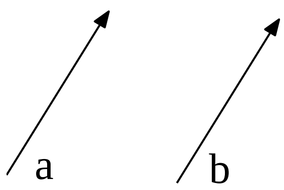
Para indicarmos o módulo de um vetor, podemos usar qualquer uma das seguintes notações:

?
a ou | a |

? ? ?   Assim, a indica o vetor a e **a** indica o módulo do vetor a.

Vetores Iguais e Vetores Opostos:

Dois vetores são *iguais* quando possuem o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido.



? ?
a = b

- a = b (módulos iguais)
- ? ?
 a e b são paralelos (mesma direção)
- ? ?

a e b possuem o mesmo sentido

Dois vetores são *opostos* quando possuem o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos contrários.

?
a ?
?
? b

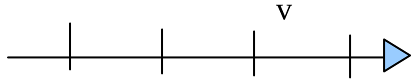
?   ?
a = - b

a = b (módulos iguais)
?   ?
a e b são paralelos (mesma direção)
?   ?
a e b possuem sentido contrários

3.Representação de Grandezas Vetoriais:

Na prática, a representação de grandezas vetoriais é feita por meio de vetores desenhado em escala. Assim, para representarmos vetorialmente a velocidade de uma partícula que se desloca horizontalmente para a direita a 80 Km/h, utilizamos um segmento de reta, por exemplo, com 4 cm de comprimento, onde cada centímetro corresponde a 20 km/h.

?
v



escala: 1,0 cm: 20 Km/h

Multiplicação de um vetor por um escalar.

Podemos multiplicar um vetor $\vec{a}$ por um escalar n (número real), obtendo um novo vetor $\vec{p}$.

$$\vec{p} = n * \vec{a}$$

Esse novo vetor $\vec{p}$ tem as seguintes características:

- direção: a mesma da $\vec{a}$ (paralelo a $\vec{a}$)
- sentido: o mesmo de $\vec{a}$ se n > 0

contrário ao de $\vec{a}$ se $n < 0$

– módulo: $\vec{p} = n * \left|\vec{a}\right|$

–

Adição de vetores

Para a adição de vetores vamos, inicialmente, definir **vetor resultante**:

Vetor resultante ou vetor soma, de dois ou mais vetores, é o vetor único que produz o mesmo efeito que os vetores somados.

Para a determinação do vetor resultante, ou seja, para efetuarmos a adição vetorial de dois ou mais vetores, podemos utilizar três métodos, denominados:

a) regra do polígono
b) regra do paralelogramo
c) regra dos componentes vetoriais

Regra do Polígono:

Para efetuarmos a adição de vetores pela regra do polígono, escolhemos, arbitrariamente, um dos vetores como ponto de partida e traçamos os vetores seguintes, colocando a origem do 2º vetor coincidindo com a extremidade do 1º e, assim, sucessivamente, até traçarmos todos os vetores. O vetor soma (S) ou resultante (R) é determinado pela origem do 1º vetor e pela extremidade do último vetor traçado.

Resumo

a) Regra do Polígono (qualquer número de vetores)

Vetores

Grandezas vetoriais

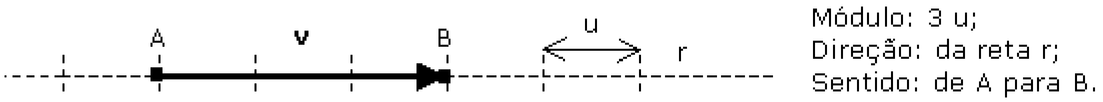
Grandezas físicas que não ficam totalmente determinadas com um valor e uma unidade são chamadas de grandezas vetoriais. As grandezas que ficam totalmente expressas por um valor e uma unidade são chamadas de grandezas escalares. Como exemplo de grandeza escalar temos a massa. Já as grandezas vetoriais, para que fiquem totalmente definidas necessitam de:

- Um Valor (módulo);
- Uma Unidade;
- Uma Direção;
- Um sentido.

Como exemplos de grandeza vetorial temos:
Velocidade, força, aceleração, etc.

Um vetor por sua vez tem três características: módulo, direção e sentido.

Para representar graficamente um vetor usamos um segmento de reta orientado.



O módulo do vetor, representa numericamente o comprimento de sua seta. No caso anterior, o módulo do vetor é igual a distância entre os pontos A e B, que por sua vez vale 3 u.

Para indicar vetores usamos as seguintes notações:

$$\vec{V} = \vec{AB}$$

O módulo de um vetor é indicado utilizando-se duas barras verticais.

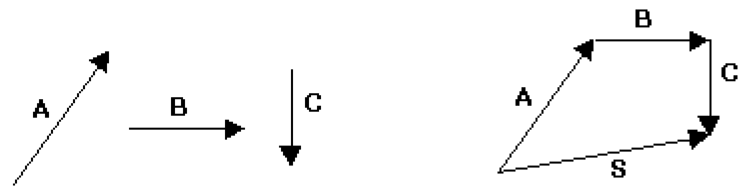
$\left|\vec{A}\right|$ (Lê-se: módulo de $\vec{A}$)

Adição de vetores

Podemos somar dois ou mais vetores, para obter um vetor soma.

Regra do polígono:

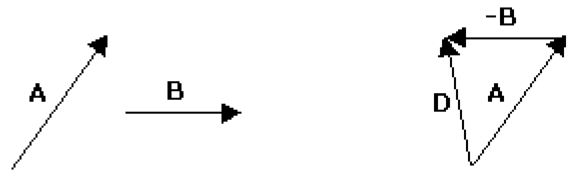
Ligam-se os vetores origem com extremidade. O vetor soma é o que tem origem na origem do 1º vetor e extremidade na extremidade do último vetor.



S = A + B + C

Subtração de vetores

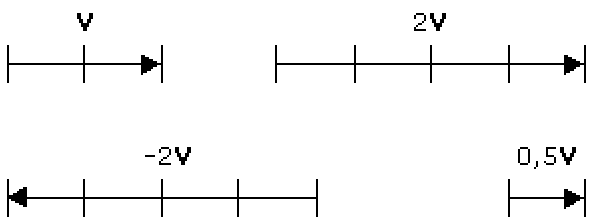
Para subtrair dois vetores adicionamos um deles ao oposto do outro.



D = A – B

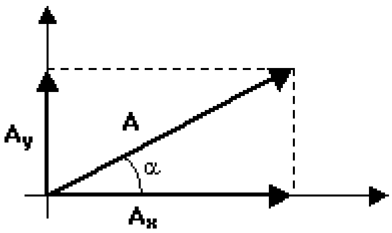
VETOR X NÚMERO REAL

O produto de um número real *n* por um vetor **A**, resulta em um vetor **R** com sentido igual ao de **A** se *n* for positivo ou sentido oposto ao de **A** se *n* for negativo. O módulo do vetor R é igual a n x |**A**|.



Decomposição de vetores

A decomposição de vetores é usada para facilitar o cálculo do vetor resultante.



$\cos\alpha = A_x/A \Rightarrow A_x = A\cos\alpha$

$\text{sen}\,\alpha = B_x/B \Rightarrow B_x = B\,\text{sen}\,\alpha$

Seja um vetor **R** resultado da seguinte operação: **R** = **A** + **B**

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

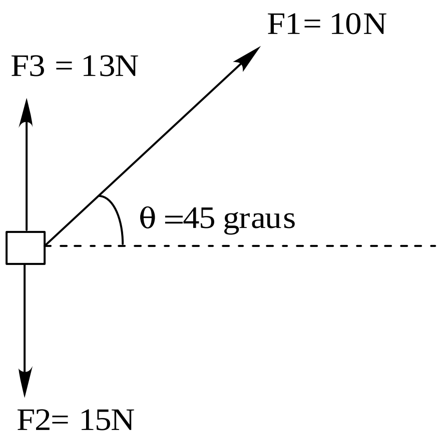
Onde:

$\mathbf{R_x} = \mathbf{A_x} + \mathbf{B_x}$

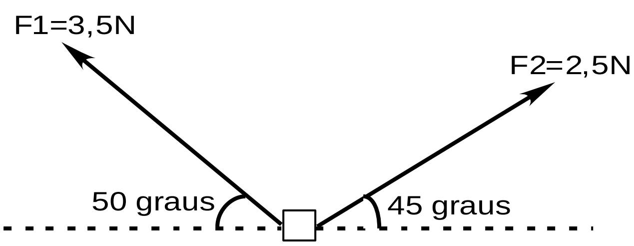
$\mathbf{R_y} = \mathbf{A_y} + \mathbf{B_y}$

Exercício: Calcule o módulo e o ângulo do vetor resultante:

a) Com 3 vetores não é possível aplicar a regra do paralelogramo. Forças de sent:idos opostos se subtraem.



b) Obs. Verifique o valor do módulo calculado por decomposição através da expressão



Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fundam.htm

3. Introdução às equações de primeiro grau

3.1 Equações do primeiro grau com 1 variável

São exemplos de função de primeiro grau:

1. f(x) = 2x-5, a = 2 e b = -5
2. f(x) = -x+7, a = -1 e b = 7
3. f(x) = 3x, a = 3 e b =0
4. $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{3}$, $a = \frac{4}{5}$ e $b = -\frac{1}{3}$

Podemos ver que toda equação tem:

- Uma ou mais letras indicando valores desconhecidos, que são denominadas variáveis ou incógnitas;
- Um sinal de igualdade, denotado por =.
- Uma expressão à esquerda da igualdade, denominada primeiro membro ou membro da esquerda;
- Uma expressão à direita da igualdade, denominada segundo membro ou membro da direita.

A palavra *incógnita* significa *desconhecida* e equação tem o prefixo *equa* que provém do Latim e significa *igual*.

2 x + 2	=	14
1o. membro	**sinal de igualdade**	**2o. membro**

As expressões do primeiro e segundo membro da equação são os *termos* da equação. Para resolver essa equação, utilizamos o seguinte processo para obter o valor de x.

2x + 2 = 14	Equação original
2x + 2 - 2 = 14 - 2	Subtraímos 2 dos dois membros
2x = 12	Dividimos por 2 os dois membros
x = 6	Solução

Observação: Quando adicionamos (ou subtraímos) valores iguais em ambos os membros da equação, ela permanece em equilíbrio. Da mesma forma, se multiplicamos ou dividimos ambos os membros da equação por um valor não nulo, a equação permanece em equilíbrio. Este processo nos permite resolver uma equação, ou seja, permite obter as raízes da equação.

Exemplos:

1. A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.
   Solução: Primeiro passamos o problema para a linguagem matemática. Vamos tomar a letra c para a idade de Carlos e a letra a para a idade de André, logo a=c-4. Assim:
   c + a = 22
   c + (c - 4) = 22
   2c - 4 = 22

$2c - 4 + 4 = 22 + 4$
$2c = 26$
$c = 13$

Resposta: Carlos tem 13 anos e André tem 13-4=9 anos.

2. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?
   Solução: Identificaremos a população da cidade A com a letra a e a população da cidade com a letra b. Assumiremos que a=3b. Dessa forma, poderemos escrever:
   $a + b = 100.000$
   $3b + b = 100.000$
   $4b = 100.000$
   $b = 25.000$

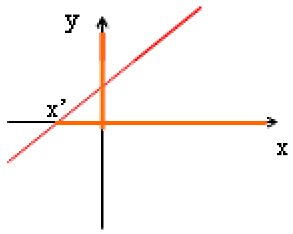
   Resposta: Como a=3b, então a população de A corresponde a: $a=3\times25.000=75.000$ habitantes.
3. Uma casa com $260m^2$ de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam $140m^2$?
   Solução: Tomaremos a área de cada dormitório com letra x.
   $3x + 140 = 260$
   $3x = 260 - 140$
   $3x = 120$
   $x = 40$

   Resposta: Cada quarto tem $40m^2$.

Exercícios: Resolver as equações
1. $2x + 4 = 10$
2. $5k - 12 = 20$
3. $2y + 15 - y = 22$
4. $9h - 2 = 16 + 2h$

Estudo do Sinal da Função do Primeiro Grau

1° Caso: A função y = ax + b tem “a” positivo, isto é a > 0, logo é crescente.



x' = raiz da função => $x' = \frac{-b}{a}$

$y = 0$ para $x = x'$

$y > 0$ para $x > x'$

$y < 0$ para $x < x'$

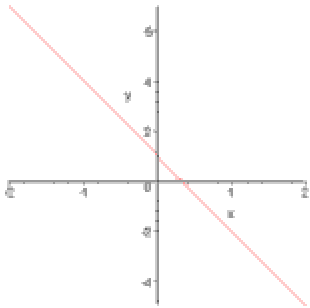
2° Caso: A função linear $y = ax + b$, tem "a" negativo, isto é, $a < 0$, logo é decrescente:

As figuras abaixo apresentam gráfico das funções: $y = f(x)$, nos seguintes casos:

Descreva se as funções são crescentes ou decrescentes e em que ponto a reta corta o eixo x e o y.

b) $f(x) = -3x + 1$

x	y = -3x + 1
0	$y = -3\times 0 + 1 = 1$
1	$y = -3\times 1 + 1 = -2$



faça o mesmo em seu caderno para as seguintes equações

a) y=3x-5
b) y=2/3 x+1
c) y=-7x+13
d) x=2-y

Sistemas linear de equações do primeiro grau

Uma equação do primeiro grau, é aquela em que todas as incógnitas estão elevadas à potência 1. Este tipo de equação poderá ter mais do que uma incógnita. Um sistema de equações do primeiro grau em duas incógnitas x e y, é um conjunto formado por duas equações do primeiro nessas duas incógnitas.

Exemplo: Seja o sistema de duas equações:

$$2x + 3y = 38$$
$$3x - 2y = 18$$

Resolver este sistema de equações é o mesmo que obter os valores de x e de y que satisfazem simultaneamente a ambas as equações. x=10 e y=6 são as soluções deste sistema e denotamos esta resposta como um par ordenado de números reais:

$$S = \{ (10,6) \}$$

Método de substituição para resolver este sistema

Entre muitos outros, o *método da substituição*, consiste na idéia básica de isolar o valor algébrico de uma das variáveis, por exemplo x, e, aplicar o resultado à outra equação.

Para entender o método, consideremos o sistema:

$$2x + 3y = 38$$
$$3x - 2y = 18$$

Para extrair o valor de x na primeira equação, usaremos o seguinte processo:

2x + 3y = 38	Primeira equação
2x + 3y - 3y = 38 - 3y	Subtraímos 3y de ambos os membros
2x = 38 - 3y	Dividimos ambos os membros por 2
x = 19 - (3y/2)	Este é o valor de x em função de y

Substituímos agora o valor de x na segunda equação 3x-2y=18:

3x - 2y = 18	Segunda equação
3(19 - (3y/2)) - 2y = 18	Após substituir x, eliminamos os parênteses
57 - 9y/2 - 2y = 18	multiplicamos os termos por 2
114 - 9y - 4y = 36	reduzimos os termos semelhantes
114 - 13y = 36	separamos variáveis e números
114 - 36 = 13y	simplificamos a equação
78 = 13y	mudamos a posição dos dois membros
13 y = 78	dividimos ambos os membros por 6
y = 6	Valor obtido para y

Substituindo y=6 na equação x=19-(3y/2), obtemos:

$$x = 19 - (3\times 6/2) = 19 - 18/2 = 19-9 = 10$$

Exercício: Determinar a solução do sistema:

$$x + y = 2$$
$$x - y = 0$$

Cada equação do sistema acima pode ser visto como reta no plano cartesiano. Construa as duas retas no plano e verifique que, neste caso, a solução é um par ordenado que pertence à interseção das duas retas.

Relação entre sistemas lineares e retas no plano

No contexto que estamos trabalhando aqui, cada equação da forma ax+by=c, representa uma reta no plano cartesiano. Um sistema com duas equações de primeiro grau em 2 incógnitas sempre pode ser interpretado como um conjunto de duas retas localizadas no plano cartesiano.

Reta 1: ax + by = c
Reta 2: dx + ey = f

Há três modos de construir retas no plano: retas concorrentes, retas paralelas e retas coincidentes.

Se o sistema é formado por duas equações que são retas no plano cartesiano, temos a ocorrência de:

Retas concorrentes: quando o sistema admite uma única solução que é um par ordenado localizado na interseção das duas retas;

Retas paralelas: quando o não admite solução, pois um ponto não pode estar localizado em duas retas paralelas;

Retas coincidentes: quando o admite uma infinidade de soluções pois as retas estão sobrepostas.

Exemplos das três situações

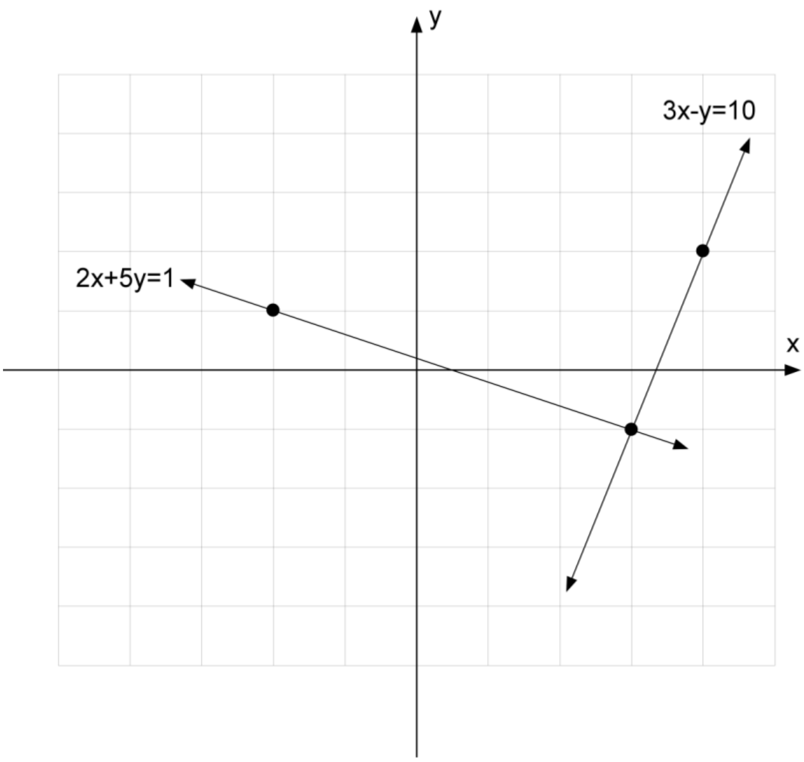
Tipos de retas	Sistema
Concorrentes	**x + y = 2** **x - y = 0**
Paralelas	**x + y = 2** **x + y = 4**
Coincidentes	**x + y = 2** **2x + 2y = 4**

5. Interpretação geométrica dos sistemas lineares 2x2

Os pares de números reais que são soluções de uma equação linear com duas incógnitas determinam, no gráfico, uma reta. A intersecção das duas retas das equações do sistema determina sua solução, se existir.

Veja a representação gráfica do sistema de duas equações abaixo:

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \rightarrow (4,2),(2,-4),... \\ 2x + 5y = 1 \rightarrow (-2,1),(3,-1),... \end{cases}$$



Problemas com sistemas de equações:

1. A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.

Solução: A idade de André será tomada com a letra A e a idade de Carlos com a letra C. O sistema de equações será:
C + A = 22
C - A = 4

Resposta: C = 13 e A = 9

2. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?
   Solucão: Identificando a população da cidade A com a letra A e a população da cidade B com B, o sistema de equações será:
   A + B = 100000
   A = 3B

   Resposta: A = 75000, B= 25000.
3. Uma casa com 260m^2 de área construída tem 3 dormitórios de mesmo tamanho. Qual é a área de cada dormitório se as outras dependências da casa ocupam 140m^2?
   Solução: Identificaremos a área de cada dormitório com a letra D e a área das outras dependências com a letra O. Assim, o sistema será:
   3D + O = 260
   O = 140

   Resposta: D = 40

Exercícios:

01) Verifique se os valores são uma solução do sistema:

a) (3, -1)

$$\begin{cases} 2x-5y=11 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$$

b) (4,1,3)

$$\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$$

c) (5,2)

$$\begin{cases} 2x+3y=8 \\ x-2y=1 \end{cases}$$

d) (0,0,0)

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+5z=0 \\ 4x+7y-3z=0 \end{cases}$$

e) (1,2,3)

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+y+5z=15 \end{cases}$$

f) (0,-1)

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=-1 \\ 3x+y=2 \end{cases}$$

02) Resolva cada sistema linear 2x2 usando o método da adição; classifique-os quanto ao número de soluções e faça sua representação gráfica.

Ministério da Educação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Unidade de Araranguá
Curso Técnico em Eletromecânica – Módulo 01
Unidade Curricular: Preparação Tecnológica

a) $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 2x+y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-2y=-12 \\ 5x+6y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 5x-10y=15 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$

03) Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x+2y+4z=0 \\ 2x+3y-z=0 \\ x-14z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x-3y+z=8 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \\ 3x+3y=8 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y+2z=5 \end{cases}$

04) Vamos resolver os sistemas pela regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x-5y=-2 \\ 3x+2y=16 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x+3y=9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x+y=14 \\ 2x-3y=-28 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-2y-2z=-1 \\ x-y+z=-2 \\ 2x+y+3z=1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+3y+3z=18 \\ 3x+2y+5z=23 \\ 5x+4y+2z=27 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x-3y-2z=4 \\ 3x+4y-z=-1 \end{cases}$

1) Encontre o valor de f(0), f(10) para as seguintes funções:

a) $f(x)=2\cdot x-3{,}85$ **c)** $f(x)=3\cdot x-(2/3)$ **e)** $f(x)=3\cdot x+3$

b) $f(x)=-2\cdot x$ **d)** $f(x)=-3\cdot x+8$ **f)** $f(x)=-2\cdot x+2$

2) Encontre o gráfico de f(x) e mostre nele o valor de y para x=5 para as funções a seguir:

a) $f(x)=x-3{,}85$ **c)** $f(x)=3\cdot x-(2/3)$ **e)** $f(x)=-3\cdot x$

b) $f(x)=2\cdot x$ **d)** $f(x)=3\cdot x-8$ **f)** $f(x)=-2\cdot x+2$

3) Encontre o gráfico de f(x) para as funções a seguir:

a) $f(x)=100x-85$

b) $f(x)=50\cdot x+2$ **c)** $f(x)=35\cdot x-(20/3)$

d) $f(x) = 300 \cdot x - 800$

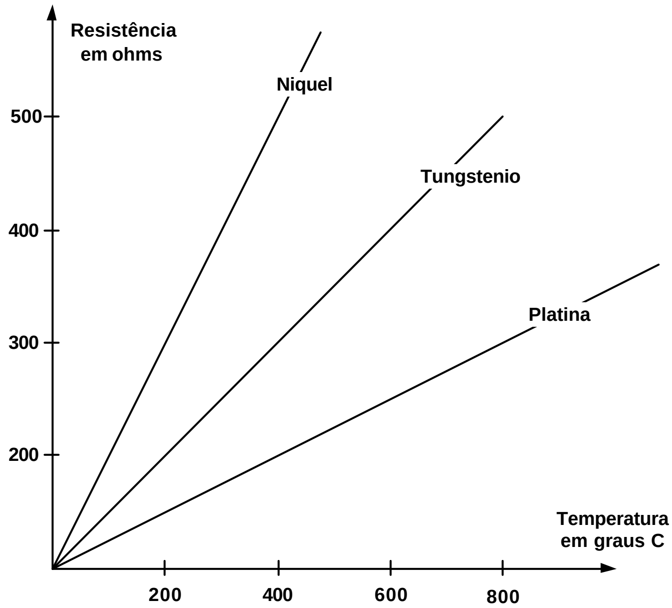
4) Faça no mesmo plano cartesiano o gráfico das funções a seguir:

a) $g(x) = 2x - 5$ **b)** $f(x) = -2 \cdot x - 5$ **c)** $t(x) = 4 \cdot x - 5$

5) O ponto de coordenadas (2,-2) pertence ao gráfico das seguintes funções.
Encontre os valores de k.

a) $f(x) = 2 \cdot x - K$ **b)** $f(x) = K \cdot x - 2$ **c)** $f(x) = 4 \cdot x - k$ **d)** $f(x) = -x + k^2$

4) O **PT100 é um sensor** de temperatura que opera baseado no princípio da variação da resistência elétrica de um metal, em função da temperatura, sendo fabricados com fios de alta pureza de platina, níquel ou de tungstênio além de outros. A resistência elétrica destes materiais aumenta com o aumento da temperatura, como mostra o gráfico ao lado. Utilizando gráfico desta questão responda:



a) Qual a temperatura de medida, sabendo que a resistência de um PT100 de Níquel esta em 500 ohms?

b) Qual a resistência de um PT100 de Platina quando a temperatura medida é de 800 °C?

c) Se a variação da temperatura a ser medida for de 200 °C a 600 °C, entre quais valores de resistência em ohms o PT100 de Tungstênio irá variar?

Introdução às equações algébricas

Equações algébricas são equações nas quais a incógnita x está sujeita a operações algébricas como: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação.

Exemplos:

1. $a x + b = 0$
2. $a x^2 + bx + c = 0$
3. $a x^4 + b x^2 + c = 0$

Uma equação algébrica está em sua forma canônica, quando ela pode ser escrita como:

$a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x^1 + a_n = 0$

onde n é um número inteiro positivo (número natural). O maior expoente da incógnita em uma equação algébrica é denominado o grau da equação e o coeficiente do termo de mais alto grau é denominado coeficiente do termo dominante.

Exemplo: A equação $4x^2+3x+2=0$ tem o grau 2 e o coeficiente do termo dominante é 4. Neste caso, dizemos que esta é uma equação do segundo grau.

A fórmula quadrática de Sridhara (Bhaskara)

Mostraremos na seqüência como o matemático Sridhara, obteve a Fórmula de Bhaskara, que é a fórmula geral para a resolução de equações do segundo grau. Um fato curioso é que a Fórmula de Bhaskara não foi descoberta por ele mas pelo matemático hindu Sridhara, pelo menos um século antes da publicação de Bhaskara, fato reconhecido pelo próprio Bhaskara, embora o material construído pelo pioneiro não tenha chegado até nós.

A fórmula de Bhaskara é:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad com \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Equação do segundo grau

Uma equação do segundo grau na incógnita x é da forma:

$$a x^2 + b x + c = 0$$

onde os números reais a, b e c são os coeficientes da equação, sendo que a deve ser diferente de zero. Essa equação é também chamada de *equação quadrática*, pois o termo de maior grau está elevado ao quadrado.

Equação Completa do segundo grau

Uma equação do segundo grau é completa, se todos os coeficientes a, b e c são diferentes de zero.

Exemplos:

1. $2x^2 + 7x + 5 = 0$
2. $3x^2 + x + 2 = 0$

Equação incompleta do segundo grau

Uma equação do segundo grau é incompleta se b=0 ou c=0 ou b=c=0. Na equação incompleta o coeficiente a é diferente de zero.

Exemplos:

1. $4x^2 + 6x = 0$ 2. $3x^2 + 9 = 0$ 3. $2x^2 = 0$

Resolução de equações incompletas do 2o. Grau

Equações do tipo $ax^2=0$

Basta dividir toda a equação por a para obter $x^2 = 0$, significando que a equação possui duas raízes iguais a zero.

Equações do tipo $ax^2+c=0$

Novamente dividimos toda a equação por *a* e passamos o termo constante para o segundo membro para obter $x^2 = -c/a$.

- Se $-c/a$ for negativo, não existe solução no conjunto dos números reais.
- Se $-c/a$ for positivo, a equação terá duas raízes com o mesmo valor absoluto (módulo) mas de sinais contrários.

Equações do tipo $ax^2+bx=0$

Neste caso, fatoramos a equação para obter x (ax + b) = 0 e a equação terá duas raízes:
x' = 0 ou x" = -b/a
Exemplos gerais:

1. $4x^2=0$ tem duas raízes nulas.
2. $4x^2-8=0$ tem duas raízes: x'=R[2], x"= -R[2]
3. $4x^2+5=0$ não tem raízes reais.
4. $4x^2-12x=0$ tem duas raízes reais: x'=3, x"=0

Exercícios: Resolver as equações incompletas do segundo grau.

1. $x^2 + 6x = 0$
2. $2 x^2 = 0$
3. $3 x^2 + 7 = 0$
4. $2 x^2 + 5 = 0$
5. $10 x^2 = 0$
6. $9 x^2 - 18 = 0$

Resolução de equações completas do 2o. grau

Como vimos, uma equação do tipo $ax^2+bx+c=0$, é uma equação completa do segundo grau e para resolvê-la basta usar a fórmula quadrática (atribuída a Bhaskara)

Se a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tiver ?>0então terá 2 raízes reais e distintas: x_1? x_2. Os pontos de intersecção da parábola com o eixo das abscissas $(x_1,0)$ e $(x_2,0)$.

Se a equação (1) tiver : ?=0, então terá duas raízes reais iguais: $x_1 = x_2$. A parábola será tangente ao eixo das abscissas no ponto $(x_1, 0)$.

Se a equação (1) tiver : $\Delta < 0$, então não terá raízes reais. Assim, a parábola não terá ponto comum com o eixo das abscissas.

b) Ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Para obtê-lo, basta atribuir valor zero à variável x, na equação $y = ax^2 + bx + c$

$$y = a \times 0^2 + b \times 0 + c \Rightarrow y = c$$

Assim o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas é (0,c).

c) Vértice da parábola.

Para determinar, genericamente, as coordenadas do vértice V da parábola da função $y = ax^2 + bx + c$, vamos supor que a ordenada do vértice seja o número k. A reta y = k possui em comum com a parábola apenas o ponto correspondente ao vértice.

Resolvendo o sistema:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$
$$y = k \quad (2)$$

Temos uma única solução. Igualando (1) e (2) temos:

$$ax^2 + bx + c = k \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx + c - k = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4a(c - k), \quad \text{para } \Delta = 0 \quad \text{temos:}$$

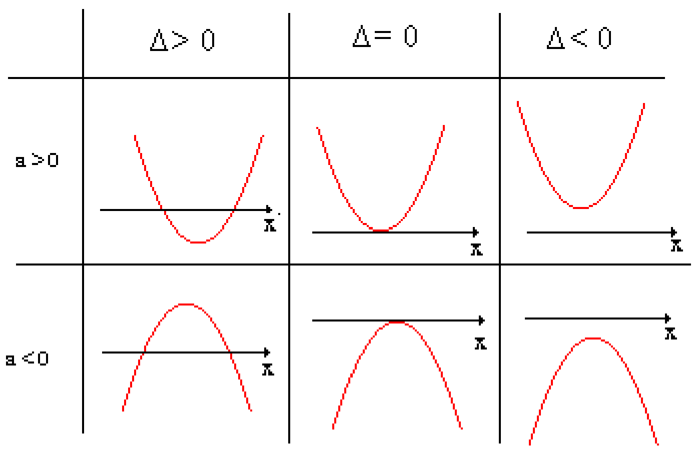
$$b^2 - 4a(c - k) = 0$$

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = \frac{-\Delta}{4a}$$

Na equação $ax^2 + bx + c - k = 0$, substituindo k por $\frac{4ac - b^2}{4a}$, obtemos $x = \frac{-b}{2a}$

O vértice da parábola, tem as coordenadas $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Resumo dos Gráficos da Função do 2º Grau



4.6 - Estudo do sinal da função do 2º grau

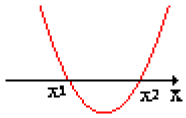
Consideremos a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Podemos esquematizar o estudo do sinal da função como segue:

Sendo $a > 0$, concavidade da parábola voltada para cima, temos:

a) se $x = x_1$ ou $x = x_2$, então $y = 0$

b) se $x < x_1$ ou $x > x_2$, então $y > 0$

c) s $x_1 < x < x_2$, então $y < 0$

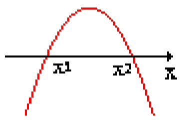


Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo, temos:

a) se $x = x_1$ ou $x = x_2$, então $y = 0$

b) se $x < x_1$ ou $x > x_2$, então $y < 0$

c) se $x_1 < x < x_2$, então $y > 0$



Exemplos: Preencher a tabela com os coeficientes e o discriminante de cada equação do segundo grau, analisando os tipos de raízes da equação.

Equação	a	b	c	Delta	Tipos de raízes
$x^2-6x+8=0$	1	-6	8	4	reais e diferentes
$x^2-10x+25=0$					
$x^2+2x+7=0$					
$x^2+2x+1=0$					
$x^2+2x=0$					

Segue um exemplo do uso da fórmula de Bhaskara para resolver a equação:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

1. Identificar os coeficientes: a=1, b=-5, c=6
2. Escrever o discriminante $D = b^2-4ac$.
3. Calcular $D=(-5)^2-4\times1\times6=25-24=1$
4. Escrever a fórmula de Bhaskara:

5. Substituir os valores dos coeficientes a, b e c na fórmula:
   x' = (1/2)(5+R[1]) = (5+1)/2 = 3
   x" = (1/2)(5-R[1]) = (5-1)/2 = 2

Exercícios

1. Calcular o discriminante de cada equação e analisar as raízes em cada caso:
    a. $x^2 + 9x + 8 = 0$
    b. $9x^2 - 24x + 16 = 0$
    c. $x^2 - 2x + 4 = 0$
    d. $3x^2 - 15x + 12 = 0$
    e. $10x^2 + 72x - 64 = 0$
2. Resolver as equações:
    a. $x^2 + 6x + 9 = 0$
    b. $3x^2 - x + 3 = 0$
    c. $2x^2 - 2x - 12 = 0$
    d. $3x^2 - 10x + 3 = 0$

Equações fracionárias do segundo grau

São equações do segundo grau com a incógnita aparecendo no denominador.

Exemplos:

1. $3/(x^2 - 4) + 1/(x - 3) = 0$
2. $3/(x^2-4)+1/(x-2)=0$

Para resolver este tipo de equação, primeiramente devemos eliminar os valores de x que anulam os denominadores, uma vez que tais valores não servirão para as raízes da equação, pois não existe fração com denominador igual a 0. Na seqüência extraímos o mínimo múltiplo comum de todos os termos dos denominadores das frações, se houver necessidade.

1. Consideremos o primeiro exemplo:
   $3/(x^2 - 4) + 1/(x - 3) = 0$
   x deve ser diferente de 3, diferente de 2 e diferente de -2, assim podemos obter o *mínimo múltiplo comum* entre os termos como:
   $MMC(x) = (x^2 - 4)(x - 3)$
   Reduzindo as frações ao mesmo denominador que deverá ser MMC(x), teremos:
   $[3(x-3) + 1(x^2-4)] / (x^2-4)(x-3) = 0$
   o que significa que o numerador deverá ser:
   $3(x - 3) + 1(x^2 - 4) = 0$
   que desenvolvido nos dá:
   $x^2 + 3x - 13 = 0$
   que é uma equação do segundo grau que pode ser resolvida pela fórmula de Bhaskara. Não existirão números reais satisfazendo esta equação.

2. Consideremos agora o segundo exemplo:
   $(x+3)/(2x-1)=2x/(x+4)$
   O mínimo múltiplo comum entre 2x-1 e x+4 é MMC=(2x-1)(x-4) (o produto entre estes fatores) e MMC somente se anulará se x=1/2 ou x= -4. Multiplicando os termos da equação pelo MMC, teremos uma sequência de expressões como:
   $(x+3)(x+4)=2x(2x-1)$
   $x^2 + 7x + 12 = 4x^2 - 2x$
   $-3x^2 + 9x + 12 = 0$

$3x^2 - 9x - 12 = 0$
$x^2 - 3x - 4 = 0$
$(x-4)(x+1) = 0$

Solução: $x'=4$ ou $x''=-1$

3. Estudemos outro exemplo:
   $3/(x^2-4)+1/(x-2)=0$
   O mínimo múltiplo comum é $MMC=x^2-4=(x-2)(x+2)$ e este MMC somente se anulará se $x=2$ ou $x=-2$. Multiplicando os termos da equação pelo MMC, obteremos:
   $3 + (x+2)=0$
   cuja solução é $x=-5$

Exercícios: Resolver as equações do segundo grau fracionárias:

1. $x + 6/x = -7$
2. $(x+2)/(x+1) = 2x/(x-4)$
3. $(2-x)/x + 1/x^2 = 3/x$
4. $(x+2)/(x-2) + (x-2)/(x+2) = 1$

Equações bi-quadradas
São equações do 4o. grau na incógnita x, da forma geral:
$a x^4 + b x^2 + c = 0$
Na verdade, esta é uma equação que pode ser escrita como uma equação do segundo grau através da substituição:
$y = x^2$
para gerar
$a y^2 + b y + c = 0$
Aplicamos a fórmula quadrática para resolver esta última equação e obter as soluções y' e y'' e o procedimento final deve ser mais cuidadoso, uma vez que
$x^2 = y'$ ou $x^2 = y''$
e se y' ou y'' for negativo, as soluções não existirão para x.
Exemplos:

1. Para resolver $x^4-13x^2+36=0$, tomamos $y=x^2$, para obter $y^2-13y+36=0$, cujas raízes são $y'=4$ ou $y''=9$, assim:
   $x^2 = 4$ ou $x^2 = 9$
   o que garante que o conjunto solução é:
   $S = \{ 2, -2, 3, -3\}$
2. Para resolver $x^4-5x^2-36=0$, tomamos $y=x^2$, para obter $y^2-5y-36=0$, cujas raízes são $y'=-4$ ou $y''=9$ e desse modo:
   $x^2 = -4$ ou $x^2 = 9$
   o que garante que o conjunto solução é:
   $S = \{3, -3\}$
3. Se tomarmos $y=x^2$ na equação $x^4+13x^2+36=0$, obteremos $y^2+13y+36=0$, cujas raízes são $y'= -4$ ou $y''= -9$ e dessa forma:

Ministério da Educação
Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina
Unidade de Araranguá
Curso Técnico em Eletromecânica – Módulo 01
Unidade Curricular: Preparação Tecnológica

$x^2 = -4$ ou $x^2 = -9$
o que garante que o conjunto solução é vazio.

Fonte: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/fundam/fundam.htm

Exercício: Calcule as raízes das equações do 2° grau:

a) $x^2 + 6x + 9 = 0$

b) $3x^2 - x + 3 = 0$

c) $2x^2 - 2x - 12 = 0$

d) $3x^2 - 10x + 3 = 0$

e) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

f) $10x^2 + 72x - 64 = 0$

g) $x^2 - 2x + 4 = 0$

h) $x^2 - 2x + 4 = 0$

06) Esboce o gráfico das equações de 2° grau:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

d) $x^2 - 8x + 7 = 0$

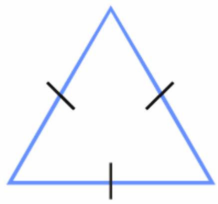
4 – Trigonometria

A trigonometria estuda as relações entre as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo.

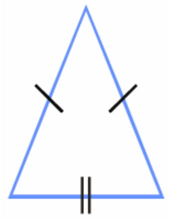
5.1 – Triângulos

Triângulos são polígonos com três lados e três ângulos internos. Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados ou quanto aos ângulos. Quanto aos **lados** os triângulos podem ser:

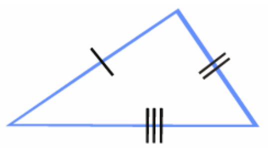
Eqüilátero – quando possui todos os lados com a mesma medida.



Isósceles – quando possui dois lados com a mesma medida.

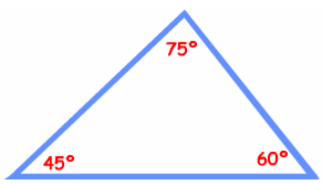


Escaleno – quando possui todos os lados com medidas diferentes.

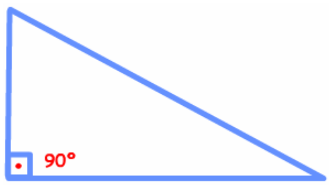


Quanto aos ângulos os triângulos podem ser:

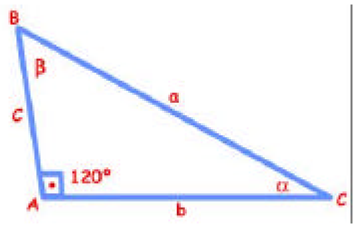
Acutângulo – quando possui todos os ângulos agudos (medem menos que 90º).



Retângulo – quando possui um ângulo reto (mede 90º).



Obtusângulo – quando possui um ângulo obtuso (mede mais que 90°).



Um triângulo é indicado pelas três letras correspondentes aos seus vértices. Cada vértice do triângulo será representado por uma letra maiúscula. Cada ângulo também será representado por uma letra maiúscula ou por uma letra grega.

Então, para a figura acima, quando nos referirmos ao triângulo, aos ângulos ou aos vértices, devemos escrever:

Triângulo **ABC**

Vértice **A**, vértice **B** ou vértice **C**

Ângulo **A**, ângulo **B** ou ângulo **C** ou ângulo α, ângulo β.

Os lados podem ser representados por letras minúsculas, lado **a**, lado **b**, lado **c**, ou pelo segmento de reta correspondente ao lado: $lado\ \overline{AB}, lado\ \overline{BC}, lado\ \overline{AC}$.

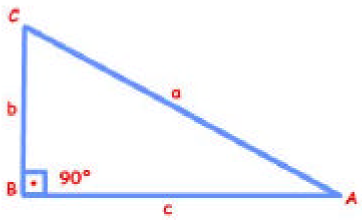
A parte da trigonometria desenvolvida neste capítulo está baseada no triângulo retângulo.

5.2 – Relações Trigonométricas no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo os lados recebem nomes específicos. O lado oposto ao ângulo de 90º é chamado **hipotenusa** e os outros dois lados são chamados **catetos**.

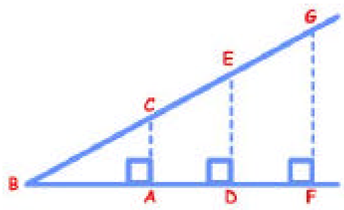
Considerando o triângulo abaixo $\overline{AC}$ é a hipotenusa e $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ os catetos. Também podemos dizer que **a** é a hipotenusa e **b** e **c** são os catetos.

Considerando um ângulo qualquer de um triângulo chamamos de cateto adjacente a este ângulo, o cateto que pertence a um dos lados do ângulo e, o outro cateto será o cateto oposto.



No triângulo retângulo existem relações entre os seus lados e os seus ângulos, a seguir:

Considerando a figura abaixo, os triângulos ABC, DBE, FBG são triângulos retângulos e semelhantes, pois seus ângulos internos são congruentes (têm a mesma medida). A razão entre dois lados quaisquer deles é igual a razão entre os lados correspondentes dos outros.



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{BG}} = K_1 \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{DB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BG}} = K_2 \qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FB}} = K_3$$

As constante K1, K2 e K3 dependem apenas do ângulo B e não das dimensões do triângulo. As razões trigonométricas K1, K2 e K3 são chamadas respectivamente seno, co-seno e tangente do ângulo B.

Seno de um ângulo é a razão entre o cateto oposto a esse ângulo e a hipotenusa, ou seja, considerando o ângulo B, temos:

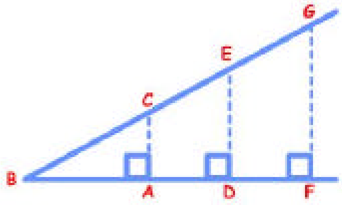
Seno de $B = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } B}{\text{medida da hipotenusa}}$

Co-seno de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa, ou seja, considerando o ângulo B, temos:

Co-seno de $B = \dfrac{\text{medida do cateto adjacente a } B}{\text{hipotenusa}}$

Tangente de um ângulo é a razão entre a medida do cateto oposto e o cateto adjacente a esse ângulo, ou seja, considerando o ângulo B, temos:

Tangente de $B = \dfrac{\text{medida do cateto oposto a } B}{\text{medida do cateto adjacente a } B}$



Considerando a figura acima podemos utilizar uma notação mais compacta para indicar essas relações.

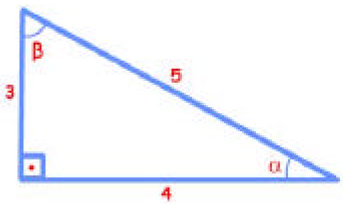
$$Sen\,B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad ou \quad Sen\,B = \frac{b}{a} \qquad Sen\,C = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad ou \quad Sen\,C = \frac{c}{a}$$

$$Cos\,B = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad ou \quad Cos\,B = \frac{c}{a} \qquad Cos\,C = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \quad ou \quad Cos\,C = \frac{b}{a}$$

$$Tan\,B = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad ou \quad Tan\,B = \frac{b}{c} \qquad Tan\,C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \quad ou \quad Tan\,C = \frac{c}{b}$$

Exemplo:

No triângulo ABC encontrar o valor de seno, co-seno e tangente de α.



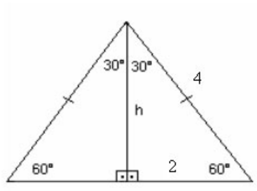
$$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \tan\alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \cos\beta = \frac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \tan\beta = \frac{4}{3} = 1{,}333....$$

5.3 – Razões trigonométricas dos ângulos de 30º, 45º e 60º.

Vamos encontrar os valores das razões trigonométricas desses ângulos através de exercícios:

1) Encontrar os valores do sen 30º, cos 30º e tan 30º e sen 60º, cos 60º e tan 60º considerando um triângulo equilátero com 4 cm de lado.



Em um triângulo equilátero a medida de cada um dos ângulos internos é 60º. Encontramos a medida da altura h usando o teorema de Pitágoras:

$h^2 + 2^2 = 4^2$
$h^2 = 16 - 4$
$h^2 = 12$
$h = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$sen(30°) = \frac{1}{2}$ $\quad sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad sen(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

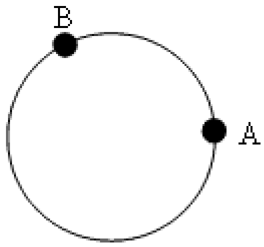
$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos(60°) = \frac{1}{2}$

$tg(30°) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad tg(45°) = 1$ $\quad tg(60°) = \sqrt{3}$

Observe que sen 30º = cos 60º e sen 60º = cos 30º . Isso acontece porque 30º e 60º são ângulos complementares (sua soma é igual a 90º). Convém salientar também que sen 30º dividido por cos 30º é igual a tangente de 30º.

5.4 – Medida de Arcos

Considerando uma circunferência e dois pontos A e B pertencentes a essa circunferência. A parte compreendida entre A e B é um arco AB dessa circunferência.



Podemos medir um arco em **GRAUS** ou em **RADIANOS**. Um arco de uma circunferência mede 1 grau (1º) quando é igual a $\frac{1}{360}$ dessa circunferência. Uma circunferência corresponde a um arco de uma volta e mede 360º.

As subdivisões do grau são minuto e o segundo.

1º = 60’ (sessenta minutos)
1’ = 60” (sessenta segundos)

Um arco de uma circunferência mede 1 radiano (rad) quando o seu comprimento é igual ao raio dessa circunferência. O comprimento de uma circunferência de raio R é $2pR$. Tomando R como unidade de medida temos que o arco igual a circunferência completa mede $2pR$.

Transformação de Unidades

p radianos equivale a 180º. Através da equivalência acima podemos transformar a medida de arcos para radianos e vice-versa.

Exemplos:

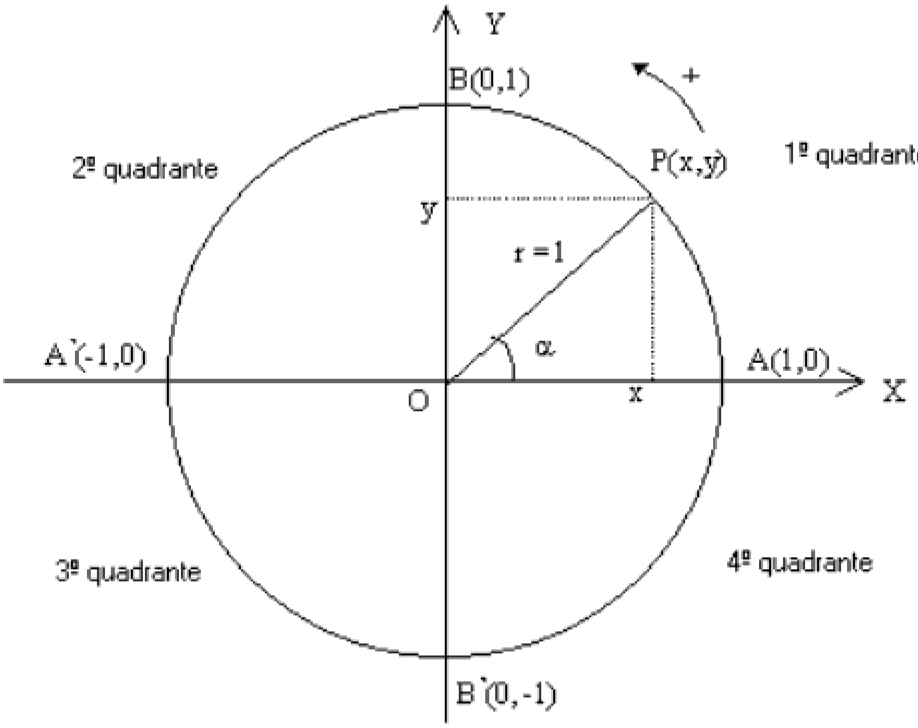
1) Determinar, em radianos a medida equivalente a 150º.
Usando uma regra de três, temos:

p ? 180º
x ? 150º

$$x = \frac{p.150°}{180°} = \frac{5p}{6} radianos$$

5.5 – Circunferência ou ciclo trigonométrico

É a circunferência orientada, com raio unitário e cujo centro está na origem de um sistema cartesiano ortogonal.



O ponto A(1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos no ciclo trigonométrico. O arco é positivo se for medido a partir de A, no sentido anti-horário e é negativo se for medido a partir de A,no sentido horário. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro quadrantes; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário a partir de A.

Exercício: Faça o gráfico das seguintes funções, considerando 0<? <360:

a) $f(\theta) = sen(\theta)$
b) $f(\theta) = cos(\theta)$
c) $f(\theta) = sen(\theta) + 10$
d) $f(\theta) = sen(\theta) - 10$
e) $f(\theta) = sen(\theta) + 100$
f) $f(\theta) = 1 \cdot sen(\theta)$
g) $f(\theta) = 5 \cdot sen(\theta)$
h) $f(\theta) = 10 \cdot sen(\theta)$
i) $f(\theta) = 100 \cdot sen(\theta)$
j) $f(\theta) = -1 \cdot sen(\theta)$
k) $f(\theta) = -5 \cdot sen(\theta)$
l) $f(\theta) = 5 \cdot sen(\theta) + 10$
m) $f(\theta) = 5 \cdot sen(\theta) - 10$
n) $f(\theta) = 10 \cdot sen(\theta) - 5$
o) $f(\theta) = 1 \cdot sen(\theta) - 1$
p) $f(\theta) = -10 \cdot sen(\theta) - 5$
q) $f(\theta) = sen(\theta + 10)$
r) $f(\theta) = sen(\theta + 50)$
s) $f(\theta) = sen(\theta - 10)$
t) $f(\theta) = 10 \cdot sen(\theta + 50)$
u) $f(\theta) = 10 \cdot sen(\theta + 50) - 5$

CAPÍTULO 07 – Números Complexos

7.1 - Número complexo na forma algébrica ou binomial (retangular)

Z = a + i * b = parte real + parte imaginária

{a,b ∈ R e i^2=-1}

$i = \sqrt{-1}$ = número imaginário

Z ∈ Conjunto dos números complexos

7.2 - Número complexo na forma polar

$C = |C| e^{jq}$

$|C|$ = módulo

? = fase

e = número de euler = 2,7182828

Obs: Representação como vetor, onde o módulo é o comprimento do vetor e a fase é o ângulo no sentido anti-horário em relação ao semi eixo positivo da abscissa x.

7.3 - Conversão da forma retangular para polar

$C = \sqrt{a^2 + b^2}$

$q = tg^{-1} \frac{b}{a} = tg^{-1} \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$

7.4 - Conversão da forma polar para retangular

$a = c \cos q$

$b = csenq$

$ce^{jq} = c(\cos(q) + j\,\mathrm{sen}(q)) = c \cos q + jc\,\mathrm{sen}\,q = a + jb$

7.5 - Exponenciação de números complexos

$n^k = (a + jb)^k = (ce^{jq})^k = c^k e^{jkq} = c^k (\cos kq + j\,\mathrm{sen}(kq))$

k = expoente do número complexo na forma retangular ou polar

7.6 – Representação geométrica dos números complexos

Uma maneira de definir o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais (a,b) em que estão definidas:

- Igualdade:
  (a,b) = (c,d) portanto a = c e b = d
- Adição:
  (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)
- Multiplicação:
  (a,b)(c,d) = (ac – bd, ad +vbc)

O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado plano complexo ou plano Argand-Gauss. Dizemos que o ponto P(a,b) é o afixo do número complexo a+i*b. Podemos associar a cada número complexo Z = a + i*b um único vetor com extremidades no ponto 0, origem do sistema de coordenadas cartesianas, e no ponto P(a,b).

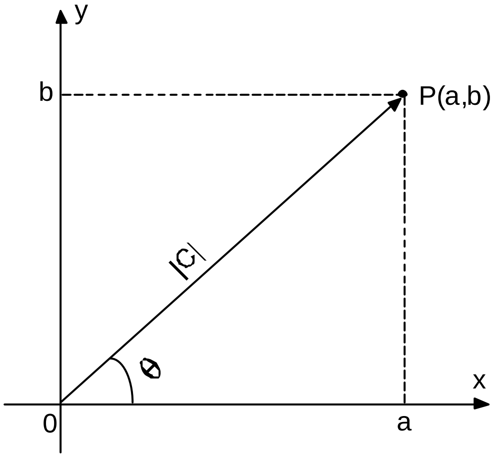


Figura 7.1 – Plano complexo

7.7 – Conjugado de um número complexo

O conjugado de um número complexo Z = (a,b) = a + i*b é o número complexo $\overline{Z} = (a, -b) = a - i * b$.

Exercícios:

01) Represente no plano complexo os seguintes números complexos:
forma retangular

a) z1 = 6;	c) z3 = j4;	e) z5 = -4-j4;
b) z2 = 2-j3;	d) z4 = -3+j2;	f) z6 = 3+j3;

02) Transforme os números complexos da questão anterior para a forma polar :
Retangular para Polar

$$a + jb = (\sqrt{a^2 + b^2})e^{jq} = ce^{jq}$$

$$tgq = b/a$$

03) Represente os número como vetores no plano cartesiano e depois transforme os número complexos a seguir da forma polar para retangular:
Polar para Retangular

$$ce^{jq} = c(\cos(q) + j\,\mathrm{sen}(q)) = c\cos q + jc\,\mathrm{sen}\, q = a + jb$$

a) c1=10<45°	c) c3=10<120°	e) c5=10<300°

b) c2=5<-60°	d) c4=5<210°	f) c6=5<-150°

04) Realize a adição e subtração dos números complexos apresentados nos itens 01) e 03)
Obs: Para somar ou subtrair é mais conveniente na forma retangular.

a) z1+z3;	d) z6-z2-z1	g) c3-c5
b) z2-z5;	e) c1+c3	h) z1+c5
c) z1+z4+z6	f) c2-c6	i) z4-c2
j) c4+z5		

05) Realize a multiplicação e a divisão dos número complexos apresentados nos itens 01) e 03):
Obs: Mais conveniente na forma polar

a) z1*z4	e) z1*c3	i) $(c4)^4$
b) z2/z5	f) c2/z4	j) $(z2)^5$
c) c3*c5	g) z3*z3	
d) c2/c6	h) c1*c1*c1	

obs. $n^k = (a + jb)^k = (ce^{jq})^k = c^k e^{jkq} = c^k(\cos kq + j\,\mathrm{sen}(kq))$

06) Determine x e y reais para que se verifique a igualdade:

a) (3x,2) = (1,5y)	d) (x-2,y+1) = (1,0)
b) (2,3) = (x-1,2y -3)	e) (x-3,y) = (0,0)
c) (1,-5) = (x+y,x-y)	f) (x+2,3x+y) + (x,-4y) = (4,-3)